Universidad de los Andes
Departamento de Física

Métodos Matemáticos

Gabriel Téllez

Índice general

Prefacio

ESTE LIBRO NACE de unas notas de clase del curso Métodos Matemáticos para estudiantes de la carrera de Física de la Universidad de los Andes que dicté en el segundo semestre del año 2000 y en el primer semestre del año 2002. Este trata los conceptos básicos de matemáticas que todo físico debe conocer. Para abordar este libro el lector debe tener conocimientos elementales de cálculo diferencial, integral y vectorial, así como nociones de álgebra lineal correspondientes a los cursos universitarios de primeros semestres de toda carrera científica. El contenido de este libro está orientado principalmente a estudiantes de pregrado en física aunque puede ser provechoso para estudiantes de otras carreras científicas como matemáticos e ingenieros. A pesar de esta orientación hacia la física se trató de mantener un cierto rigor matemático.

El libro está dividido en seis capítulos. Cada capítulo presenta la teoría ilustrada con ejercicios, algunos de ellos resueltos, otros no. Al final de cada capítulo hay ejercicios y problemas adicionales.

El primer capítulo trata sobre funciones de variable compleja. No se trató de presentar un compendio sobre este vasto tema sino sólo lo esencial. En particular se da énfasis en las aplicaciones del teorema de residuos al cálculo de integrales definidas. La principal bibliografía utilizada para esta parte es [Spi67, Arf66, But68, Kah91].

El segundo capítulo trata sobre las distribuciones o funciones generalizadas. Se presentan primero de manera intuitiva con la distribución de Dirac y luego se dan algunos elementos de la teoría de Schwartz de las distribuciones, mostrando así el fundamento matemático de esta herramienta. La principal referencia para este capítulo es naturalmente el libro de Schwartz [Sch66] así como [Sch98, Kah91].

Los capítulos III, IV y V tratan del análisis de Fourier y la transformada de Laplace. Aquí se abordan las nociones básicas de estas transformaciones para funciones y distribuciones así como sus aplicaciones. Se presentan algunos ejemplos de cómo aparece en fenómenos físicos la transformada de Fourier, por ejemplo en óptica, pero también su utilidad como herramienta matemática para resolver ecuaciones diferenciales. La bibliografía en este tema es amplia. Podemos citar [Arf66, Sne51, Kah91, Sch98, Spi70] entre otros.

El último capítulo aborda el tema de las ecuaciones diferenciales que más comúnmente aparecen en física. Es la ocasión para presentar en detalle el método de las funciones de Green, y resolver la ecuación de Laplace en diferentes sistemas de coordenadas. Naturalmente se presenta entonces el estudio de las funciones especiales que aparecen en la solución de la ecuación de Laplace, a saber los polinomios y funciones asociadas de Legendre y las funciones esféricas armónicas para los problemas con simetría esférica, y las funciones de Bessel para los problemas con simetría cilíndrica. Para las propiedades de estas funciones especiales el lector encontrará muy útil consultar libros tales como [GR94, Wat44, WW27].

GABRIEL TÉLLEZ

Bogotá, febrero 2003

Capítulo I

Funciones de una variable compleja

En este capítulo estudiaremos las propiedades de las funciones de una variable compleja con valores complejos. En particular nos interesa estudiar las funciones derivables (también llamadas *holomorfas* o *analíticas*). Estas tienen una propiedad muy particular: una función de variable compleja derivable una vez lo es automáticamente una infinidad de veces. Esto es algo nuevo con respecto a la funciones de una variable real en que una función puede ser derivable una vez pero no dos o más veces. Esta propiedad tiene consecuencias muy especiales, una de ellas se conoce como la fórmula de Cauchy que nos permitirá entre otros calcular muchas integrales definidas muy fácilmente.

1. Funciones analíticas y funciones holomorfas

1.1. Definiciones

En todo este capítulo, salvo mención de lo contrario, f es una función de una variable compleja que toma valores complejos:

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ & z \mapsto f(z)\,. \end{aligned} \tag{I-1.1}$$

Definición I.1.1. La función f es **analítica** en $z_0 \in \mathbb{C}$ si existe $\rho > 0$ tal que para todo z que cumple $|z - z_0| < \rho$ tenemos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n\,, \tag{I-1.2}$$

con (a_n) una secuencia de números complejos.

Decimos que f es analítica en un abierto G de $\mathbb{C}$ si es analítica en todo punto de G.

En otras palabras f es analítica en z_0 si posee un desarrollo en serie de Taylor en la vecindad de z_0.

Definición I.1.2. Una función f es **holomorfa** o derivable en z_0 si f está definida en la vecindad de z_0 y el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \stackrel{\text{def}}{=} f'(z_0)\,, \tag{I-1.3}$$

existe.

Decimos que f es holomorfa en un abierto G de $\mathbb{C}$ si es holomorfa en todo punto de G.

Se trata de la misma definición que para funciones de variable real. Pero hay que caer en cuenta de un punto importante: h es un número complejo. El límite debe existir y ser único independientemente de como h se acerque a cero. Esto tendrá consecuencias importantes como lo veremos en la siguiente sección.

Teorema I.1.1. Toda función analítica es holomorfa y recíprocamente.

Es bastante evidente que toda función analítica es derivable. Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ entonces:

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n - a_0\right) \\ &= a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n h^{n-1} \\ &\xrightarrow[h\to 0]{} a_1\ . \end{aligned} \tag{I-1.4}$$

Tenemos además $f'(z_0) = a_1$. □

La recíproca, toda función holomorfa es analítica, es también cierta (aunque no es evidente). Veremos su demostración más adelante. Notemos que esto es completamente nuevo y es una propiedad muy fuerte. Para las funciones de una variable real esto no es cierto: una función de variable real puede ser derivable sin ser analítica.

Finalmente, para funciones de una variable compleja, los términos holomorfa y analítica son sinónimos.

Ejemplo I.1.1. La función $f(z) = z$ es holomorfa en todo $\mathbb{C}$. La función $f(z) = \bar{z}$, en donde $\bar{z}$ es el complejo conjugado de z, no es derivable en ningún punto.

Ejercicio I.1.1. Mostrarlo.

Algunas propiedades bastante evidentes para mostrar que una función es derivable:

Teorema I.1.2.

1. La suma de dos funciones derivables es derivable.

2. El producto de dos funciones derivables es derivable.

3. El cociente de dos funciones derivables es derivable si el denominador no se anula.

4. Si f y g son derivables entonces $f \circ g$ es derivable. $f \circ g(z) \stackrel{\text{def}}{=} f(g(z))$ y $(f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z)$. Es la regla de la cadena: $\frac{df}{dz} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dz}$.

5. Si f es derivable y su derivada f' no se anula y f es uno-a-uno de un abierto G hacia un abierto H, entonces la función recíproca f^{-1} que aplica de H hacia G es derivable. Su derivada es: $(f^{-1})'(\zeta) = 1/f'(f^{-1}(\zeta))$. O escrito de otra forma: $\zeta = f(z)$, $z = f^{-1}(\zeta)$, $f'(z) = \frac{d\zeta}{dz}$ y $(f^{-1})'(\zeta) = \frac{dz}{d\zeta} = 1/\frac{d\zeta}{dz}$.

Son las mismas propiedades básicas que para las funciones de una variable real y se demuestran de la misma forma.

1.2. Condiciones de Cauchy–Riemann

Como mencionamos anteriormente el límite (I-1.3) que define la derivada no debe depender de cómo h tiende hacia cero. Eso impone varias condiciones sobre las derivadas parciales de la parte real e imaginaria de f con respecto a la parte real e imaginaria de z. Pongamos que $z = x + iy$ con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ con u y v parte real e imaginaria de f. Supongamos que f es holomorfa en z y que las derivadas parciales de u y v en z existan. Pongamos $h = \delta x + i\delta y$. Tenemos

$$f'(z) = \lim_{\substack{\delta x \to 0 \\ \delta y \to 0}} \frac{u(x + \delta x, y + \delta y) - u(x, y) + i\,(v(x + \delta x, y + \delta y) - v(x, y))}{\delta x + i\delta y}\,. \tag{I-1.5}$$

Ahora escojamos $\delta y = 0$ y miremos el límite cuando $\delta x \to 0$.

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\delta x \to 0} \frac{u(x + \delta x, y) - u(x, y) + i\,(v(x + \delta x, y) - v(x, y))}{\delta x} \\ f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\,. \end{aligned} \tag{I-1.6}$$

De manera similar, tomando primero $\delta x = 0$ podemos mostrar que

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}\,. \tag{I-1.7}$$

Comparando las dos ecuaciones (I-1.6) y (I-1.7) deducimos **las condiciones de Cauchy–Riemann**:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}\,, \tag{I-1.8a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}\,. \tag{I-1.8b}$$

Acabamos de demostrar que:

Teorema I.1.3. Si f es derivable y las derivadas parciales de u y v existen entonces se cumplen las condiciones de Cauchy–Riemann. En otras palabras las condiciones de Cauchy–Riemann son una condición *necesaria* para que f sea holomorfa.

Recíprocamente, si las derivadas parciales de u y v son continuas, las condiciones de Cauchy–Riemann son una condición *suficiente* para que f sea holomorfa.

Ejercicio I.1.2. Demostrar la recíproca.

El siguiente ejercicio contiene varios resultados importantes. Antes es tal vez útil recordar la noción de convergencia simple y convergencia uniforme.

Definición I.1.3 (Convergencia simple). Una secuencia de funciones (f_n) definidas en un conjunto X (de $\mathbb{C}$ o de $\mathbb{R}$) converge simplemente hacia una función f si y solamente si para todo $z \in X$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)\,. \tag{I-1.9}$$

Definición I.1.4 (Convergencia uniforme). Una secuencia de funciones (f_n) converge uniformemente en un conjunto X hacia una función f si y solamente si

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0 \tag{I-1.10}$$

Ejercicio I.1.3. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie de potencias de z con radio de convergencia R.

1. Mostrar que la serie converge uniformemente dentro de todo disco de radio $r < R$.
2. Mostrar que la serie de derivadas $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ converge uniformemente dentro de todo disco de radio $r < R$.
3. Mostrar que f es holomorfa dentro de su radio de convergencia.
4. Mostrar que f es derivable una infinidad de veces y que $f^{(n)}(0) = n!\, a_n$.

Solución.

1. Podemos usar el criterio de convergencia uniforme de Weierstrass que dice que si en un conjunto $\mathcal{R}$, existe una cota M_n para una secuencia $u_n(z)$, $|u_n(z)| < M_n$ para todo $z \in \mathcal{R}$ y que $\sum M_n$ converge entonces $\sum u_n(z)$ converge uniformemente en $\mathcal{R}$.

   Sea M tal que $r < M < R$. Tenemos $\sum_n |a_n| M^n < \infty$ y para todo z tal que $|z| < r$, $|a_n z^n| < |a_n M^n|$. Cada término de la secuencia $(|a_n z^n|)$ tiene una cota superior $M_n = |a_n| M^n$ y la serie $\sum M_n$ converge, entonces la serie $\sum a_n z^n$ converge uniformemente.

2. Primero probemos que la serie $\sum na_n z^{n-1}$ tiene mismo radio de convergencia R. Sea $|z| < R$ y sea $|z_0|$ tal que $|z| < |z_0| < R$. Como la serie $\sum a_n z_0^n$ converge entonces $\lim_{n\to\infty} a_n z_0^n = 0$ y deducimos que existe un $N > 0$ tal que para todo $n > N$, $|a_n z_0^n| < 1$. Para $n > N$, los términos de la serie derivada $|a_n n z^{n-1}| < n|z^{n-1}|/|z_0^n| = u_n$. Pero vemos que la serie $\sum u_n$ converge pues $\lim_{n\to\infty} u_{n+1}/u_n = |z|/|z_0| < 1$. Así la serie $\sum na_n z^n$ converge para todo $|z| < R$.

   Por otro lado si $|z| > R$, sea $|z_0| > |z|$. Tenemos $|a_n n z^{n-1}| > |a_n z^n|/|z_0|$ y como la serie $\sum |a_n z^n|$ diverge entonces $\sum |na_n z^{n-1}|$ diverge. Pero como toda serie de potencias converge absolutamente dentro de su disco de convergencia deducimos que $\sum na_n z^{n-1}$ diverge. El radio de convergencia de $\sum a_n n z^{n-1}$ es R, el mismo que para $\sum a_n z^n$.

   Aplicando los resultados del punto 1 para la serie $\sum b_n z^n$ con $b_n = (n+1)\, a_{n+1}$ concluimos que la serie $\sum a_n n z^{n-1}$ es uniformemente convergente dentro de todo disco incluido en el disco de convergencia.

3. Por la convergencia uniforme de la serie de derivadas $\sum_n na_n z^{n-1}$ y convergencia simple de la serie $\sum a_n z^n$ podemos intercambiar límite y sumatoria y deducir que f es derivable en todo punto z al interior del disco de convergencia.

4. Además

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1}\,. \tag{I-1.11}$$

   Más generalmente tenemos

$$f^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1)a_n z^{n-p}\,. \tag{I-1.12}$$

   De este resultado deducimos que $f^{(p)}(0) = p!a_p$.

□

Ejercicio I.1.4. Sea $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ una función compleja de dos variables reales. Definimos las nuevas variables $z = x+iy$ y $\bar{z} = x-iy$. Podemos ver a f como una función de z y $\bar{z}$, $f(z,\bar{z})$.

1. Mostrar que

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{I-1.13a}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{I-1.13b}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\,, \tag{I-1.13c}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = i\frac{\partial}{\partial z} - i\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\,. \tag{I-1.13d}$$

2. Mostrar que f es una función analítica (holomorfa) de la variable z si y solamente si $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ y que además $f'(z) = \dfrac{\partial f}{\partial z}$.

3. De manera similar, mostrar que f es una función analítica (holomorfa) de la variable $\bar{z}$ si y solamente si $\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0$ y que además $f'(\bar{z}) = \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}$. En este caso decimos que f es una función *anti-analítica* de la variable z.

Usaremos muy a menudo esas derivadas parciales. Algunas notaciones usuales:

$$\partial_z = \partial \quad = \quad \frac{\partial}{\partial z}\,, \tag{I-1.14a}$$

$$\partial_{\bar{z}} = \bar{\partial} \quad = \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\,. \tag{I-1.14b}$$

Ejercicio I.1.5. Pongamos $z = re^{i\theta}$ y sea $f(z) = R(r,\theta)e^{i\Theta(r,\theta)}$. Mostrar que las condiciones de Cauchy–Riemann en coordenadas polares se escriben

$$\frac{\partial R}{\partial r} \quad = \quad \frac{R}{r}\frac{\partial \Theta}{\partial \theta}\,, \tag{I-1.15a}$$

$$\frac{\partial R}{r\partial \theta} \quad = \quad -R\frac{\partial \Theta}{\partial r}\,. \tag{I-1.15b}$$

Ejercicio I.1.6. Funciones armónicas.

Decimos que una función es armónica en un abierto G si su laplaciano es nulo en ese abierto. Sea $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ una función de dos variables.

1. Mostrar, usando las condiciones de Cauchy–Riemann, que si f es holomorfa entonces u y v son armónicas.

2. Mostrar que el laplaciano

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\,. \tag{I-1.16}$$

Y deducir usando los resultados del ejercicio I.1.4 otra demostración para el punto 1.

Ejercicio I.1.7. Sea $u(x,y) = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$.

1. Mostrar que u es armónica.

2. Encontrar v tal que $f(z) = u + iv$ sea analítica.

1.3. Funciones trascendentales elementales.

Definimos la función exponencial por la serie

$$e^z \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,, \tag{I-1.17}$$

y las funciones trigonométricas e hiperbólicas

$$\cos z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\,, \qquad \sin z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\,, \tag{I-1.18}$$

$$\cosh z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}\,, \qquad \sinh z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}\,. \tag{I-1.19}$$

La función exponencial tiene radio de convergencia infinito. Por los resultados del ejercicio I.1.3 deducimos que la función exponencial es analítica en todo $\mathbb{C}$.

Ejercicio I.1.8. Mostrar usando la definición (I-1.17) que $(e^z)' = e^z$ y deducir que $e^{z+h} = e^z e^h$.

Ejercicio I.1.9. Mostrar que $\cos iz = \cosh z$, $\sin iz = i \sinh z$, $\cos z = \cosh iz$ y $\sinh iz = i \sin z$. Encuentre un z tal que $|\cos z| > 1$.

La siguiente función a estudiar es la función logaritmo. Sin embargo su definición pone problemas porque la función exponencial es periódica en la dirección del eje imaginario. Si $\zeta = e^z$ decimos que z es el logaritmo natural de ζ. Pero como $e^{z+i2\pi} = e^z$ vemos que $z + 2i\pi$ también es el logaritmo de ζ. Más generalmente todos los $z + i2\pi n$ con $n \in \mathbb{Z}$ son logaritmos de ζ.

Esto nos lleva a introducir la noción de funciones multivaluadas o multivocas. Estas funciones pueden tomar varios valores para un valor fijo del argumento. Esto por oposición a las funciones unívocas que toman un solo valor.

Empezemos por poner por definición $\ln 1 = 0$. Para definir el logaritmo en otro punto z empezamos en 1 y nos movemos por el plano complejo sin el origen, $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, (puesto que el logaritmo de 0 no está definido) hasta llegar a z, pero con la convención siguiente: si le damos una vuelta al origen en el sentido positivo no volvemos al punto 1 sino a un punto por "encima" de este ($e^{i2\pi}$) que tiene por logaritmo $2i\pi$. Igualmente si damos la vuelta en el sentido negativo llegamos a un punto por "debajo" de 1 ($e^{-2i\pi}$). Podríamos seguir dando vueltas y cada vez llegar a un punto diferente $e^{2in\pi}$ al dar $|n|$ vueltas en el sentido positivo si $n > 0$ o negativo si $n < 0$. Este punto tiene logaritmo $2in\pi$. Hemos así definido un nuevo conjunto que puede visualizarse como una superficie en espiral, también llamada superficie de Riemann, y que se conoce como el recubrimiento universal de $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Así encima y abajo de cada punto de $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ hay una infinidad de puntos que corresponden a "hojas" (hojas de Riemann) una encima de otra y pegadas.

Ejercicio I.1.10. Para tener una mejor idea del recubrimiento universal de $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ construya un modelo en papel de esta superficie.

Para calcular el logaritmo $\ln z$ hay que saber como se va de 1 hasta z (en especial cuantas vueltas se dan alrededor del origen). El punto 0 "centro" de la hélice decimos que es un punto de ramificación. En la práctica lo más sencillo es poner $z = |z|e^{i\theta}$ en forma polar, con $\theta \in [0, 2\pi[$. Si no se ha dado ninguna vuelta alrededor del origen entonces $\ln z = \ln |z| + i\theta$. Si se han dado n vueltas alrededor del origen entonces $\ln z = \ln |z| + i\theta + i2n\pi$.

En ocasiones nos limitaremos a trabajar en una sola hoja de Riemann, conviniendo que nunca daremos una vuelta alrededor del origen. Para esto escogemos un *corte* en el plano complejo (por ejemplo la media linea $]-\infty, 0])$ que no atravesaremos y consideraremos que la función logaritmo no está definida ahí. Así la función se vuelve unívoca y además holomorfa.

Ejercicio I.1.11. Calcular la derivada de $\ln z$ para $z \in \mathbb{C}\backslash\,]-\infty, 0]$.

Podemos ahora definir la función potencia. Para cualquier $a \in \mathbb{C}$, la función potencia a está definida así: $z^a \stackrel{\text{def}}{=} e^{a \ln z}$. Por la presencia del logaritmo en la definición, esta función es, en general, multivaluada y definida en el recubrimiento universal de $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Pero hay casos particulares:

- Si a es entero positivo, se trata de la función potencia usual: $z^a = z \cdot z \cdots z$ (a veces) y es una función unívoca.
- Si $a = p/q$ es racional consideremos dos puntos uno encima de otro separados por q hojas de Riemann: $z = |z|e^{i\phi}$ y $z' = |z|e^{i\phi+2iq\pi}$. Claramente tenemos $z'^a = |z|^a e^{ip\phi/q+2ip\pi} = z^a$. No tiene utilidad distinguir la hoja 0 y la hoja q puesto que tienen mismas imágenes. Así para definir la función potencia nos podemos limitar a q hojas.

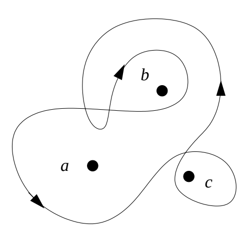
Ejemplo I.1.2. $f(z) = \sqrt{z} = z^{1/2}$ está definida sobre dos hojas de Riemann.

$$e^0 = 1, \qquad f(e^0) = e^{0/2} = 1\,, \tag{I-1.20a}$$
$$e^{2i\pi}, \qquad f(e^{2i\pi}) = e^{i\pi} = -1\,, \tag{I-1.20b}$$
$$e^{4i\pi}, \qquad f(e^{4i\pi}) = e^{2i\pi} = 1\,. \tag{I-1.20c}$$

Podemos identificar los puntos e^0 y $e^{4i\pi}$.

También puede haber recubrimientos universales de cualquier abierto. Por ejemplo para la función $f(z) = \sqrt{z - z_1}\sqrt{z - z_2}$ tendríamos dos puntos de ramificación y "espirales" de dos hojas alrededor de cada punto z_1 y z_2.

Ejemplo I.1.3.



El camino de la figura es cerrado en el recubrimiento universal de $\mathbb{C}\backslash\{b\}$ pero no lo es para los recubrimientos universales de $\mathbb{C}\backslash\{a\}$, $\mathbb{C}\backslash\{c\}$, $\mathbb{C}\backslash\{a, b, c\}$.

Ejercicio I.1.12. Para la función $f(z) = \sqrt{z - z_1}\sqrt{z - z_2}$ con $z_1 \neq z_2$, construya la superficie de Riemann sobre la cual está definida. Muestre que con dos cortes uno que empiece en z_1 y vaya hacia el infinito y el otro en z_2 y vaya hacia el infinito sin cruzarse, la función f es unívoca. Muestre también que con un solo corte $[z_1, z_2]$ basta para que la función sea unívoca.

Ejercicio I.1.13. Funciones hiperbólicas y trigonométricas inversas.

Mostrar que

$$\sinh^{-1}\zeta = \ln\left(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2+1}\right), \quad \text{(I-1.21a)}$$

$$\cosh^{-1}\zeta = \ln\left(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2-1}\right), \quad \text{(I-1.21b)}$$

$$\tanh^{-1}\zeta = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right). \quad \text{(I-1.21c)}$$

Encontrar fórmulas similares para las funciones trigonométricas inversas.

2. Representaciones geométricas

Como es bien sabido un número complejo $z = x + iy$ puede representarse en el plano por un vector $\mathbf{r} = (x, y)$. Usando las notaciones del ejercicio I.1.4 podemos encontrar representaciones de los operadores diferenciales usuales en el plano en términos de derivadas complejas.

- **Gradiente:** Sea $\phi(x, y)$ una función escalar. El gradiente de ϕ es

$$\mathbf{F} = \nabla\phi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\phi}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad \text{(I-2.1)}$$

  y se puede representar por la función compleja

$$F = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\phi}{\partial y} = 2\frac{\partial\phi}{\partial\bar{z}} \quad \text{(I-2.2)}$$

  Recordemos que $\mathbf{F}$ es perpendicular a las curvas ϕ constante.

- **Divergencia:** A todo campo vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (A_x(\mathbf{r}), A_y(\mathbf{r}))$ podemos asociar una función compleja $A = A_x + iA_y$. La divergencia es $\nabla \cdot \mathbf{A} = \partial_x A_x + \partial_y A_y$. En términos de la función compleja A se expresa así

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \Re e(2\partial_z A) = \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial\bar{A}}{\partial\bar{z}}. \quad \text{(I-2.3)}$$

- **Rotacional:** Trabajando en el plano el rotacional no es un vector sino un (pseudo) escalar: Rot $\mathbf{A} = \partial_x A_y - \partial_y A_x$. Con complejos se representa así

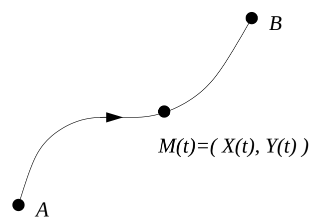
$$\text{Rot } \mathbf{A} = \Im m(2\partial_z A) = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial\bar{A}}{\partial\bar{z}}\right). \quad \text{(I-2.4)}$$

Ejercicio I.2.1. Verificar las fórmulas anteriores.

3. Integración compleja

3.1. Integral de linea

Sea un camino $\mathcal{C}$ en el plano parametrizado por dos funciones $(X(t), Y(t))$. Es decir que un punto corriente $M(t)$ del camino tiene coordenadas $(X(t), Y(t))$. El parámetro $t \in [\alpha, \beta]$ y $M(\alpha) = A$ y $M(\beta) = B$ son los extremos del camino.



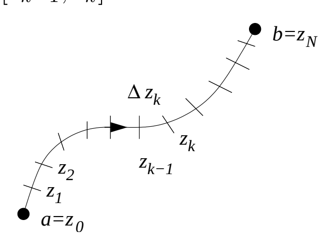
Para dos funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ podemos definir la integral de linea o integral de camino

$$\int_{\mathcal{C}} [P(x,y)dx + Q(x,y)dy] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\alpha}^{\beta} [P(X(t),Y(t))X'(t) + Q(X(t),Y(t))Y'(t)]\, dt\,. \tag{I-3.1}$$

Para una función $f(z)$ de una variable compleja también podemos definir una integral de linea. Supongamos que los puntos A y B están representados por los números complejos a y b, la integral de linea de f sobre $\mathcal{C}$ está definida por suma de Riemann

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = \int_a^b f(z)\, dz \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta z_k \to 0}} \sum_{k=1}^{N} \Delta z_k f(\zeta_k)\,, \tag{I-3.2}$$

en donde hemos dividido el camino $\mathcal{C}$ en pequeños segmentos $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ y ζ_k está en el segmento $[z_{k-1}, z_k]$.



Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ la relación entre las dos integrales de linea es

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} f(z)dz &= \int_{\mathcal{C}} (u+iv)(dx+idy) \\ &= \int_{\mathcal{C}} (u\,dx - v\,dy) + i \int_{\mathcal{C}} (u\,dy + v\,dx)\,. \end{aligned} \tag{I-3.3}$$

Si el punto corriente $M(t)$ de la curva $\mathcal{C}$ está representado por el número complejo $\gamma(t)$ (es decir que la curva está parametrizada por la función compleja γ

de una variable real t) entonces podemos calcular la integral de f por la fórmula

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t))\,d\gamma(t) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt\,. \tag{I-3.4}$$

Esta es una de las fórmulas que más usaremos para calcular integrales de linea complejas.

Ejemplo I.3.1. Sea la función $f(z) = z^n$ con $n \in \mathbb{Z}$. Calculemos $\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz$ para $\mathcal{C}$ un círculo de radio 1 centrado en 0. La curva se puede parametrizar con la función $\gamma(t) = e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} z^n\,dz &= \int_0^{2\pi} (e^{it})^n\,d(e^{it}) = \int_0^{2\pi} e^{int} i e^{it}\,dt \\ &= \begin{cases} \frac{1}{n+1}\left[e^{i(n+1)t}\right]_0^{2\pi} = 0, & \text{si } n \neq -1 \\ 2i\pi, & \text{si } n = -1 \end{cases} \end{aligned} \tag{I-3.5}$$

Teorema I.3.1. Si $f(z) = F'(z)$ en un abierto que contiene $\mathcal{C}$ entonces

$$\int_a^b f(z)\,dz = F(b) - F(a)\ . \tag{I-3.6}$$

Notar que en este caso la integral *no* depende del camino, solamente de los puntos inicial y final. Caso particular: si el camino es cerrado $\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = 0$.

Demostración.

$$\int_a^b F'(z)\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} F'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt}\left[F(\gamma(t))\right]\,dt = F(a) - F(b)\,. \tag{I-3.7}$$

□

Con respecto al ejemplo I.3.1 podemos notar que si $n \neq -1$, $z^n = (z^{n+1}/(n+1))'$ y se aplica el teorema I.3.1 que nos dice que la integral sobre un camino cerrado es cero. Pero para $n = -1$, $1/z = (\ln z)'$. La función logaritmo está definida sobre el recubrimiento universal de $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ y el camino considerado en el ejemplo I.3.1 *no* es cerrado sobre esta superficie de Riemann: al dar una vuelta llegamos a un punto sobre otra hoja de Riemann. De ahí que el resultado de la integral no sea necesariamente cero.

3.2. Teorema de Cauchy

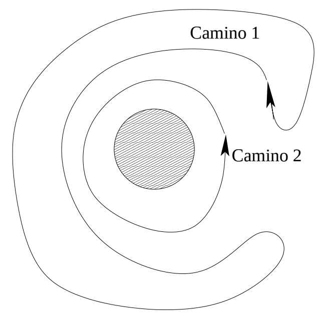
Presentamos ahora un teorema muy importante del análisis complejo.

Teorema I.3.2 (Teorema de Cauchy). Si f es holomorfa en una región abierta R simplemente conexa entonces para todo camino cerrado $\mathcal{C} \subset R$

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = 0\,. \tag{I-3.8}$$

Si la región R es múltiplemente conexa se aplica el teorema a todo camino $\mathcal{C}$ homótopo a un punto.

Expliquemos primero la terminología. Una región simplemente conexa es una región en que todo camino cerrado de esta envuelve sólo puntos de esta región. Una región es múltiplemente conexa si no es simplemente conexa. Por ejemplo un disco es simplemente conexo mientras que un anillo es múltiplemente conexo. El plano entero es simplemente conexo mientras que el plano sin un punto es múltiplemente conexo. Un camino cerrado homótopo a un punto es un camino que puede deformarse continuamente hasta volverse un punto. En la figura siguiente el camino 1 es homótopo a un punto mientras que el camino 2 no lo es.



Demostración. Si suponemos además que las derivadas de u y v (parte real e imaginaria) de f son continuas podemos demostrar fácilmente el teorema usando la fórmula de Stokes

$$\oint_{\mathcal{C}} (Pdx + Qdy) = \iint (\partial_x Q - \partial_y P)\, dxdy\,. \tag{I-3.9}$$

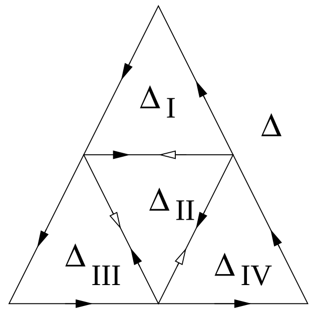
En efecto, tenemos

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} f(z)\, dz &= \oint_{\mathcal{C}} (udx - vdy) + i \oint_{\mathcal{C}} (vdx + udy) \\ &= -\iint (\partial_x v + \partial_y u) dxdy + i \iint (\partial_x u - \partial_y v) dxdy \\ &= 0\,. \end{aligned} \tag{I-3.10}$$

El paso a la segunda linea se hace usando la fórmula de Stokes y en el paso a la última linea usamos las condiciones de Cauchy–Riemann (I-1.8). □

Sin embargo la demostración se puede hacer sin suponer que f' es continua. Esto es más interesante puesto que veremos posteriormente que el teorema de Cauchy implica que f es infinítamente derivable (y en particular f' continua).

Ejercicio I.3.1. Demostrar el teorema de Cauchy sin suponer que f' es continua para un camino triangular.



Solución. Podemos descomponer el triángulo Δ grande en cuatro triángulos pequeños Δ_{I}, Δ_{II}, Δ_{III} y Δ_{IV}. Tenemos $\int_\Delta f = \int_{\Delta_{\mathrm{I}}} f + \int_{\Delta_{\mathrm{II}}} f + \int_{\Delta_{\mathrm{III}}} f + \int_{\Delta_{\mathrm{IV}}} f$ por lo tanto $|\int_\Delta f| \leq |\int_{\Delta_{\mathrm{I}}} f| + |\int_{\Delta_{\mathrm{II}}} f| + |\int_{\Delta_{\mathrm{III}}} f| + |\int_{\Delta_{\mathrm{IV}}} f| \leq 4|\int_{\Delta_1} f|$ en donde Δ_1 es el triángulo pequeño en donde la integral es mayor en modulo. Repitiendo el proceso n veces tenemos $|\int_\Delta f| \leq 4^n |\int_{\Delta_n} f|$, para triángulos cada vez más pequeños que tienden hacia un punto z_0.

Como f es derivable tenemos para z cerca a z_0, $f(z) = f(z_0) + (z-z_0)f'(z_0) + (z-z_0)\eta(z) = a + bz + (z-z_0)\eta(z)$ con $\lim_{z\to z_0} \eta(z) = 0$ y $a = f(z_0) - z_0 f'(z_0)$, $b = f'(z_0)$ son constantes (no dependen de z). Ahora como $a + bz$ es la derivada de $az + bz^2/2$ su integral en un camino cerrado es cero $\int_{\Delta_n} (a+bz)\,dz = 0$ según el teorema I.3.1. Queda pues $|\int_\Delta f| \leq 4^n |\int_{\Delta_n} \eta(z)(z-z_0)\,dz|$.

Llamemos P el perímetro de Δ, claramente el perímetro de Δ_n es $P/2^n$. Por otro lado $\lim_{z\to z_0} \eta(z) = 0$ quiere decir que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta$ entonces $|\eta(z)| < \varepsilon$. Escojamos n suficientemente grande de manera que $P/2^n < \delta$. Así tenemos $|z - z_0| < P/2^n$ y entonces se cumple que $|\eta(z)| < \varepsilon$. Obtenemos

$$\left| \int_{\Delta_n} \eta(z)(z-z_0)dz \right| \leq \varepsilon \int_{\Delta_n} |z-z_0||dz| \leq \varepsilon \frac{P}{2^n}\frac{P}{2^n} = \varepsilon \frac{P^2}{4^n}\,. \tag{I-3.11}$$

Finalmente

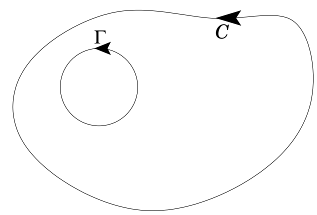
$$\left| \int_\Delta f \right| \leq 4^n \left| \int_{\Delta_n} \eta(z)(z-z_0)dz \right| \leq \varepsilon P^2\,. \tag{I-3.12}$$

Y esto para cualquier $\varepsilon > 0$, concluimos pues que $\int_\Delta f = 0$. $\square$

Algunas consecuencias directas del teorema de Cauchy. Si dos caminos $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son homótopos (es decir se pueden transformar continuamente el uno en el otro) entonces $\int_{\mathcal{C}_1} f(z)\,dz = \int_{\mathcal{C}_2} f(z)\,dz$. Si f es holomorfa en todo el plano complejo la integral $\int_a^b f(z)dz$ no depende del camino para ir de a a b.

Las integrales son iguales.　　Las integrales son diferentes

Ejercicio I.3.2. Mostrar explícitamente que la integral de una función holomorfa es igual para los dos caminos mostrados a continuación.



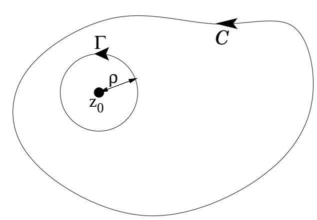
Como consecuencia del teorema de Cauchy podemos deducir una fórmula fundamental del análisis complejo conocida como fórmula de Cauchy.

Teorema I.3.3 (Fórmula de Cauchy). Sea f una función holomorfa en un abierto G de $\mathbb{C}$ y sea $z_0 \in G$. Sea un camino $\mathcal{C} \subset G$ que encierre el punto z_0 dando una sola vuelta en el sentido positivo alrededor de este punto. Entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz\,. \tag{I-3.13}$$

Demostración. Notemos primero que la función $f(z)/(z - z_0)$ es holomorfa en G excepto en el punto z_0 en donde tiene un polo simple. Entonces el teorema de Cauchy *no* se aplica y la integral no es nula.

Sea un círculo Γ centrado en z_0 de radio ρ suficientemente pequeño para que $\Gamma \subset G$ y que encierre z_0 en el sentido positivo. Los caminos Γ y $\mathcal{C}$ son homótopos por tanto $\int_{\mathcal{C}} f(z)/(z - z_0)\; dz = \int_{\Gamma} f(z)/(z - z_0)\; dz$.



Parametrizando Γ por $z = z_0 + \rho e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad &= \quad \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ &= \quad \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \rho e^{it})}{\rho e^{it}} i e^{it} dt \\ &= \quad \int_0^{2\pi} i f(z_0 + \rho e^{it}) dt \\ &\xrightarrow[\rho \to 0]{} \quad 2i\pi f(z_0)\,. \end{aligned} \tag{I-3.14}$$

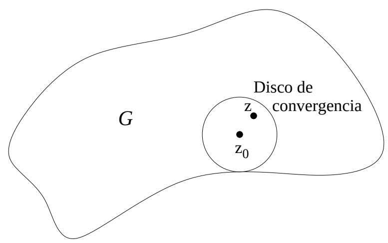
Como ρ es arbitrario tomamos el límite $\rho \to 0$, de ahí se deduce la fórmula de Cauchy. $\square$

Armados de la fórmula de Cauchy podemos ahora por fin demostrar que analítica y holomorfa son sinónimos.

Teorema I.3.4. Si f es holomorfa en G entonces f es analítica en G. Más precisamente para todo $z_0 \in G$ tenemos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \,, \tag{I-3.15}$$

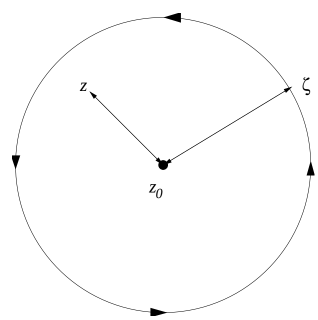
para todo z en un disco centrado en z_0 y de radio igual a la distancia de z_0 a la frontera de G. Este disco se muestra en la figura.



Además los coeficientes

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta \,, \tag{I-3.16}$$

con $\Gamma \subset G$ un círculo centrado en z_0, orientado en el sentido positivo, tal que z este al interior del círculo.



Demostración. Tenemos $\zeta - z = \zeta - z_0 + z_0 - z = (\zeta - z_0)(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0})$. Y como $|(z - z_0)/(\zeta - z_0)| < 1$ podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - z_0} \left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^{-1} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n \\ &= \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \,. \end{aligned} \tag{I-3.17}$$

Apliquemos ahora la fórmula de Cauchy

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma f(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,dz\,. \end{aligned} \tag{I-3.18}$$

La integral y la sumatoria se pueden permutar porque la serie es uniformemente convergente en todo disco de radio a centrado en z_0 y dentro de Γ. Ya que $|z-z_0| \leq a < |\zeta - z_0|$ tenemos $|z-z_0|^n/|\zeta-z_0|^n \leq a^n < 1$ y la serie $\sum a^n = (1-a)^{-1} < \infty$ converge. Así tenemos finalmente

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,dz\,. \tag{I-3.19}$$

□

Corolario I.3.1. Si f es holomorfa (derivable una vez) es derivable una infinidad de veces y además

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta\,. \tag{I-3.20}$$

Corolario I.3.2.

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}\,, \tag{I-3.21}$$

con $M(r) = \sup_t |f(z_0+re^{it})|$ y r menor que la distancia de z_0 a la frontera de G. En otras palabras $M(r) = \sup|f(z)|$ para z en el círculo centrado en z_0 de radio r e incluido dentro de G.

Demostración. Con $\zeta = z_0 + re^{it}$ en la fórmula (I-3.16) tenemos

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left|\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+re^{it})}{(re^{it})^{n+1}}ire^{it}\,dt\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|f(z_0+re^{it})|}{r^n}\,dt \leq \frac{M(r)}{r^n}\,. \end{aligned} \tag{I-3.22}$$

□

Corolario I.3.3 (Teorema de Liouville). Si f es holomorfa en todo el plano $\mathbb{C}$ y acotada entonces f es constante.

Demostración. Por hipótesis $|f| \leq M$, entonces para todo r, $|a_n| \leq M/r^n$. Tomando $r \to \infty$ deducimos que $a_n = 0$ para $n \geq 1$. Conclusión $f(z) = a_0$ es constante. □

Corolario I.3.4 (Teorema de d'Alembert o Teorema fundamental del álgebra). Todo polinomio no constante $P(z)$ admite por lo menos una raíz en $\mathbb{C}$.

Demostración. Si no fuese así la función $1/P(z)$ seria holomorfa en todo $\mathbb{C}$, además es acotada puesto que $\lim_{|z|\to\infty} 1/P(z) = 0$, entonces por el teorema de Liouville es constante: contradicción. □

Corolario I.3.5. Todo polinomio $P(z)$ de grado n se puede factorizar

$$P(z) = a \prod_{k=1}^{n} (z - z_k) \,. \tag{I-3.23}$$

Ejercicio I.3.3. Sea f analítica en un abierto G y $z_0 \in G$. Mostrar que $f(z_0)$ es igual al promedio de f sobre un círculo de centro z_0 y radio r arbitrario incluido en G:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt \tag{I-3.24}$$

Ejercicio I.3.4. Sea f analítica en un abierto G que incluye 0. Sea $\mathcal{C}$ un camino de G cerrado que encierra el origen 0 en el sentido positivo, empezando en un punto z_0 y volviendo a z_0. Mostrar que

$$\oint_{\mathcal{C}} (\ln z) f'(z)\, dz = 2\pi i\, (f(z_0) - f(0)) \tag{I-3.25}$$

Indicación. Integración por partes. □

La recíproca del teorema de Cauchy es también cierta:

Teorema I.3.5 (Morera). Si f es continua en un abierto G simplemente conexo y para *toda* curva simple cerrada $\mathcal{C}$ de G tenemos $\int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = 0$ entonces f es analítica en G.

Demostración. De la hipótesis que la integral sobre un camino cerrado es cero se deduce que la integral sobre un camino de extremos z_0 y z no depende del camino sólo de los puntos z_0 y z. Para z_0 fijo podemos entonces definir la función $F(z)$ de la variable z

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta \,. \tag{I-3.26}$$

Probemos que $F'(z) = f(z)$, en otras palabras que F es una primitiva o integral (indefinida) de f. Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) &= \frac{1}{h}\left(\int_{z_0}^{z} f(\zeta) d\zeta - \int_{z_0}^{z+h} f(\zeta) d\zeta \right) - f(z) \\ &= \frac{1}{h} \int_{z}^{z+h} f(\zeta) d\zeta - f(z) \\ &= \frac{1}{h} \int_{z}^{z+h} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta \,. \end{aligned} \tag{I-3.27}$$

Por hipótesis todas estas integrales no dependen del camino. Escojamos en la última integral un camino recto $[z, z+h]$. La continuidad de f nos dice que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|\zeta - z| < \delta$ entonces $|f(z) - f(\zeta)| \leq \varepsilon$. Escojamos ahora h tal que $|h| < \delta$, entonces en la integral anterior los puntos z y ζ cumplen $|z - \zeta| \leq |h| < \delta$ y

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &\leq \frac{1}{|h|} \int_z^{z+h} |f(\zeta) - f(z)|\, |dz| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \varepsilon |h| = \varepsilon\,. \end{aligned} \tag{I-3.28}$$

Queda pues demostrado que $\lim_{h\to 0}(F(z+h) - F(z))/h = f(z)$ es decir $F'(z) = f(z)$.

Además mostramos que F es holomorfa y entonces analítica, por consecuencia $F' = f$ también es analítica. $\square$

Bibliografía

[AF88] J. M. Arnaudiès y H. Fraysse. *Cours de Mathématiques - 2: Analyse*. Dunod Université, 1988.

[Arf66] George Arfken. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, 1966. (document)

[But68] Eugene Butkov. *Mathematical Physics*. Addison-Wesley, 1968. (document)

[BW64] Max Born y Emil Wolf. *Principles of optics*. Pergammon Press, Macmillian, 1964. IV.2.2

[CCTL77] Bernard Diu Claude Cohen-Tannoudji y Franck Laloë. *Mécanique Quantique*. Hermann, 1977.

[GR94] Izrail Solomonovich Gradshteyn y Iosif Moiseevich Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, Quinta edición, 1994. (document)

[Jac99] John David Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, Inc., Tercera edición, 1999.

[Kah91] Jean-Pierre Kahane. *Mathématiques: Cours et Exercices*. Orsay PubLications Universitaires Scientifiques, 1991. (document)

[Sch66] Laurent Schwartz. *Théorie des distributions*. Hermann, 1966. (document)

[Sch98] Laurent Schwartz. *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*. Hermann, 1998. (document)

[Sne51] Ian N. Sneddon. *Fourier Transforms*. McGraw-Hill, 1951. (document)

[Spi67] Murray R. Spiegel. *Variable Compleja*. McGraw-Hill, 1967. (document)

[Spi70] Murray R. Spiegel. *Transformadas de Laplace*. McGraw-Hill, 1970. (document)

[Wat44] G. N. Watson. *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge University Press, Segunda edición, 1944. (document)

[WW27] E. T. Whittaker y G. N. Watson. *A course of Modern Analisys*. Cambridge University Press, Cuarta edición, 1927. (document)

Índice alfabético