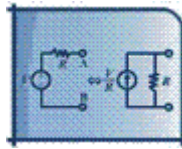


4. LINEALIDAD SUPERPOSICIÓN Y TRANSFORMACIÓN DE FUENTES



4.1. INTRODUCCIÓN

Existen otros métodos de análisis de circuitos adicionales a los de análisis de nodos y mallas anteriormente presentados. Uno de los métodos que veremos en este capítulo es el resultado del hecho de que tenemos circuitos lineales y por tanto se aplican las leyes de linealidad como son la superposición y la proporcionalidad. El otro método se basa en la posibilidad de transformar fuentes de corriente y voltaje entre ellas.

La ventaja de estas técnicas radica en que en los cálculos manuales las ecuaciones de nodos y mallas pueden dar sistemas matriciales complejos de resolver a mano, mientras que los métodos de esta sección permiten hacerlo de manera sencilla (para algunos casos).

4.2. TEOREMA DE LINEALIDAD

Para cualquier circuito resistivo lineal, cualquier señal de salida de voltaje o corriente, denominada y , puede ser expresada como una combinación lineal de las fuentes independientes del circuito:

$$y = a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_mu_m$$

en donde $u_1 \dots u_m$ son las fuentes de voltaje o corriente y $a_1 \dots a_m$ son coeficientes de proporcionalidad con las dimensiones adecuadas.

Recordemos de lo estudiado en el capítulo de nodos y mallas que un circuito puede ser representado por un sistema matricial de la forma:

$$[M] \begin{bmatrix} z_0 \\ z_k \\ z_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_k \\ f_m \end{bmatrix}$$

en donde la matriz M es una combinación de los elementos resistivos del circuito y de las constantes de las fuentes controladas, la cual depende de la topología del circuito; el vector z son las variables de estado que queremos encontrar (voltajes de nodos o corrientes de mallas) y el vector f son combinaciones lineales de las fuentes independientes de voltaje o corriente ($u_1 \dots u_m$). Si M es una matriz invertible entonces tenemos:

$$\begin{bmatrix} z_0 \\ z_k \\ z_m \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_k \\ f_m \end{bmatrix}$$

de manera que cualquier señal de voltaje o corriente del sistema es una combinación lineal de las fuentes independientes de voltaje o corriente. Si una de estas variables z_k corresponde a la variable y del teorema, se muestra como puede ser expresado como:

$$y = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_m u_m$$

4.2.1. SUPERPOSICIÓN Y PROPORCIONALIDAD

Esta técnica se basa en el teorema de linealidad del circuito y en el hecho de poder representar una fuente de voltaje a cero como un corto circuito y una fuente de corriente a cero como un circuito abierto.

Si en la ecuación $y = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_m u_m$ apagamos todas las fuentes menos una a la vez tenemos que la señal y producida únicamente por la fuente u_k , que llamaremos y_k , es:

$$y_k = a_k u_k$$

y por lo tanto la señal total será:

$$y = \sum_{k=1}^m y_k = \sum_{k=1}^m a_k u_k$$

Esto nos muestra que es posible calcular la respuesta del circuito para cada fuente (apagando las demás) y luego sumar el resultado proporcionado por cada fuente.

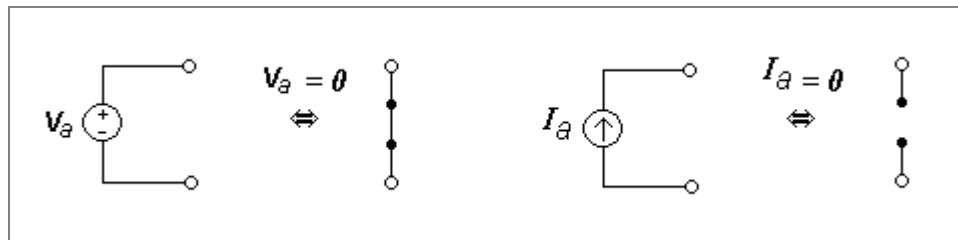


Figura 4-1

Para esto se procede representar todas las fuentes menos una a cero (las de voltaje como un corto circuito y las de como un circuito abierto) y calcular la señal para el circuito resultante. Es evidente que al cambiar las fuentes la topología del circuito cambia cada vez que calcule para cada fuente k .

Ejemplo 4-1. Voltaje de nodo como combinación lineal.

Para el siguiente circuito el voltaje de nodo del nodo B representa la variable de salida y del sistema lineal de la forma general $y = a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_mu_m$.

- Encontrar el valor de V_B .
- Encontrar los valores de $u_1 \dots u_m$ y de $a_1 \dots a_m$.

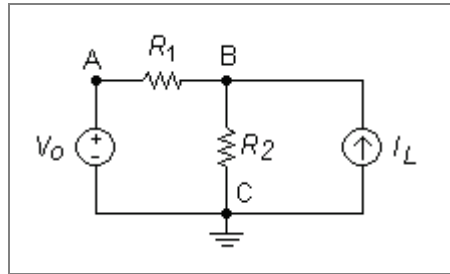


Figura 4-2

Solución

Parte a)

En el capítulo de las Leyes de Kirchoff se calculó el voltaje V_B para este circuito usando KCL con el siguiente resultado:

$$V_B = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) V_O + \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) I_L$$

Parte b)

Dado que la variable de salida y en este caso es V_B por comparación entre la ecuación anterior y $y = a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_mu_m$ se tiene:

$$\begin{aligned} y &= V_B \\ u_1 &= V_O \\ u_2 &= I_L \\ a_1 &= \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \\ a_2 &= \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) \end{aligned}$$

Ejemplo 4-2. Superposición.

Para el circuito de la Figura 4-3(a) calcular V_B usando superposición.

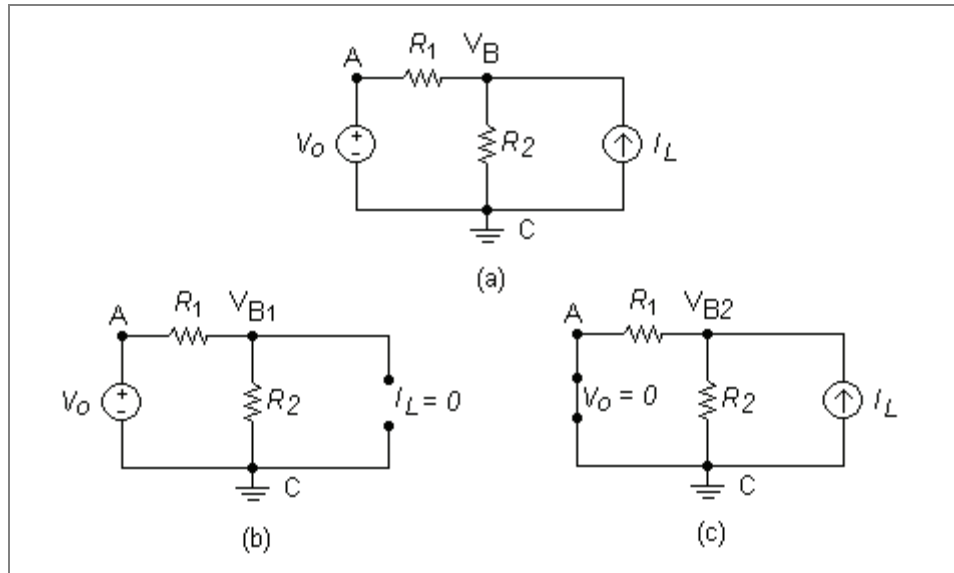


Figura 4-3

Solución

Para calcular V_B se procede a dejar una sola fuente y ver su influencia en el nodo B, esto para cada una de las fuentes. Primero lo hacemos dejando prendida la fuente de voltaje y luego la fuente de corriente:

a) Dejando la fuente de voltaje V_O y apagando todas las demás (en este caso solo hay una que apagar, pero si hubiera más se apagarían las demás) tenemos una nueva topología mostrada en la figura (b), en la cual por divisor de voltaje tenemos:

$$V_{B1} = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) V_O$$

b) Dejando la fuente de corriente I_L y apagando las demás fuentes, y dado que ahora en la nueva topología R_1 y R_2 están en paralelo, tenemos:

$$V_{B2} = \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) I_L$$

Por el teorema de superposición el valor de V_B será:

$$V_B = V_{B1} + V_{B2}$$

$$V_B = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) V_O + \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) I_L$$

4.3. TRANSFORMACIÓN DE FUENTES

Las fuentes de voltaje (fuente ideal con resistencia serie) conectadas en serie se pueden reemplazar por una fuente de voltaje equivalente (fuente ideal equivalente

con resistencia serie equivalente) correspondiente a la suma algebraica de las fuentes ideales y a la suma de las resistencias en serie.

Similamente para las fuentes de corriente (fuente ideal con resistencia paralelo) conectadas en paralelo se pueden reemplazar por una fuente de corriente equivalente (fuente ideal equivalente con resistencia paralelo equivalente) correspondiente a la suma algebraica de las fuentes ideales y a la resistencia paralelo equivalente.

Ejemplo 4-3. Transformación de fuentes de voltaje.

Para el circuito de la Figura 4-4(a) encontrar una fuente equivalente de voltaje a la izquierda de los nodos a y b, como se muestra en la Figura 4-4 (b).

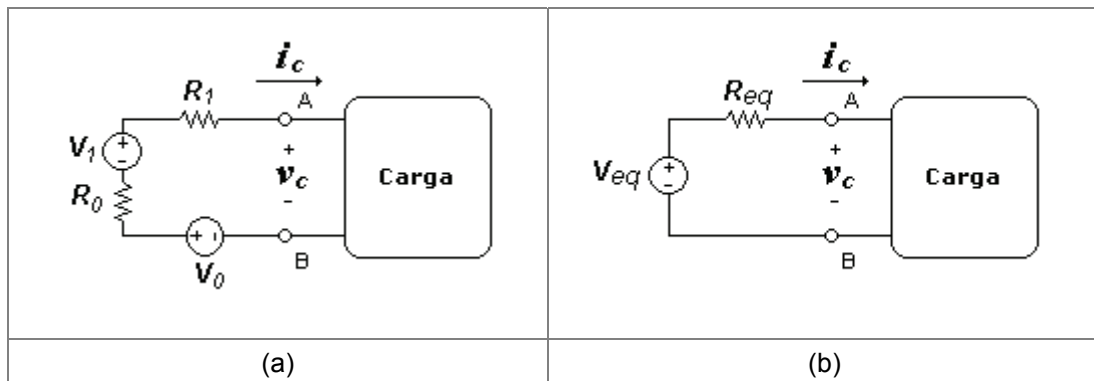


Figura 4-4

Solución

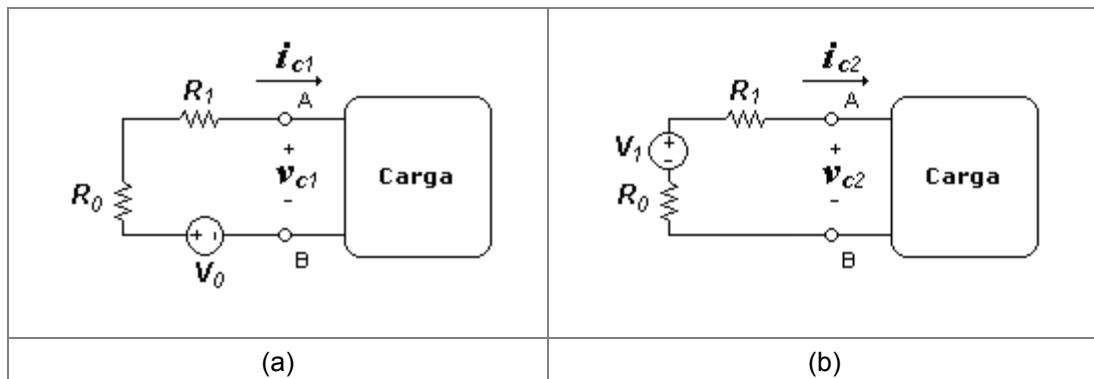


Figura 4-5

Usando superposición podemos ver el efecto de cada fuente sobre la carga, de forma tal que podamos calcular el voltaje y la corriente sobre la carga como el aporte de cada fuente.

Aplicando KVL en el circuito de la Figura 4-5(a) tenemos:

$$-v_0 + i_{c1}(R_0 + R_1) + v_{c1} = 0$$

Aplicando KVL en el circuito de la Figura 4-5 (b) tenemos:

$$-v_1 + i_{c2}(R_0 + R_1) + v_{c2} = 0$$

Sumandos estas dos ecuaciones tenemos:

$$-(v_1 + v_2) + (i_{c1} + i_{c2})(R_0 + R_1) + (v_{c1} + v_{c2}) = 0$$

Por superposición tenemos que $v_c = v_{c1} + v_{c2}$ y que $i_c = i_{c1} + i_{c2}$, de manera que al reemplazarlo en la ecuación anterior tenemos:

$$-(v_1 + v_2) + i_c(R_0 + R_1) + v_c = 0$$

La ecuación del circuito de la Figura 4-4 (b) que corresponde a la fuente equivalente es:

$$-v_{eq} + i_c(R_{eq}) + v_c = 0$$

Lo que nos lleva a concluir por comparación que el voltaje y la resistencia equivalente son:

$$v_{eq} = v_1 + v_2$$

$$R_{eq} = R_0 + R_1$$

4.4. TEOREMA DE TRANSFORMACIÓN ENTRE FUENTES DE VOLTAJE Y CORRIENTE

Un circuito de dos terminales consistente de una resistencia finita R , diferente de cero, en serie con una fuente de voltaje independiente V_a es equivalente a un circuito de dos terminales consistente en la misma resistencia R en paralelo con una fuente de corriente independiente de valor $I_b = V_a/R$.

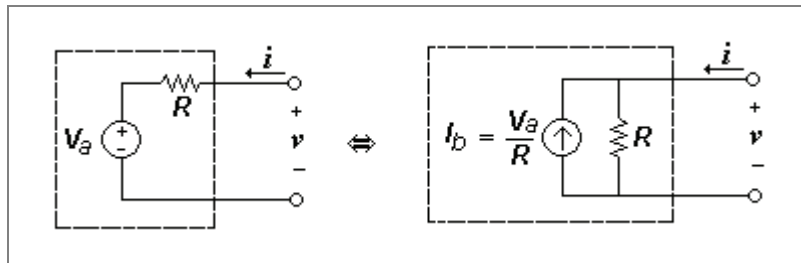


Figura 4-6

Se puede ver que esto es válido al hacer las ecuaciones de mallas y nodos y verificar que en cada caso es igual a: $v = Ri + V_a$

Otra manera de verlo:

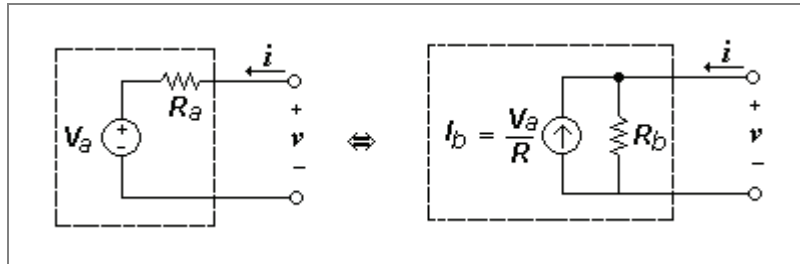


Figura 4-7

Haciendo la malla para el circuito de la fuente de voltaje tenemos:	Haciendo el nodo para el circuito de la fuente de corriente tenemos:
$-V_a - iR_a + v = 0$ $i = \frac{v - V_a}{R_a}$	$I_b + i - \frac{v}{R_b} = 0$
Reemplazando i :	$I_b + \frac{v - V_a}{R_a} - \frac{v}{R_b} = 0$
	$I_b - \frac{V_a}{R_a} + v \left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b} \right) = 0$
El término $I_b - \frac{V_a}{R_a}$ es independiente de la carga, mientras que v puede variar de acuerdo a lo que se conecte a los terminales de salida, de manera que el término $v \left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b} \right)$ debe ser cero, lo cual ocurre si:	$R_a = R_b = R$
Así tenemos:	$I_b - \frac{V_a}{R} = 0$ $\boxed{I_b = \frac{V_a}{R}} \text{ con } \boxed{R_a = R_b = R}$

En el caso de fuentes dependientes o controladas el teorema sigue siendo válido a condición de que la variable controladora (voltaje o corriente) no se modifique con la transformación de fuentes.

Ejemplo 4-4. Transformación de fuentes de voltaje y corriente.

Para el circuito Figura 4-8(a) calcular V_B usando la transformación de fuentes propuestas en las figuras (b) y (c).

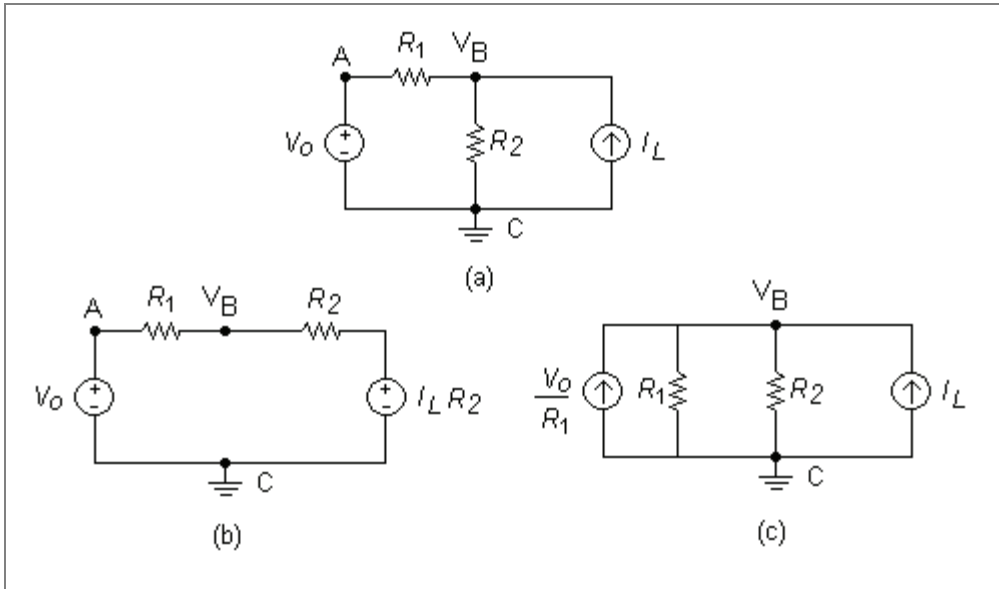


Figura 4-8

Solución

En la figura (b) se convirtió la fuente de corriente en una de voltaje, lo cual facilita el cálculo de mallas, mientras que en la figura (c) se convirtió la fuente de voltaje en una de corriente, lo cual facilita el cálculo por nodos.

Nota: en la figura (c) el nodo A ya no existe.

Método figura (b):

KVL para esta malla nos queda como sigue:

$$\begin{aligned}
 V_{CA} + V_{AB} + V_{BC} &= 0 \\
 -V_O + I_1 R_1 + I_1 R_2 + (I_L R_2) &= 0 \\
 I_1 &= \frac{V_O - I_L R_2}{R_1 + R_2} \\
 V_B = V_O - I_1 R_1 &= V_O - \left(\frac{V_O - I_L R_2}{R_1 + R_2} \right) R_1 \\
 V_B &= \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) V_O + \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) I_L
 \end{aligned}$$

Que corresponde al mismo resultado calculado anteriormente por el método de superposición.

Método figura (c):

KCL para el nodo B nos queda como sigue:

$$\frac{V_O}{R_1} + I_L = \frac{V_B}{R_1} + \frac{V_B}{R_2} = V_B \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = V_B \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right)$$

$$V_B = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) V_O + \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) I_L$$

Como se puede apreciar en este caso el cálculo es aún más sencillo.

Ejemplo 4-5. Transformación de fuentes de voltaje y corriente.

Para el circuito Figura 4-9(a) calcular V_A usando la transformación de fuentes para tener un circuito de un asola malla.

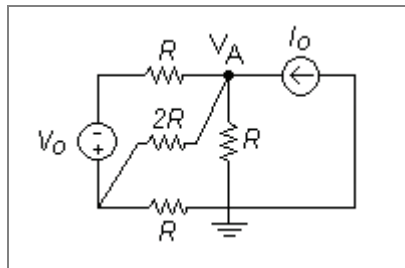


Figura 4-9

Solución

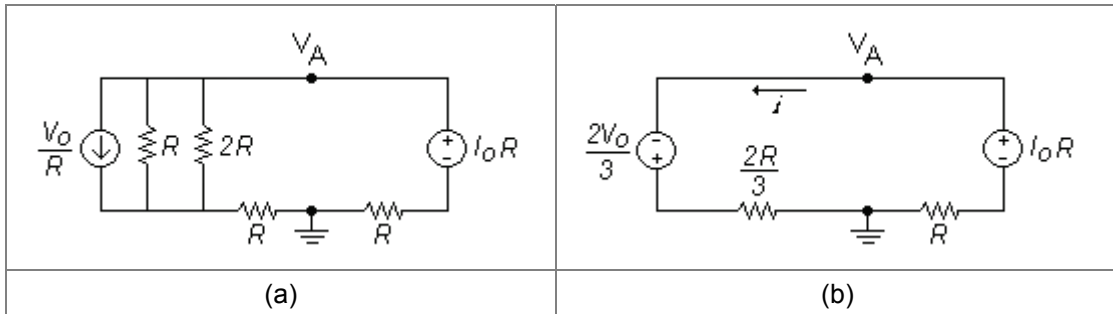


Figura 4-10

Como el voltaje V_A es un voltaje de nodo, respecto a la tierra, es muy importante no perder la tierra al final de las transformaciones. La Figura 4-16(a) muestra la primera transformación de la fuente de voltaje en fuente de corriente por un lado, y la fuente de corriente en fuente de voltaje para ir formando la malla. En la Figura 4-16(b) se calcula el paralelo de las resistencias la lado de la fuente de corriente y luego se convierte en fuente de voltaje para concluir con una sola malla.

Nótese que en la Figura 4-16(a) las dos resistencias inferiores no se han sumado en serie, pues si se hiciera esto se perdería la tierra.

Ahora calculamos la corriente de la malla y luego el voltaje en el nodo A.

$$-\frac{2V_O}{3} + i \left(\frac{2R}{3} + R + R \right) - R I_O = 0$$

$$i\left(\frac{8R}{3}\right) = \frac{2V_o}{3} + RI_o$$

$$i = \frac{V_o}{4R} + \frac{3I_o}{8}$$

$$V_A = I_oR + R \cdot i = I_oR + R\left(\frac{V_o}{4R} + \frac{3I_o}{8}\right)$$

$$V_A = \frac{V_o}{4} + \frac{11RI_o}{8}$$

Ejemplo 4-6. Transformación de fuentes de voltaje y corriente.

Encontrar el voltaje en el nodo A por los siguientes métodos:

- Por transformación de fuentes, para convertir el circuito de cuatro nodos en uno de un solo nodo.
- Por superposición.

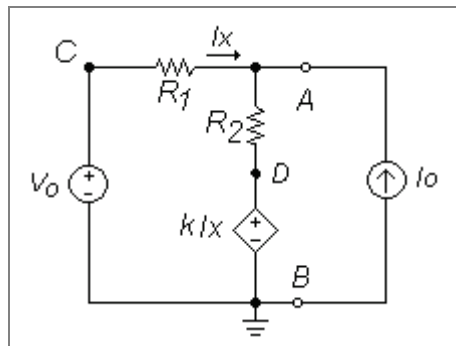


Figura 4-11

Solución

Parte a)

Transformamos la fuente de voltaje V_o en fuente de corriente teniendo cuidado de no perder la variable controladora I_x , la cual representa la corriente que entra al nodo A desde dicha fuente.

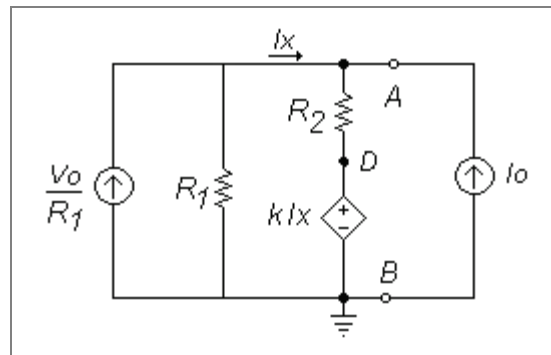


Figura 4-12

Luego convertimos en fuente de corriente la fuente controlada:

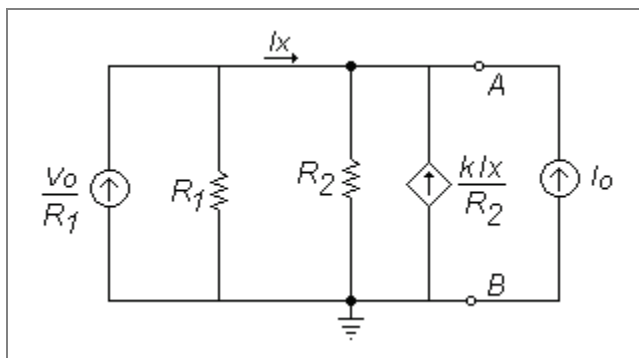


Figura 4-13

$$I_x = \left(\frac{V_o}{R_1} - \frac{V_A}{R_1} \right)$$

KCL en Nodo A:

$$I_x + \left(\frac{-V_A}{R_2} \right) + \frac{k \cdot I_x}{R_2} + I_o = 0$$

$$I_o + I_x \left(\frac{R_2 + k}{R_2} \right) = \frac{V_A}{R_2}$$

$$I_o + \left(\frac{V_o}{R_1} - \frac{V_A}{R_1} \right) \left(\frac{R_2 + k}{R_2} \right) = \frac{V_A}{R_2}$$

$$I_o + V_o \left(\frac{R_2 + k}{R_1 R_2} \right) = \frac{V_A}{R_2} + V_A \left(\frac{R_2 + k}{R_1 R_2} \right) = V_A \left(\frac{R_1 + R_2 + k}{R_1 R_2} \right)$$

$$V_A = \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + k} \right) \left(I_o + V_o \left(\frac{R_2 + k}{R_1 R_2} \right) \right)$$

$$V_A = \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + k} \right) I_o + \left(\frac{R_2 + k}{R_1 + R_2 + k} \right) V_o$$

Parte b)

Por superposición primero dejamos prendida la fuente de voltaje V_o , apagando las demás, y calculamos V_A' .

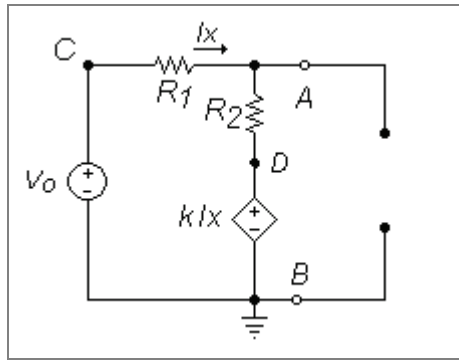


Figura 4-14

Hacemos la malla:

$$-V_o + I_x(R_1 + R_2) + k \cdot I_x = 0$$

$$I_x = \frac{V_o}{R_1 + R_2 + k}$$

$$V_A' = V_o - R_1 I_x = V_o - R_1 \left(\frac{V_o}{R_1 + R_2 + k} \right) = \left(\frac{R_2 + k}{R_1 + R_2 + k} \right) V_o$$

Luego dejamos prendida la fuente de corriente I_o , apagando las demás, y calculamos V_A'' .

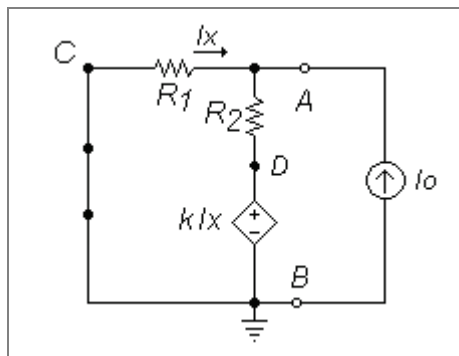


Figura 4-15

Hacemos el nodo A:

$$I_x = \frac{-V_A''}{R_1}$$

$$I_x + \frac{k \cdot I_x - V_A''}{R_2} + I_o = 0$$

$$\frac{-V_A''}{R_1} - \frac{V_A''}{R_1} \cdot \frac{k}{R_2} - \frac{V_A''}{R_2} + I_o = 0$$

$$V_A'' \left(\frac{1}{R_1} + \frac{k}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2} \right) = I_o$$

$$V_A'' \left(\frac{R_1 + R_2 + k}{R_1 R_2} \right) = I_o$$

$$V_A'' = \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + k} \right) I_o$$

Finalmente superponemos las dos respuestas:

$$V_A = V_A' + V_A''$$

$$V_A = \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + k} \right) I_o + \left(\frac{R_2 + k}{R_1 + R_2 + k} \right) V_o$$

Ejemplo 4-7. Transformación de fuentes con fuente controlada.

Para el circuito de la Figura 4-16:

- Convertir las fuentes de voltaje en fuentes de corriente.
- Encontrar una fuente equivalente de voltaje entre a y b.

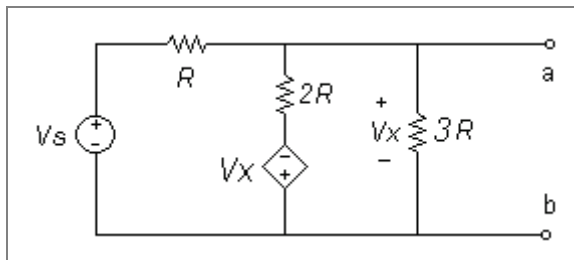


Figura 4-16

Solución

Parte a)

Primero convertimos a fuentes de corriente cada fuente de voltaje con su respectiva resistencia, teniendo en cuenta el sentido de la fuente de corriente y sin perder la variable controladora (que aquí está definida con la caída de voltaje entre los nodos a y b):

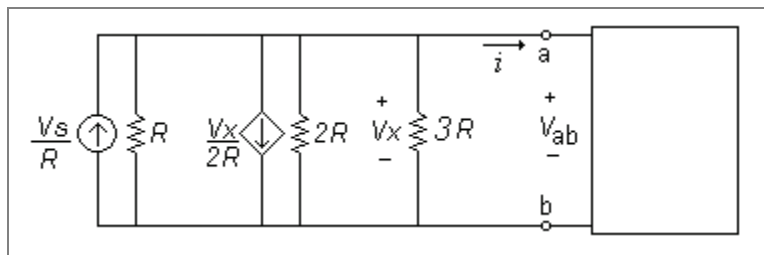


Figura 4-17

Luego hace el paralelo de las tres resistencias:

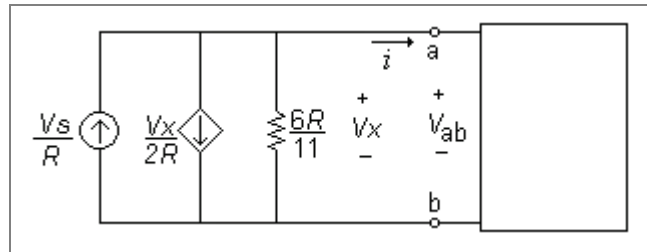


Figura 4-18

Parte b)

Queremos llegar a un modelo de fuente de voltaje en serie con resistencia como en la Figura 4-19. Eso implica que la relación entre V_{ab} e i de este circuito debe ser la misma que la del circuito de la Figura 4-18.

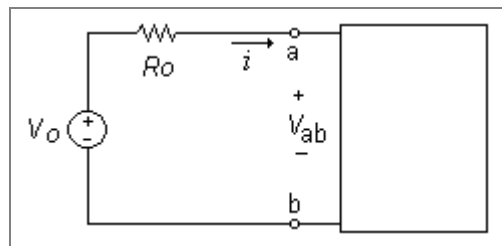


Figura 4-19

Para este circuito aplicando KVL tenemos: $V_{ab} = V_o - i \cdot R_o$.

Para el circuito de la Figura 4-18 aplicando KCL en el nodo a tenemos:

$$V_s/R - V_{ab}/2R - i - V_{ab}/(6R/11) = 0$$

Despejando V_{ab} :

$$V_{ab} = 3V_s/7 - i (3R/7)$$

Por tanto por comparación tenemos $V_o = 3V_s/7$ y $R_o = 3R/7$.

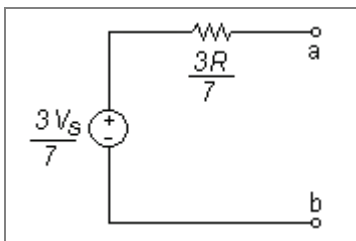


Figura 4-20

4.5. SIMULACIONES

4.5.1. SUPERPOSICIÓN DE FUENTE DC Y AC.

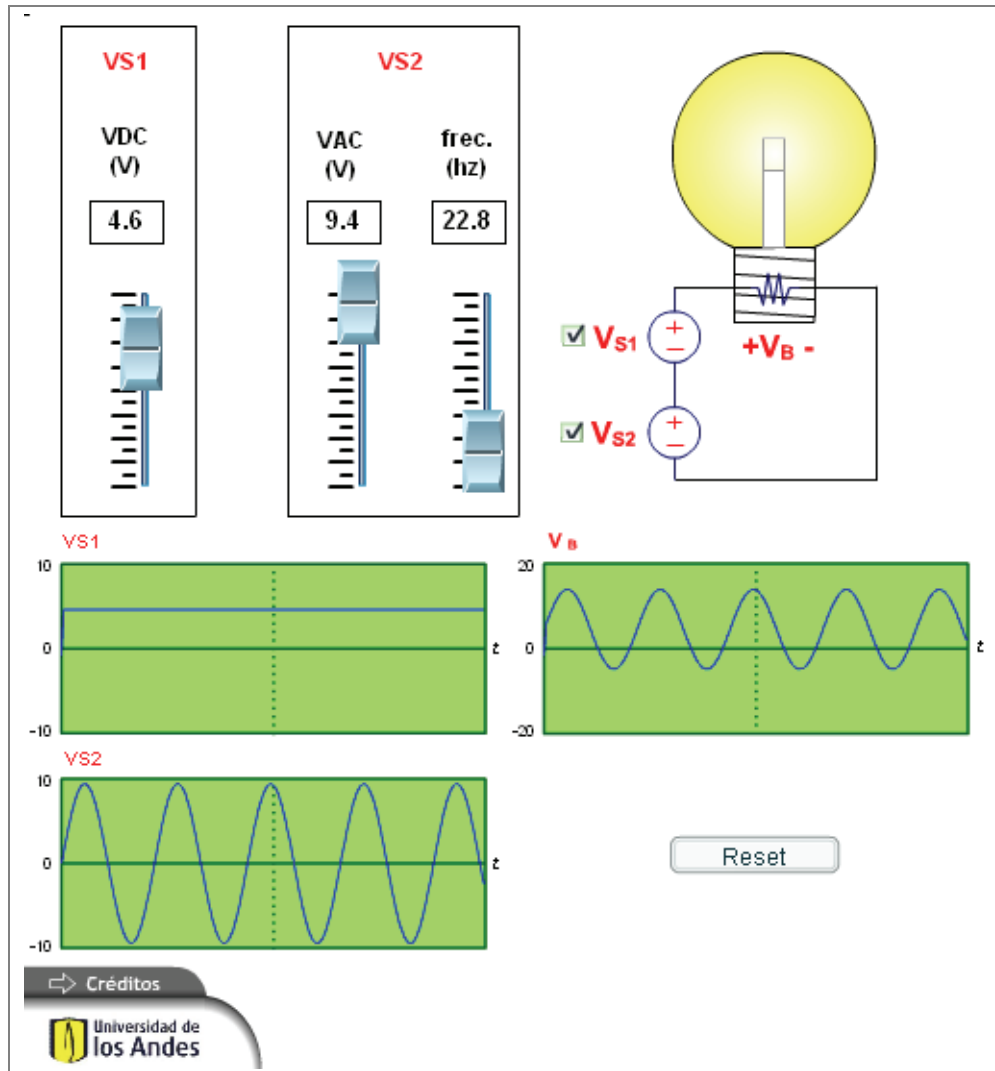


Figura 4-21

Descripción

Esta simulación permite mostrar los conceptos de superposición y homogeneidad en los circuitos lineales a través de la aplicación al circuito de varias fuentes y observando sus efectos en él y como esto es válido para fuentes DC y AC superpuestas.

Uso educativo

Esta simulación se presenta como un complemento a la clase presencial, para estudiantes de primeros semestres de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Mecánica. Una vez los estudiantes manejan los conceptos de linealidad, superposición, transformación de fuentes, los estudiantes interactúan con el recurso prendiendo y apagando cada una de las fuentes y estableciendo sus valores para observar los efectos que se producen en cada caso y así comprender el concepto de linealidad.