METODOS MATEMATICOS AVANZADOS

SOLUCIÓN TAREA 1: TEORIA de STURM-LIOUVILLE

1) $L[u] = \frac{d}{dx}(p(x)u') - q(x)u$

Si $\psi(x) = \int_a^b G(x,x') f(x') dx'$ entonces, usando $L_x(G) + \lambda\rho(x) G(x,x') = \delta(x-x')$

$$L[\psi] = \int_a^b L_x[G] f(x') dx' = -\int_a^b \lambda \rho(x) G(x,x') f(x') dx' + \int_a^b \delta(x-x') f(x') dx'$$

$$L[\psi] = -\lambda\rho(x)\psi(x) + f(x)$$

$$\boxed{L[\psi] + \lambda\rho(x)\psi(x) = f(x)}$$ ψ cumple con la ecuación diferencial.

Además
$$\alpha_0 \psi(a) + \alpha_1 \psi'(a) = \int_a^b \alpha_0 G(x,x')\Big|_{x=a} f(x') dx' + \alpha_1 \int_a^b \partial_x G(x,x')\Big|_{x=a} f(x') dx'$$

$$= \int_a^b \underbrace{\left[\alpha_0 G(a,x') + \alpha_1 \partial_x G(a,x')\right]}_{= 0} f(x') dx' = 0.$$

y similarmente para $x=b$:

$\beta_0 \psi(b) + \beta_1 \psi'(b) = 0 \Rightarrow \psi$ cumple con las condiciones de frontera

---

2) a) $\delta(x-x') = \sum_n a_n u_n(x)$ Por ortonormalidad de las u_n tenemos:

$$\int_a^b \rho(x) u_n(x) \delta(x-x') dx = a_n$$

$$\boxed{a_n = \rho(x') u_n(x').}$$

Entonces $$\boxed{\delta(x-x') = \rho(x') \sum_n u_n(x') u_n(x)}$$

Notemos que $\sum_m u_n(x')u_n(x) = \frac{1}{\rho(x')}\delta(x-x') = \frac{1}{\rho(x)}\delta(x-x')$

por que $f(a)\delta(x-a) = f(x)\delta(x-a)$

Finalmente

$$\boxed{\delta(x-x') = \left(\sum_m u_n(x')u_n(x)\right)\rho(x)}$$

b) Escribiendo $G(x,x') = \sum_n c_n u_n(x)$ y remplazando en la ecuación diferencial:

$$L_x[G] + \lambda\rho(x)G(x,x') = \delta(x,x') \qquad (1.5)$$

obtenemos:

$$\sum_m c_n\left[L[u_n] + \lambda\rho(x)u_n(x)\right] = \sum_m u_n(x)u_n(x')\rho(x)$$

Pero como ~~los~~ (u_n) son solución del sistema de Sturm Liouville, tenemos $L[u_n] = -\lambda_n\rho(x)u_n(x)$. Entonces la ecuación (1.5) da:

$$\sum_m c_n[\lambda-\lambda_n]\cancel{\rho(x)}u_n(x) = \cancel{\rho(x)}\sum_m u_n(x)u_n(x').$$

Igualando los coeficientes de $u_n(x)$ (por ortogonalidad de los $u_n(x)$):

$$(\lambda-\lambda_n)c_n = u_n(x') \qquad \boxed{c_n = u_n(x')\frac{1}{\lambda-\lambda_n}} \qquad \left(\text{con } \lambda\neq\lambda_n\right).$$

La solución final es:

$$\boxed{G(x,x') = \sum_n \frac{u_n(x')u_n(x)}{\lambda-\lambda_n}}$$

3) a) u y v son solución de $L[y] + \lambda p(x) y = 0$. (1.7)

Calculemos $uL[v] - v L[u]$

Usando (1.7):

$$uL[v] - vL[u] = -u(x)\lambda p(x) v(x) + v\lambda p(x) u(x) = 0.$$

Directamente:

$$uL[v] - vL[u] = u\frac{d}{dx}(p(x)v') - v\frac{d}{dx}(p(x)u')$$

$$= u\frac{d}{dx}(p(x)v') - \frac{d}{dx}[v(x)p(x)u'(x)] + u'(x)v'(x)p(x)$$

$$= \frac{d}{dx}[u\, p(x)v'] - v'\frac{d}{dx}[u]p(x) - \frac{d}{dx}[v(x)pu'(x)] + u'v'(x)p(x)$$

$$= \frac{d}{dx}[p(x)(uv' - vu')]$$

Finalmente:

$$\frac{d}{dx}[p(x)(uv' - vu')] = 0.$$

Integrando obtenemos: $p(x)(u'v - v'u) = A = \text{constante}$

$$\boxed{u'v - v'u = \frac{A}{p(x)}}$$

---

3) b) Si $x \neq x'$ G cumple con la ecuación homogenea: $L(G) + \lambda p(x) G = 0$

Así para $x < x'$ podemos escribir:

$$G(x,x') = C\, u(x)$$

en donde C es una constante con respecto a x (depende de x')

Para $x > x'$ tenemos

$$G(x,x') = D\,v(x) \quad \text{con } D \text{ cte con respecto a } x$$

Volviendo a la ecuación en todo el dominio $[a,b]$, e integrando en un intervalo centrado en x':

$$\int_{x'-\epsilon}^{x'+\epsilon} dx\left(L_x[G] + \lambda\rho(x)\,G(x,x')\right) = \int_{x'-\epsilon}^{x'+\epsilon} \delta(x-x')\,dx = 1$$

$$1 = \int_{x'-\epsilon}^{x'+\epsilon}\left[\frac{d}{dx}\left(p(x)\,\partial_x G(x,x')\right) + \lambda\rho(x)\,G(x,x')\right]dx = p(x)\,\partial_x G(x,x')\Big|_{x=x'-\epsilon}^{x=x'+\epsilon} + \int_{x'-\epsilon}^{x'+\epsilon}\lambda\rho(x)\,G(x,x')\,dx$$

En el límite $\epsilon \to 0$, la segunda integral se anula.

Queda:

$$\boxed{p(x')\left[\partial_x G(x,x')\Big|_{x=x'^+} - \partial_x G(x,x')\Big|_{x=x'^-}\right] = 1}$$

Así determinamos que $\partial_x G(x,x')$ es discontinua en $x = x'$ y su discontinuidad es $1/p(x')$.

Por otro lado $G(x,x')$ es continua en $x = x'$ (de otro modo habría $\delta'(x-x')$ en la ec. diferencial)

Así tenemos:

$$\begin{cases} C\,u(x') - D\,v(x') = 0 & (\text{Continuidad de } G \text{ en } x = x') \\ D\,v'(x') - C\,u'(x') = \dfrac{1}{p(x')} & (\text{discontinuidad de } \partial_x G \text{ en } x = x') \end{cases}$$

El discriminante de este sistema es el wronskiano:

$$\Delta = \begin{vmatrix} u(x') & -v(x') \\ -u'(x') & +v'(x') \end{vmatrix} = +u(x')\,v'(x') - u'(x')\,v(x') = \frac{-A}{p(x')} \neq 0$$

$$C = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & -v(x') \\ \frac{1}{p(x')} & v'(x') \end{vmatrix} = -\frac{p(x')}{A} v(x') \frac{1}{p(x')} = -\frac{v(x')}{A}$$

$$D = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} u(x') & 0 \\ -u'(x') & \frac{1}{p(x')} \end{vmatrix} = -\frac{p(x')}{A} u(x') \frac{1}{p(x')} = -\frac{u(x')}{A}$$

Finalmente:

$$G(x,x') = \begin{cases} -\dfrac{u(x)v(x')}{A} & x < x' \\ -\dfrac{u(x')v(x)}{A} & x > x' \end{cases}$$

$$\boxed{G(x,x') = -\frac{u(x_<)v(x_>)}{A}}$$ con $x_< = \min(x,x')$, $x_> = \max(x,x')$

y A es la constante: $p(x)(u'v - v'u)$.

II 1) $u = \frac{R}{Q^{1/4}} \sin\varphi$ $u' = RQ^{1/4}\cos\varphi$

$$\frac{u'}{u} = \frac{RQ^{1/4}\sin\varphi}{\frac{R}{Q^{1/4}}\cos\varphi} = \sqrt{Q}\,\text{cotan}\,\varphi \iff \boxed{\text{cotan}\,\varphi = \frac{u'}{u}\frac{1}{Q}}$$

$$1 = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = \left(\frac{uQ^{1/4}}{R}\right)^2 + \left(\frac{u'}{RQ^{1/4}}\right)^2 = \frac{1}{R^2}\left(u^2\sqrt{Q} + \frac{(u')^2}{\sqrt{Q}}\right)$$

$$\boxed{R^2 = u^2\sqrt{Q} + \frac{(u')^2}{\sqrt{Q}}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot\varphi) = \frac{d}{dx}\left(\frac{u'}{\sqrt{Q}\,u}\right)$$

$$-\frac{\varphi'}{(\sin\varphi)^2} = \frac{u''}{\sqrt{Q}\,u} - \frac{(u')^2}{u^2\sqrt{Q}} - \frac{1}{2}\frac{u'Q'}{Q^{3/2}u}$$ Usando $u'' = -Qu$ obtem

$$-\frac{\varphi'}{(\sin\varphi)^2} = -\frac{Qu}{\sqrt{Q}\,u} - \frac{(u')^2}{u^2\sqrt{Q}} - \frac{1}{2}\frac{u'}{u}\frac{Q'}{Q^{3/2}} = -\sqrt{Q} - \frac{(u')^2}{u^2\sqrt{Q}} - \frac{1}{2}\frac{u'}{u}\frac{Q'}{Q^{3/2}}$$

$$\boxed{\frac{\varphi'}{(\sin\varphi)^2} = \frac{Qu^2+(u')^2}{u^2\sqrt{Q}} + \frac{u'Q'}{2u\,Q^{3/2}}}$$

Pero $Qu^2+(u')^2 = \sqrt{Q}\left(\sqrt{Q}\,u^2 + \frac{(u')^2}{\sqrt{Q}}\right) = \sqrt{Q}\,R^2$

Asi:
$$\frac{\varphi'}{(\sin\varphi)^2} = \frac{R^2}{u^2} + \frac{u'Q'}{2u\,Q^{3/2}}$$

$$\varphi' = \frac{R^2\sin^2\varphi}{u^2} + \frac{u'Q'\sin^2\varphi}{2u\,Q^{3/2}} = \sqrt{Q} + \frac{u'Q'\sin^2\varphi}{2u\,Q^{3/2}}$$

Pero $\frac{u'}{Q^{3/2}u} = \frac{1}{Q}\frac{u'}{u\sqrt{Q}} = \frac{1}{Q}\cot\varphi$

$$\varphi' = \sqrt{Q} + \frac{Q'}{Q}\frac{\cos\varphi}{2\sin\varphi}\sin^2\varphi$$

$$\varphi' = \sqrt{Q} + \frac{Q'}{2Q}\cos\varphi\sin\varphi = \sqrt{Q} + \frac{1}{4}\frac{Q'}{Q}\sin(2\varphi)$$

$$\boxed{\varphi' = \sqrt{Q} + \frac{1}{4}\frac{Q'}{Q}\sin(2\varphi)}$$

$$\boxed{\varphi' = \sqrt{\lambda - q} + \frac{q'}{4(\lambda - q)} \sin(2\varphi)} \qquad (2\text{-}7)$$

Derivando $R^2 = \sqrt{Q}\,u^2 + \frac{(u')^2}{\sqrt{Q}}$ obtenemos:

$$2RR' = 2uu'\sqrt{Q} + \frac{2u'u''}{\sqrt{Q}} + \frac{u^2 Q'}{2Q^{1/2}} - \frac{(u')^2 Q'}{2Q^{3/2}}$$

$$2RR' = \frac{2u'}{\sqrt{Q}}\big(\underbrace{Qu + u''}_{0}\big) + \frac{Q'}{2Q}\left[u^2 Q^{1/2} - \frac{(u')^2}{Q^{1/2}}\right]$$

$$2RR' = \frac{Q'}{2Q}\left(R^2 \sin^2\varphi - R^2\cos^2\varphi\right) = \frac{Q'}{2Q}R^2\left(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi\right)$$

$$2RR' = \frac{-Q'}{2Q}R^2\cos 2\varphi$$

$$\boxed{\frac{R'}{R} = -\frac{Q'}{4Q}\cos(2\varphi)}$$

$$\boxed{\frac{R'}{R} = \frac{q'}{4(\lambda - q)}\cos(2\varphi)} \qquad (2.8)$$

Esquema de resolución: Se resuelve (2.7) para φ, luego se remplaza φ en (2.8) y se resuelve para R.

Las ecuaciones para R y φ son de primer orden.

En las aplicaciones 3) y 4) que siguen usaremos el siguiente teorema:
(ver, por ejemplo, Birkhoff, Rota, "Ordinary differential equations", cap 4).

Sean $x(t)$ y $y(t)$ que satisfacen las ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{dt} = X(x,t) \quad y \quad \frac{dy}{dt} = Y(x,t) \quad \text{en} \quad a \leq t \leq b$$

en donde X y Y son dos funciones continuas y definidas en un dominio común D.
Suponga que existe ε tal que para todo $t \in [a,b]$ y $z \in D$ se cumple $|X(z,t) - Y(z,t)| \leq \varepsilon$,

y que X cumple con la condición de Lipschitz que dice que existe una ~~const~~ constante L, tal que para todo $t \in [a,b]$ y $z \in D$, $z' \in D$, se cumple con $|X(z,t) - X(z',t)| \leq L|z - z'|$.

Entonces: las soluciones $x(t)$ y $y(t)$ verifican:

$$|x(t) - y(t)| < |x(a) - y(a)| e^{L|t-a|} + \frac{\varepsilon}{L}\left(e^{L|t-a|} - 1\right).$$

Note que si $x(a) = y(a)$ entonces $|x(t) - y(t)| < \varepsilon \times \dfrac{e^{L(t-a)} - 1}{L}$

---

3) a) Para $\lambda \to \infty$ tenemos (sabiendo que q está acotada en $[a,b]$)

$$\sqrt{\lambda - q} = \sqrt{\lambda}\left(1 - \frac{q}{\lambda}\right)^{1/2} = \sqrt{\lambda}\left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) = \sqrt{\lambda} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

y $$\frac{1}{\lambda - q} = \frac{1}{\lambda}\,\frac{1}{1 - q/\lambda} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) = \frac{1}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

Remplazando en $\varphi' = \sqrt{\lambda - q} - \dfrac{q'}{4(\lambda - q)} \sin(2\varphi)$

$$\varphi' = \left(\sqrt{\lambda} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right) - \left(\frac{1}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right) \sin 2\varphi$$

Como $|\sin 2\varphi| < 1$:

$$\varphi' = \sqrt{\lambda} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

Usamos ahora el teorema anterior con $X(\varphi, x) = \sqrt{\lambda}$

$$y \ Y(\varphi, x) = \sqrt{\lambda - q(x)} - \frac{q'(x)}{4(\lambda - q(x))} \sin(2\varphi) \ y \ \varepsilon = O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

(claramente X cumple con la condición de Lipchitz (pues $X(\varphi_1, x) - X(\varphi_2, x) = 0$))

Tenemos entonces

$$|\varphi(x) - \varphi_1(x)| < O(\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

escogiendo $\varphi(a) = \varphi_1(a)$

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

con $\varphi_1(x)$ la solución de $\varphi_1' = \sqrt{\lambda} \Leftrightarrow \varphi_1(x) = \varphi_1(a) + \sqrt{\lambda}(x-a)$

Así

$$\boxed{\varphi(x) = \varphi(a) + \sqrt{\lambda}(x-a) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)}$$

De manera similar para R, tenemos

$$\frac{\cancel{R'}}{R} \quad R' = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

Usamos el teorema con $X(R, x) = 0$ y $Y(R, x) = \frac{q' R}{4(\lambda - q)} \cos(2\varphi)$

y $\varepsilon = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$

Así

$$|R(x) - R_1(x)| < O(\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

con $R_1(x)$ la solución de $R_1' = 0 \Rightarrow R_1(x) = R_1(a) = \text{constante}.$

Así $\boxed{R(x) = R(a) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)}$

b) Volviendo a u y u':

$$u(x) = \frac{R(x)}{Q^{1/4}} \sin\varphi = \left(R(a) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) \frac{\sin\left[\varphi(a) + \sqrt{\lambda}(x-a) + O(1/\sqrt{\lambda})\right]}{(\lambda - q)^{1/4}}$$

$$u(x) = \left(R(a) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) \lambda^{-1/4}\left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)\left[\sin\left(\sqrt{\lambda}(x-a) + \varphi(a)\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right]$$

$$\boxed{u(x) = \frac{R(a)}{\lambda^{1/4}}\left[\sin\left(\sqrt{\lambda}(x-a) + \varphi(a)\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right]}.$$

y $\boxed{u'(x) = R(x) Q^{1/4} \cos\varphi = R(a)\,\lambda^{1/4}\left(\cos\left(\sqrt{\lambda}(x-a) + \varphi(a)\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right)}$

Notamos que $u'(x) = O(\lambda^{1/2} u(x))$ entonces a orden dominante las condiciones de frontera son $\alpha_1 u'(a) = 0$, $\beta_1 u'(b) = 0$ (si $\alpha_1 \neq 0$ y $\beta_1 \neq 0$).

Eso da: $\cos(\varphi(a)) = 0 \Longleftrightarrow$ Escogiendo: $\varphi(a) = \frac{\pi}{2}$

y $\cos\left(\sqrt{\lambda}(b-a) + \varphi(a)\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda}(b-a) = n\pi \quad n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\lambda = \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2}}$$

Como λ es proporcional a n^2

$O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{n\pi}{(b-a)} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

en la ecuación de $\cos$ inicial despreciamos términos de orden $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$.

$$\boxed{\sqrt{\lambda_n} = \frac{n\pi}{b-a} + O(1/n)}$$

c) Tenemos $\varphi(a)=\frac{\pi}{2}$ reemplazando en u:

$$u(x)=\frac{R(a)}{\lambda^{1/4}}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}+\sqrt{\lambda}(x-a)\right]+O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right]$$

$$\sqrt{\lambda}=\frac{\pi n}{b-a}+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$u(x)=\frac{R(a)}{\lambda^{1/4}}\left[\cos\left(\frac{\pi n(x-a)}{b-a}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

La normalización es: $\int_a^b u(x)^2dx=1=\left(\frac{R(a)}{\lambda^{1/4}}\right)^2\left(\int_a^b \cos^2\left(\frac{\pi n(x-a)}{b-a}\right)dx+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\left(\frac{R(a)}{\lambda^{1/4}}\right)^2\left(\frac{b-a}{2}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

Entonces $\left(\frac{R(a)}{\lambda^{1/4}}\right)^2=\frac{b-a}{2}+O\left(\frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow \frac{R(a)}{\lambda^{1/4}}=\sqrt{\frac{b-a}{2}}+O\left(\frac{1}{n}\right)$

Reemplazando en $u(x)$:

$$\boxed{u(x)=\sqrt{\frac{b-a}{2}}\cos\frac{\pi n(x-a)}{b-a}+O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad n\to\infty}$$

4) a) pongamos $\tilde{x}=kx$ así: $\frac{d}{dx}\left[x\left(\frac{d}{dx}(u(x))\right)\right]=\frac{d}{d\tilde{x}}\left[\tilde{x}k\frac{dv(\tilde{x})}{d\tilde{x}}\right]$

y $v(\tilde{x})=u(x)$

La ecuación de Bessel toma la forma:

$$k\frac{d}{d\tilde{x}}\left(\tilde{x}\frac{dv}{d\tilde{x}}\right)+\left(k\tilde{x}-\frac{n^2}{\tilde{x}}k\right)v=0$$

$$\boxed{\frac{d}{d\tilde{x}}\left(\tilde{x}\frac{dv}{d\tilde{x}}\right)+\left(\tilde{x}-\frac{n^2}{\tilde{x}}\right)v=0}$$

Es como la ecuación (2-12) para u pero con $k=1$.

b) El cambio a la forma normal de Liouville es con $\begin{cases} w(t)=(p(x)\rho(x))^{1/4}u(x) \\ t=\int\sqrt{\frac{\rho(x)}{p(x)}}dx \end{cases}$

Con $p(x) = x$, $\rho(x) = x$ y $q(x) = \frac{n^2}{x}$

$$w(t) = (x^2)^{1/4} u(x) = x^{1/2} u(x) \quad \text{y} \quad t = \int dx = x.$$

$$u(x) = \frac{w(x)}{\sqrt{x}}.$$

La ecuación para w es: $w''_{(x)} + (1 - \hat{q}(x)) w(x) = 0$

con $\hat{q}(t) = \frac{q(x)}{\rho(x)} + (p\rho)^{-1/4} \frac{d^2}{dt^2}(p\rho)^{1/4}$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left((p(x)\rho(x))^{1/4}\right) = \frac{d^2}{dx^2}(x^{1/2}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(x^{-1/2}) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$$

$$\hat{q}(t) = \frac{n^2}{x^2} + x^{-1/2} x^{-3/2}\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{n^2}{x^2} - \frac{1/4}{x^2} = \frac{1}{x^2}(n^2 - 1/4)$$

$$w''_{(x)} + \left(1 + \frac{1/4 - n^2}{x^2}\right) w(x) = 0$$

Definiendo $M = n^2 - 1/4$

$$\boxed{w''(x) + \left(1 - \frac{M}{x^2}\right) w(x) = 0}$$

---

c) $\varphi' = \sqrt{\lambda - \hat{q}} + \frac{\hat{q}'}{4(\lambda - \hat{q})} \operatorname{sen}(2\varphi)$

$\hat{q}(x) = \frac{1}{x^2}(n^2 - 1/4) = \frac{M}{x^2}$

$\hat{q}'(x) = -\frac{2M}{x^3}$

$$\varphi' = \sqrt{\lambda - \frac{M}{x^2}} + \frac{2M}{4x^3(\lambda - \frac{M}{x^2})} \operatorname{sen}(2\varphi)$$

Con $\lambda = k = 1$

$$\boxed{\varphi' = \sqrt{1 - \frac{M}{x^2}} + \frac{M \operatorname{sen}(2\varphi)}{2(x^3 - Mx)}}$$

Para $R(x)$:

$$\frac{R'(x)}{R(x)} = \cancel{\ldots} = \frac{\hat{q}'(x)}{4(1-\hat{q})}\cos(2\varphi)$$

$$\frac{R'(x)}{R(x)} = \frac{-2M\cos(2\varphi)}{x^3 4(1-\frac{M}{x^2})}$$

$$\boxed{\frac{R'(x)}{R(x)} = -\frac{M\cos(2\varphi)}{2(x^3-Mx)}}$$

d) Para $x\to\infty$ tenemos $\sqrt{1-\frac{M}{x^2}} = 1-\frac{M}{2x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)$

$$\frac{M\sin(2\varphi)}{2(x^3-Mx)} = O\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

Así la ecuación para φ es:

$$\varphi'(x) = 1-\frac{M}{2x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

Con solución:

$$\boxed{\varphi(x) = x+\frac{M}{2x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)+\varphi_\infty}$$

φ_∞ = cte de integración

La ecuación para R es: $\frac{R'(x)}{R(x)} = O\left(\frac{1}{x^3}\right)$

$$\ln\frac{R(x)}{R_\infty} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

R_∞ = cte de integración.

$$\boxed{R(x) = R_\infty \exp\left(O\left(\tfrac{1}{x^2}\right)\right) = R_\infty\left(1+O\left(\tfrac{1}{x^2}\right)\right)}$$

llevando en $w(x) = \frac{R}{Q^{1/4}} \sin\varphi$

$$w(x) = \frac{R_\infty\left(1+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}{\left(1-\frac{M}{x^2}\right)^{1/4}} \sin\left[\varphi_\infty + x + \frac{M}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

Pero: $\left(1-\frac{M}{x^2}\right)^{-1/4} = 1 + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ y $\sin\left[x+\frac{M}{2x}+\varphi_\infty+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] = \sin\left[x+\frac{M}{2x}+\varphi_\infty\right]+O$

$$\boxed{w(x) = R_\infty \sin\left(x+\frac{M}{2x}+\varphi_\infty\right) + O\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

Pero sabemos que $Z_n(x) = u(x) = \frac{w(x)}{\sqrt{x}}$

y poniendo $\varphi_\infty = x_\infty + \frac{\pi}{2}$ tenemos:

$$Z_n(x) = \frac{R_\infty}{\sqrt{x}} \cos\left(x + x_\infty + \frac{M}{2x}\right) + O\left(\frac{1}{x^2\sqrt{x}}\right)$$

$$\boxed{Z_n(x) = \frac{R_\infty}{\sqrt{x}} \cos\left(x + x_\infty + \frac{m^2-1/4}{2x}\right) + O\left(x^{-5/2}\right)}$$