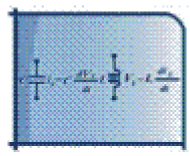
7. CAPACITANCIA E INDUCTANCIA



7.1. INTRODUCCIÓN

El elemento pasivo de dos terminales que hemos visto hasta el momento, esto es la Resistencia, presenta un comportamiento lineal entre su voltaje y corriente. Esto produce ecuaciones algebraicas igualmente lineales. Ahora vamos a estudiar dos elementos para los cuales las relaciones lineales no se dan entre voltaje y corriente sino entre una de estas variables y la derivada de la otra. Esto va a producir ecuaciones diferenciales que serán igualmente lineales. Estos elementos son la capacitancia y la inductancia.

Aunque capacitancia e inductancia son elementos pasivos tienen la propiedad de almacenar energía, y por tanto se dice que pueden tener condiciones iniciales para las variables de voltaje y corriente, esto en función de la energía que tengan almacenada. La capacitancia almacena la energía en un campo eléctrico mientras que la inductancia almacena la energía en un campo magnético.

7.2. CAPACITANCIA

La capacitancia es un elemento pasivo de dos terminales que almacena cargas eléctricas entre un par de placas separadas por un dieléctrico creando una diferencia de potencial entre las dos placas. Esa diferencia de potencial creada por la acumulación de las cargas tiene una relación directa con la energía almacenada por la capacitancia. La Figura 7-1 muestra el símbolo utilizado para representar este elemento y la relación entre voltaje y corriente de acuerdo a la convención pasiva.

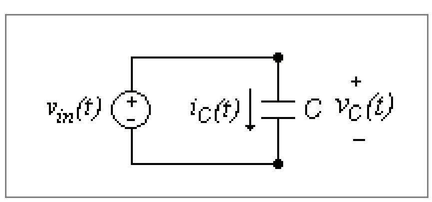


Figura 7-1

Experimentalmente se encontró que la corriente instantánea en la capacitancia es directamente proporcional a la variación del voltaje en el tiempo. La constante de proporcionalidad de esta relación se conoce como la Capacitancia *C*, y tiene unidades de Faradios F:

$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$$

La ecuación anterior nos muestra una relación lineal entre la corriente y la derivada del voltaje, tal como mencionamos en la introducción. El valor de la Capacitancia *C* de cada elemento depende de varios factores, ya que existen distintos tipos de capacitancias, en formas (cuadradas, redondas, cilíndricas) y materiales dieléctricos (aire, poliéster, cerámica, electrolítico, papel). En general los valores de las capacitancias son muy pequeños, como se muestra en la Tabla 7-1.

Tabla 7-1. Aplicaciones de las capacitancias

Uso	Capacitancia
Filtros de señales	Picofaradios (pF)
Reguladores y rectificadores de voltaje	Microfaradios (μF)
Motores	Milifaradios (mF)

En el caso sencillo de una capacitancia de placas paralelas la capacitancia C está dada por la permitividad del dieléctrico ε, el área de las placas A y la distancia entre las placas d:

$$C = \varepsilon\frac{A}{d}$$

De la relación entre voltaje y corriente podemos ver que al integrar en ambos lados obtenemos la carga almacenada en la capacitancia en cualquier instante de tiempo:

$$q_C(t) = Cv_C(t)$$

Así mismo podemos calcular el voltaje a partir de la corriente que circula por la capacitancia:

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)d\tau$$

Esta ecuación se puede partir en dos integrales: una entre menos infinito y un tiempo to y otra entre to y t. La primera integral representa entonces el voltaje inicial en to (asociado a la carga inicial y a la energía almacenada en la capacitancia en to), para lo cual se asume que en menos infinito la carga y el voltaje valen cero pues la capacitancia aún no existía:

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{to} i_C(\tau)d\tau + \frac{1}{C}\int_{to}^{t} i_C(\tau)d\tau$$

$$v_C(t) = \left(v_C(to) - v_C(-\infty)\right) + \frac{1}{C}\int_{to}^{t} i_C(\tau)d\tau$$

$$v_C(t) = v_C(to) + \frac{1}{C}\int_{to}^{t} i_C(\tau)d\tau$$

7.2.1. CONTINUIDAD DEL VOLTAJE Y CAMBIOS BRUSCOS

De la expresión del voltaje en la capacitancia en función de la corriente $v_C(t) = v_C(to) + \frac{1}{C}\int_{to}^{t} i_C(\tau)d\tau$ vemos que aunque la corriente sea una función discontinua, el voltaje será continuo. Eso implica que la capacitancia se opone a los cambios de voltaje, aún cuando la corriente tenga cambios bruscos.

Por otra parte dado que $i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$ un cambio brusco en el voltaje aplicado a la capacitancia tendrá como efecto una corriente demasiado grande, la cual trata de oponerse al cambio del voltaje para mantener la continuidad del mismo.

7.2.2. POTENCIA Y ENERGÍA EN LA CAPACITANCIA

Recordemos que la potencia instantánea es el producto del voltaje por la corriente en cualquier instante de tiempo. Así la potencia en la capacitancia será:

$$p_C(t) = v_C(t)\cdot i_C(t) = C\cdot v_C(t)\cdot\frac{dv_C(t)}{dt}$$

7.2.3. ENERGÍA INSTANTÁNEA ALMACENADA

La energía instantánea almacenada en un tiempo t, esto es entre el tiempo menos infinito y t será:

$$W_C(t) = \int_{-\infty}^{t} p_C(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} v_C(t)\cdot i_C(t)d\tau = \int_{-\infty}^{t} C\cdot v_C(\tau)\cdot\frac{dv_C(\tau)}{d\tau}d\tau = C\int_{-\infty}^{t} v_C(\tau)\cdot\frac{dv_C(\tau)}{d\tau}d\tau$$

$$W_C(t) = C\int_{v_c(-\infty)}^{v_c(t)}\cdot v_C\cdot dv_C = \frac{1}{2}C\cdot v_C{}^2\Big|_{v_c(-\infty)}^{v_c(t)} = \frac{1}{2}C\cdot v_C(t)^2 - \frac{1}{2}C\cdot v_C(-\infty)^2$$

$$\boxed{W_C(t) = \frac{1}{2}C\cdot v_C(t)^2}$$

Aquí hemos asumido nuevamente que en el tiempo menos infinito el voltaje, la carga o la energía almacenada eran cero.

7.2.4. ENERGÍA ALMACENADA EN UN INTERVALO DE TIEMPO

La energía almacenada en un intervalo de tiempo [t_0, t_1] será:

$$W_C(t_0,t_1) = C\int_{v_c(t_0)}^{v_c(t_1)}\cdot v_C\cdot dv_C = \frac{1}{2}C\cdot v_C(t)^2\Big|_{v_c(t_0)}^{v_c(t_1)} = \frac{1}{2}C\cdot\left[v_C(t_1)^2 - v_C(t_0)^2\right]$$

$$\boxed{W_C(t_0,t_1) = \frac{1}{2}C\cdot\left[v_C(t_1)^2 - v_C(t_0)^2\right]}$$

Como se puede apreciar en la ecuación anterior la energía almacenada en un intervalo de tiempo no depende de lo que pase con el voltaje en ese intervalo de tiempo, sino de los valores inicial y final del voltaje. Esto nos permite encontrar un resultado muy interesante cuando aplicamos un voltaje de tipo AC a una capacitancia en un periodo de tiempo T [t_0, t_0+T]:

$$W_C(t_0, t_0 + T) = \frac{1}{2} C \cdot \left[v_C(t_0 + T)^2 - v_C(t_0)^2 \right]$$

Como la función AC es periódica tenemos que $v_C(t_0 + T) = v_C(t_0)$, así que:

$$W_C(t_0, t_0 + T) = \frac{1}{2} C \cdot \left[v_C(t_0 + T)^2 - v_C(t_0)^2 \right] = 0$$

Esto nos muestra que una capacitancia es un elemento pasivo que no tiene pérdidas de potencia: en una parte del ciclo AC absorbe potencia, pero en la otra parte del ciclo la suministra (devuelve la energía que almacenó sin perderla).

7.2.5. RESPUESTA DC Y AC DE LA CAPACITANCIA EN ESTADO ESTABLE

Una capacitancia en estado estable para una señal DC se comporta como un circuito abierto, mientras que para una señal AC de muy alta frecuencia se comporta como un circuito cerrado.

Para el caso de un circuito resistivo cualquiera con una capacitancia es posible aislar la capacitancia y calcular el equivalente de Thévenin de las fuentes y resistencias, obteniendo un circuito serie con una fuente de voltaje Vt, una resistencia Rt y la capacitancia C, como se muestra en la Figura 7-8.

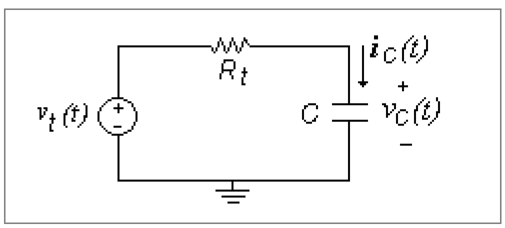


Figura 7-2

Para encontrar la respuesta de este circuito, esto es Vc en función del tipo de señal de entrada formalmente deberíamos resolver la ecuación diferencial resultante, sin embargo como eso es tema del siguiente capítulo, por el momento vamos a ver de manera descriptiva qué pasa con señales de de entrada de tipo DC y señales de muy alta frecuencia.

Para el caso de señal DC las cargas negativas (electrones libres) cercanos al terminal positivo de la fuente se ven atraídas hacia la fuente, generando una corriente i_c positiva en el sentido que se muestra en la Figura 7-8. Al mismo tiempo las cargas que parten del condensador hacia la fuente dejan unos espacios sin cargas negativas, lo cual hace que la placa se cargue de manera positiva, respecto a la carga inicial. Simultáneamente las cargas atraviesan la fuente y se dirigen hacia el terminal negativo de la capacitancia. Como el dieléctrico no permite que pasen cargas de una placa a la otra, las cargas se almacenan en el terminal negativo, aumentando así la carga negativa de dicha placa. Esto crea una diferencia de potencial entre la carga positiva de una placa y la negativa de la otra placa. Esta caída del voltaje que se produce a medida que se van acumulando las cargas, se iguala al voltaje de la fuente Vt, al punto que al ser iguales deja de circular corriente y se detiene el flujo de cargas. Así, a largo plazo (en estado estable) el condensador queda cargado y con una caída de voltaje dada, pero sin que circule corriente. Por este motivo se dice que la capacitancia se comporta como un circuito abierto para señal DC en estado estable, tal como se muestra en la Figura 7-3.

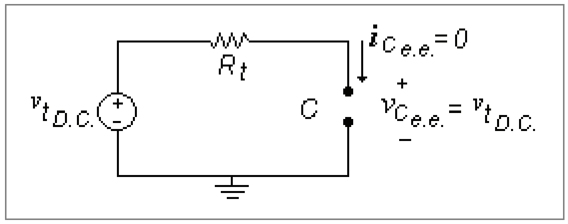


Figura 7-3

Para el caso AC ocurre algo similar, pero ahora la corriente o las cargas van en un sentido primero y en el otro después, de manera alternada. Esto hace que las placas se carguen y se descarguen permanentemente, al punto que nunca se cargan y no se bloquea el paso de corriente como en el caso D.C. Si la frecuencia de la señal A.C. es muy grande las placas permanecerán descargadas, de manera que no se genera una caída del voltaje en ellas, dando como resultado un voltaje de cero en el condensador, como si hubiera un corto circuito. En este caso podrá existir una corriente del condensador no nula.

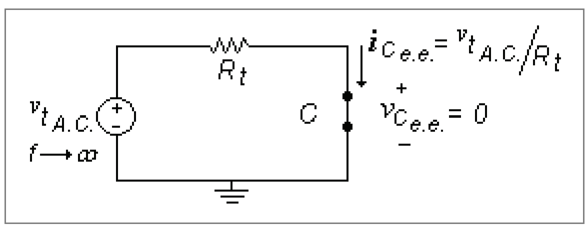


Figura 7-4

7.2.6. CARGA Y DESCARGA DE LA CAPACITANCIA

La Figura 7-3 mostraba el comportamiento de la capacitancia en estado estable ante una señal de tipo D.C., pero ¿qué ocurre si abrimos el circuito en alguna parte en un tiempo to? La capacitancia no se cargará al máximo posible y el voltaje en ella no será el voltaje de Thévenin Vt. Ahora el valor del voltaje será un valor dado $Vc(t_o)$, y permanecerá en ese valor por tiempo indefinido.

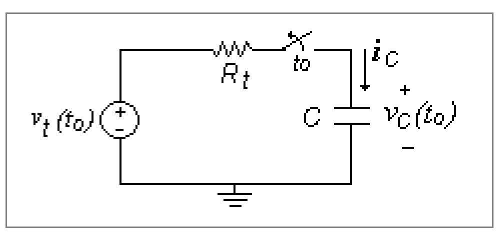


Figura 7-5

Ahora la capacitancia cargada a un valor dado, que genera un voltaje $Vc(t_o)$, la conectamos en un tiempo posterior t_1 a una resistencia Rt como se muestra en la Figura 7-9. Dado que existen cargas almacenadas en la capacitancia y que existe una diferencia de voltaje en la capacitancia, y por tanto en la resistencia, se genera una corriente contraria a la que se tenía en el proceso de carga. Esta corriente al paso por la resistencia disipa la energía que estaba almacenada en la capacitancia en forma de calor, al punto que no hay más energía almacenada. Como las cargas almacenadas en una placa pasan a la otra, hasta que se igualan, el voltaje en la capacitancia se vuelve cero y deja de circular corriente.

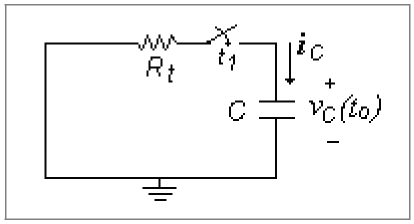


Figura 7-6

Ejemplo 7-1 . Calculo de Thévenin para análisis de capacitancias.

Para el circuito de la Figura 7-7 encontrar:

a. El voltaje y la corriente en la capacitancia en estado estable si $vo(t) = 20V$.

b. La amplitud del voltaje en las resistencias si la señal de entrada es de tipo AC con una amplitud de 10V y una frecuencia muy alta $(f \to \infty)$ si C = 10mF y R = 1kΩ.

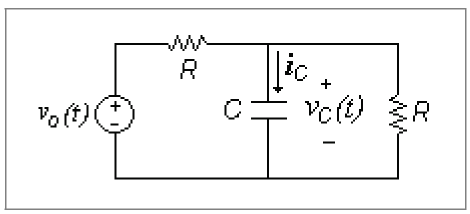
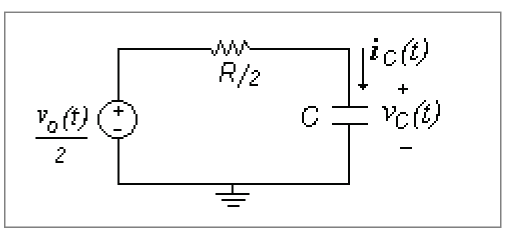


Figura 7-7

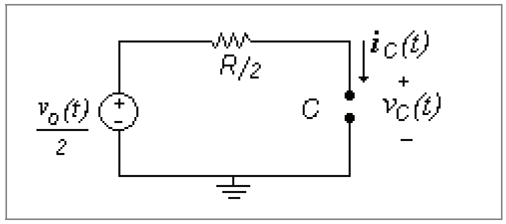
Solución

Parte a)

La siguiente figura muestra el equivalente de Thévenin del circuito resistivo (resistencias y fuente).



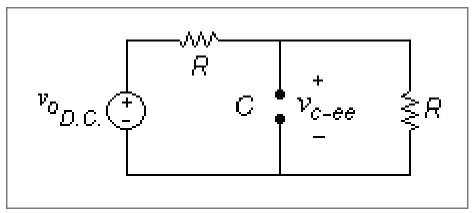
En estado estable la capacitancia se comporta para una señal DC como un circuito abierto.



De manera que el voltaje en la capacitancia será el de la fuente equivalente vista por la capacitancia:

$$v_{C-ee} = \frac{20V}{2} = 10V$$

Otra manera de verlo es utilizar directamente el modelo D.C. en estado estable de la capacitancia y reemplazarlo en el circuito original, tal como se muestra en la siguiente figura:



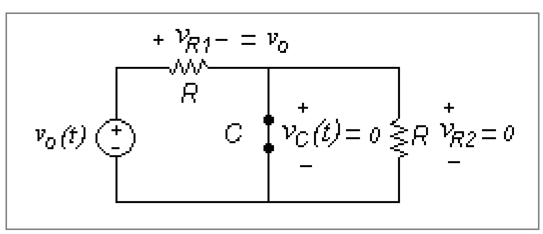
En este caso el voltaje en la capacitancia es el mismo de la resistencia de la derecha, el cual se puede calcular con un divisor de voltaje:

$$v_{C-ee} = v_{o\,D.C.}\left(\frac{R}{R+R}\right) = 20V\left(\frac{1}{2}\right) = 10V$$

La corriente en la capacitancia en estado estable para señal D.C. será cero pues el circuito está abierto en la capacitancia.

Parte b)

La siguiente figura muestra el comportamiento de corto circuito para la capacitancia ante una señal de alta frecuencia.



En este caso el voltaje del condensador es cero. Por tanto el voltaje de la resistencia de la derecha v_{R2}, que está en paralelo con la capacitancia será 0V y su corriente será 0A, ya que toda la corriente pasa por la capacitancia. De manera que la resistencia superior experimenta toda la caída del voltaje de la fuente y el voltaje en ella tendrá una amplitud de 10V. La amplitud de la corriente en la fuente, la resistencia superior y la capacitancia será: 10V/1kΩ = 1mA.

7.2.7. PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA CARGA

En un circuito con varias capacitancias la carga total almacenada en todas las capacitancias se mantiene constante en cualquier instante de tiempo. Esto es válido incluso en circuitos con cambios bruscos o con interruptores. De acuerdo a KCL la suma de corrientes de que entran a un nodo es igual a cero $\sum_{k=1}^{m} i_{kn}(t) = 0$, de manera que si integramos la ecuación de KCL en un nodo tendremos que la suma algebraica de cargas que entran en un nodo también es igual a cero:

$$\sum_{k=1}^{m} q_{kn}(t) = 0$$

Usando la relación entre carga y voltaje tenemos:

$$\sum_{k=1}^{m} C_{kn} V_{kn}(t) = 0$$

Como esta expresión es válida para cualquier instante de tiempo, lo será en particular para dos tiempos t_0 y t_1:

$$\sum_{k=1}^{m} C_{kn} V_{kn}(t_0) = \sum_{k=1}^{m} C_{kn} V_{kn}(t_1) = 0$$

En el caso de cálculos de condiciones iniciales en circuitos con cambios bruscos e interruptores es común analizar lo que ocurre un instante de tiempo antes y después de un tiempo dado to. Esto es lo que llamaremos el intervalo entre cero menos y cero más $\left[t_0^-, t_0^+\right]$. Así la relación anterior queda:

$$\sum_{k=1}^{m} C_{kn} V_{kn}(t_0^-) = \sum_{k=1}^{m} C_{kn} V_{kn}(t_0^+) = 0$$

7.2.8. EQUIVALENTE DE CAPACITANCIAS EN PARALELO

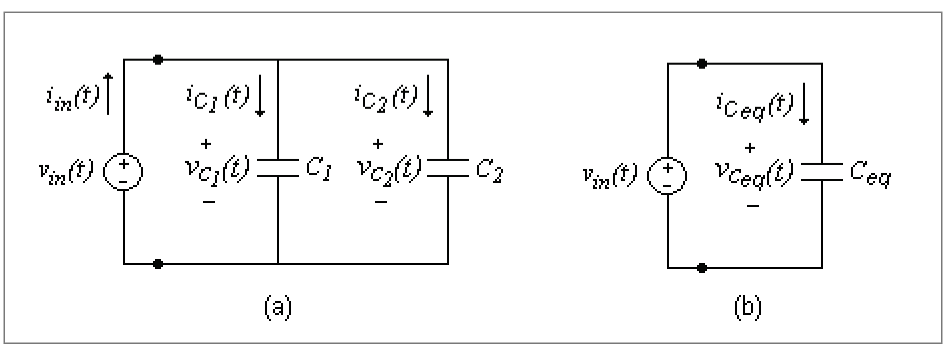


Figura 7-8

La Figura 7-8.a muestra dos capacitancias conectadas en paralelo. En este caso las relaciones entre voltaje y corriente en la fuente de voltaje serán similares a la de una sola capacitancia equivalente como se muestra en la Figura 7-8.b. Para encontrar la capacitancia equivalente Ceq usamos el hecho de que los voltajes en las dos capacitancias y en la fuente son el mismo, por estar en paralelo, además calculamos KCL para la figura a:

$$v_{in}(t) = v_{C1}(t) = v_{C2}(t)$$

$$i_{in}(t) = i_{C1}(t) + i_{C2}(t)$$

$$i_{in}(t) = C_1 \frac{dv_{C1}(t)}{dt} + C_2 \frac{dv_{C2}(t)}{dt} = C_1 \frac{dv_{in}(t)}{dt} + C_2 \frac{dv_{in}(t)}{dt} = \left(C_1 + C_2\right) \frac{dv_{in}(t)}{dt}$$

$$i_{in}(t) = \left(C_1 + C_2\right) \frac{dv_{in}(t)}{dt}$$

Para la figura b tenemos:

$$i_{in}(t) = C_{eq} \frac{dv_{in}(t)}{dt}$$

Comparando las dos últimas ecuaciones se concluye que la capacitancia equivalente paralelo es:

$$\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2}$$

7.2.9. EQUIVALENTE DE CAPACITANCIAS EN SERIE

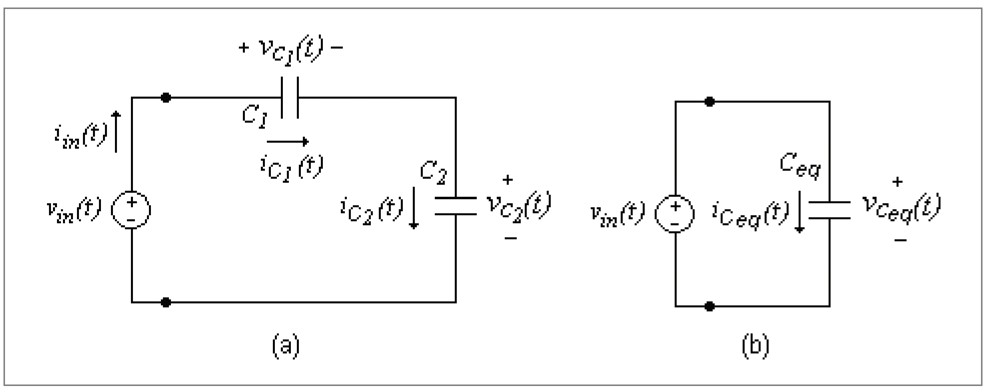


Figura 7-9

La Figura 7-9.a muestra dos capacitancias conectadas en serie. En este caso las relaciones entre voltaje y corriente en la fuente de voltaje serán similares a la de una sola capacitancia equivalente como se muestra en la Figura 7-9.b. Para encontrar la capacitancia equivalente Ceq usamos el hecho de que las corrientes en las dos capacitancias y en la fuente son las mismas, por estar en serie, además calculamos KVL para la figura a:

$$i_{in}(t) = i_{C1}(t) = i_{C2}(t)$$

$$v_{in}(t) = v_{C1}(t) + v_{C2}(t)$$

Derivando la expresión anterior tenemos:

$$\frac{dv_{in}(t)}{dt} = \frac{dv_{C1}(t)}{dt} + \frac{dv_{C2}(t)}{dt}$$

Ahora reemplazamos por la relación de la corriente en la capacitancia $\frac{i_C(t)}{C} = \frac{dv_C(t)}{dt}$:

$$\frac{dv_{in}(t)}{dt} = \frac{i_{C1}(t)}{C_1} + \frac{i_{C2}(t)}{C_2} = \frac{i_{in}(t)}{C_1} + \frac{i_{in}(t)}{C_2} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) i_{in}(t)$$

$$\frac{dv_{in}(t)}{dt} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) i_{in}(t)$$

Para la figura b tenemos:

$$\frac{i_{in}(t)}{C_{in}} = \frac{dv_{in}(t)}{dt}$$

Comparando las dos últimas ecuaciones se concluye que la capacitancia equivalente paralelo es:

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

7.3. INDUCTANCIA

La Inductancia es un elemento pasivo de dos terminales que almacena energía en un campo magnético. De acuerdo a la ley de Faraday la variación de corriente en el tiempo en un conductor induce una caída de voltaje en el mismo. De acuerdo a las ecuaciones de Maxwell una variación de la corriente en el conductor produce un campo magnético variable, que a su vez produce un campo eléctrico variable y por tanto se genera una caída de voltaje variable en el tiempo.

Una inductancia es un elemento especialmente diseñado para tener un efecto inductivo muy grande. Esto se logra enrollando el conductor alrededor de un núcleo. Su aplicación es muy variada: filtros, generadores, motores, transformadores, antenas, etc.

La Figura 7-10 muestra el símbolo utilizado para representar este elemento y la relación entre voltaje y corriente de acuerdo a la convención pasiva.

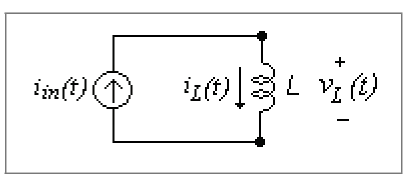


Figura 7-10

Experimentalmente se encontró que el voltaje instantáneo en la inductancia es directamente proporcional a la variación de la corriente en el tiempo. La constante de proporcionalidad de esta relación se conoce como la inductancia *L*, y tiene unidades de Henrios H:

$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

La ecuación anterior nos muestra una relación lineal entre el voltaje y la derivada de la corriente, tal como mencionamos en la introducción. El valor de la inductancia *L* de cada elemento depende de varios factores, ya que existen distintos tipos de inductancias, en formas (solenoides, tiroides, etc.) y materiales para el núcleo (aire, ferromagnético etc.).

En el caso sencillo de una inductancia en forma de solenoide la inductancia L está dada por la permeabilidad de núcleo μ, el número de vueltas N, el área transversal de cada vuelta A y la longitud *l*:

$$L = \mu \frac{N^2 A}{l}$$

Así mismo podemos calcular la corriente a partir del voltaje a través de la inductancia:

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v_L(\tau)d\tau$$

Esta ecuación se puede partir en dos integrales: una entre menos infinito y un tiempo to y otra entre to y t. La primera integral representa entonces la corriente inicial en to (asociado a la energía almacenada en la inductancia en to), para lo cual se asume que en menos infinito la corriente vale cero pues la inductancia aún no existía:

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{to} v_L(\tau)d\tau + \frac{1}{L}\int_{to}^{t} v_L(\tau)d\tau$$

$$i_L(t) = \left(i_L(to) - i_L(-\infty)\right) + \frac{1}{L}\int_{to}^{t} v_L(\tau)d\tau$$

$$i_L(t) = i_L(to) + \frac{1}{L}\int_{to}^{t} v_L(\tau)d\tau$$

7.3.1. CONTINUIDAD DE LA CORRIENTE Y CAMBIOS BRUSCOS

De la expresión de la corriente en la inductancia en función del voltaje $i_L(t) = i_L(to) + \frac{1}{L}\int_{to}^{t} v_L(\tau)d\tau$ vemos que aunque el voltaje sea una función discontinua, la corriente será continua. Eso implica que la inductancia se opone a los cambios de corriente, aún cuando el voltaje tenga cambios bruscos.

Por otra parte dado que $v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$ un cambio brusco en la corriente aplicada a la inductancia tendrá como efecto un voltaje demasiado grande, el cual trata de oponerse al cambio de la corriente para mantener la continuidad de la misma.

7.3.2. POTENCIA Y ENERGÍA EN LA INDUCTANCIA

Recordemos que la potencia instantánea es el producto de la corriente por el voltaje en cualquier instante de tiempo. Así la potencia en la inductancia será:

$$p_L(t) = v_L(t) \cdot i_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \cdot i_L(t)$$

7.3.3. ENERGÍA INSTANTÁNEA ALMACENADA

La energía instantánea almacenada en un tiempo t, esto es entre el tiempo menos infinito y t será:

$$W_L(t) = \int_{-\infty}^{t} p_L(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} v_L(t) \cdot i_L(t)d\tau = \int_{-\infty}^{t} L\frac{di_L(\tau)}{d\tau} \cdot i_L(\tau)d\tau = L\int_{-\infty}^{t} i_L(\tau) \cdot \frac{di_L(\tau)}{d\tau}d\tau$$

$$W_L(t) = L\int_{i_L(-\infty)}^{i_L(t)} \cdot i_L \cdot di_L = \frac{1}{2}L \cdot i_L{}^2\Big|_{i_L(-\infty)}^{i_L(t)} = \frac{1}{2}L \cdot i_L(t)^2 - \frac{1}{2}L \cdot i_L(-\infty)^2$$

$$\boxed{W_L(t) = \frac{1}{2}L \cdot i_L(t)^2}$$

Aquí hemos asumido nuevamente que en el tiempo menos infinito la corriente era cero.

7.3.4. ENERGÍA ALMACENADA EN UN INTERVALO DE TIEMPO

La energía almacenada en un intervalo de tiempo [t_0, t_1] será:

$$W_L(t_0,t_1) = L\int_{i_L(t_0)}^{i_L(t_1)} \cdot i_L \cdot di_L = \frac{1}{2}L \cdot i_L{}^2\Big|_{i_L(t_0)}^{i_L(t_1)} = \frac{1}{2}L \cdot \left[i_L(t_1)^2 - i_L(t_0)^2\right]$$

$$\boxed{W_L(t_0,t_1) = \frac{1}{2}L \cdot \left[i_L(t_1)^2 - i_L(t_0)^2\right]}$$

Como se puede apreciar en la ecuación anterior la energía almacenada en un intervalo de tiempo no depende de lo que pase con la corriente en ese intervalo de tiempo, sino de los valores inicial y final de la corriente. Esto nos permite encontrar un resultado muy interesante cuando aplicamos una corriente de tipo AC a una inductancia en un periodo de tiempo T [t_0, t_0+T]:

$$W_L(t_0,t_0+T) = \frac{1}{2}L \cdot \left[i_L(t_0+T)^2 - i_L(t_0)^2\right]$$

Como la función AC es periódica tenemos que $i_L(t_0+T) = i_L(t_0)$, así que:

$$W_L(t_0,t_0+T) = \frac{1}{2}L \cdot \left[i_L(t_0+T)^2 - i_L(t_0)^2\right] = 0$$

Esto nos muestra que una inductancia es un elemento pasivo que no tiene pérdidas de potencia: en una parte del ciclo AC absorbe potencia, pero en la otra parte del ciclo la suministra (devuelve la energía que almacenó sin perderla).

7.3.5. RESPUESTA DC Y AC DE LA INDUCTANCIA EN ESTADO ESTABLE

Una inductancia en estado estable para una señal DC se comporta como un corto circuito, mientras que para una señal AC de muy alta frecuencia se comporta como un circuito abierto.

Para el caso de un circuito resistivo cualquiera con una inductancia es posible aislar la inductancia y calcular el equivalente de Thévenin de las fuentes y resistencias, obteniendo un circuito serie con una fuente de voltaje Vt, una resistencia Rt y la inductancia L, como se muestra en la Figura 7-11.

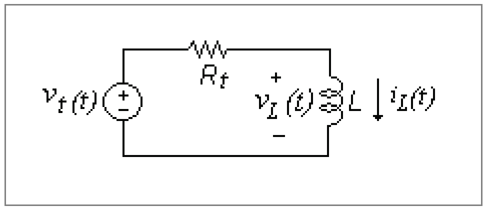


Figura 7-11

Para encontrar la respuesta de este circuito, esto es V_L en función del tipo de señal de entrada formalmente deberíamos resolver la ecuación diferencial resultante, sin embargo como eso es tema del siguiente capítulo. Por el momento vamos a analizar de manera descriptiva qué pasa con señales de de entrada de tipo DC y señales de muy alta frecuencia.

Para el caso de señal DC la derivada de la corriente respecto al tiempo, a largo plazo (estado estable) será cero, de manera que el voltaje en la inductancia es cero, y se comporta como un corto circuito para señal D.C. en estado estable. Esto se debe a que si no hay variaciones de la corriente, tampoco habrá un voltaje inducido. El circuito equivalente se muestra en la Figura 7-12.

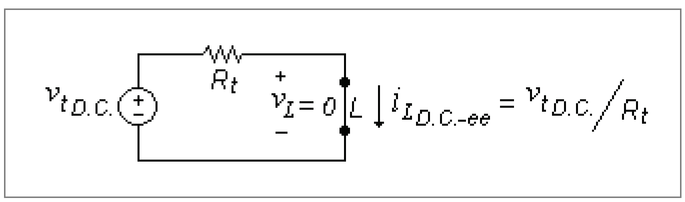


Figura 7-12

Para el caso AC con una frecuencia muy alta (que tiende a infinito) la inductancia se comporta como un circuito abierto, de manera que la corriente se hace cero. El circuito equivalente se muestra en la Figura 7-13.

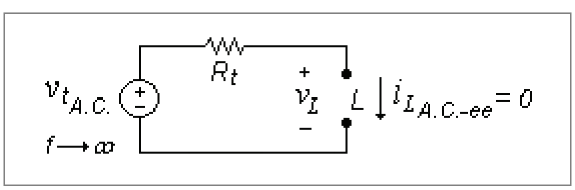


Figura 7-13

7.3.6. EQUIVALENTE DE INDUCTANCIAS EN SERIE

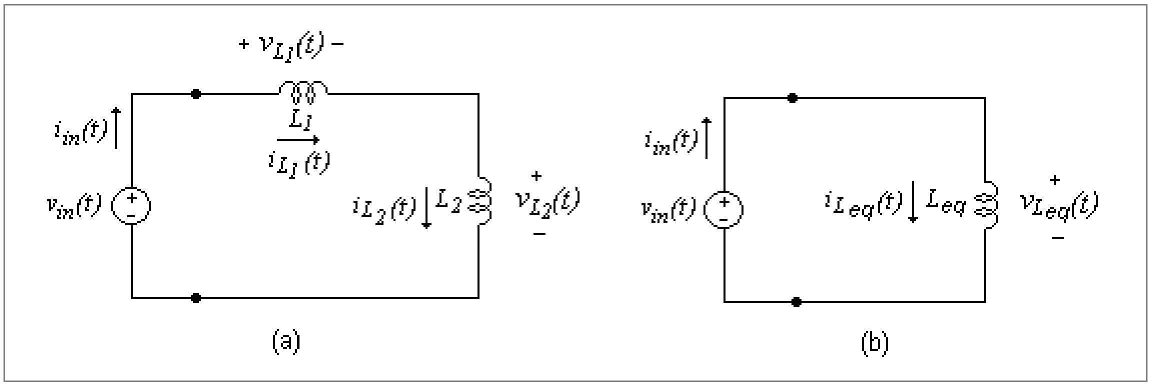


Figura 7-14

La Figura 7-14.a muestra dos Inductancias conectadas en serie. En este caso las relaciones entre voltaje y corriente en la fuente de voltaje serán similares a la de una sola inductancia equivalente como se muestra en la El circuito equivalente se muestra en la Figura 7-14.b. Para encontrar la inductancia equivalente L_{eq} usamos el hecho de que las corrientes en las dos inductancias y en la fuente son la misma, por estar en serie, además calculamos KVL para la figura a:

$$i_{in}(t) = i_{L1}(t) = i_{L2}(t)$$

$$v_{in}(t) = v_{L1}(t) + v_{L2}(t)$$

Ahora reemplazamos por la relación del voltaje en la inductancia $\frac{v_L(t)}{L} = \frac{di_L(t)}{dt}$:

$$v_{in}(t) = L_1 \frac{di_{L1}(t)}{dt} + L_2 \frac{di_{L2}(t)}{dt} = L_1 \frac{di_{in}(t)}{dt} + L_2 \frac{di_{in}(t)}{dt} = \left(L_1 + L_2\right)\frac{di_{in}(t)}{dt}$$

$$v_{in}(t) = \left(L_1 + L_2\right)\frac{dv_{in}(t)}{dt}$$

Para la figura b tenemos:

$$v_{in}(t) = L_{eq} \frac{di_{in}(t)}{dt}$$

Comparando las dos últimas ecuaciones se concluye que la inductancia equivalente paralelo es:

$$\boxed{L_{eq} = L_1 + L_2}$$

7.3.7. EQUIVALENTE DE INDUCTANCIAS EN PARALELO

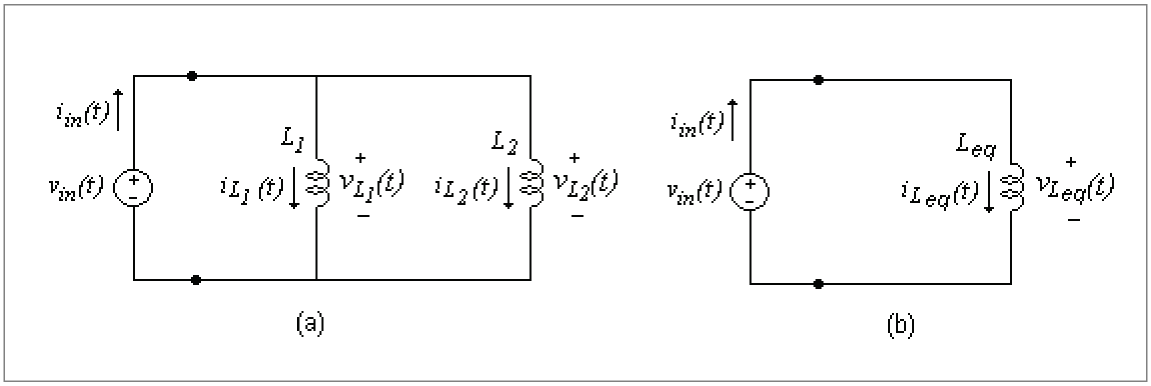


Figura 7-15

La Figura 7-15.a muestra dos Inductancias conectadas en serie. En este caso las relaciones entre voltaje y corriente en la fuente de voltaje serán similares a la de una sola inductancia equivalente como se muestra en la Figura 7-15.b. Para encontrar la inductancia equivalente L_{eq} usamos el hecho de que los voltajes en las dos inductancias y en la fuente son los mismos, por estar en paralelo, además calculamos KCL para la figura a:

$$v_{in}(t) = v_{L1}(t) = v_{L2}(t)$$

$$i_{in}(t) = i_{L1}(t) + i_{L2}(t)$$

Derivando la expresión anterior tenemos:

$$\frac{di_{in}(t)}{dt} = \frac{di_{L1}(t)}{dt} + \frac{di_{L2}(t)}{dt}$$

Ahora reemplazamos por la relación del voltaje en la inductancia $\frac{v_L(t)}{L} = \frac{di_L(t)}{dt}$:

$$\frac{di_{in}(t)}{dt} = \frac{v_{l1}(t)}{L_1} + \frac{v_{l2}(t)}{L_2} = \frac{v_{in}(t)}{L_1} + \frac{v_{in}(t)}{L_2} = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right) v_{in}(t)$$

$$\frac{di_{in}(t)}{dt} = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right) v_{in}(t)$$

Para la figura b tenemos:

$$\frac{v_{in}(t)}{L_{eq}} = \frac{di_{in}(t)}{dt}$$

Comparando las dos últimas ecuaciones se concluye que la inductancia equivalente paralelo es:

$$\boxed{\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}}$$

Ejemplo 7-2. Circuito Derivador

Para el circuito de la Figura 7-16 encontrar el voltaje a la salida del amplificador:

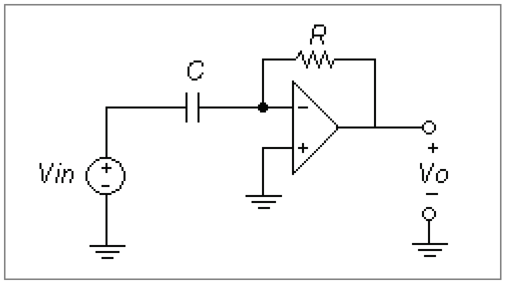


Figura 7-16

Solución

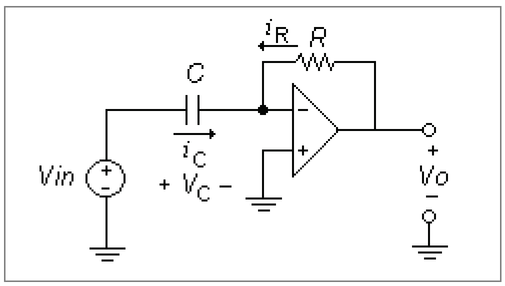


Figura 7-17

La caída de voltaje en la capacitancia es:

$$V_C(t) = V_{in}(t) - V_-(t) = V_{in}(t) - 0 = V_{in}(t)$$

La corriente en el condensador, respetando la convención pasiva de signos, está dada por la siguiente expresión:

$$i_C(t) = C\frac{dV_C(t)}{dt} = C\frac{dV_{in}(t)}{dt}$$

KCL en el nodo inversor nos da:

$$i_C(t) + i_R(t) = 0$$

$$-i_C(t) = i_R(t) = \frac{V_0(t) - 0}{R}$$

Reemplazando la corriente de la capacitancia:

$$-C\frac{dV_{in}(t)}{dt} = \frac{V_0(t)}{R}$$

$$\boxed{V_0(t) = -RC\frac{dV_{in}(t)}{dt}}$$

Como se puede ver el voltaje en la salida del OPAM es la derivada de la entrada, multiplicada por una ganancia e invertida:

$$\boxed{V_0(t) = \underbrace{-K}_{\text{Inversor}} \underbrace{\frac{dV_{in}(t)}{dt}}_{\text{Derivador}}}$$

Ejemplo 7-3. Circuito integrador

Para el circuito de la Figura 7-18 encontrar el voltaje a la salida del amplificador:

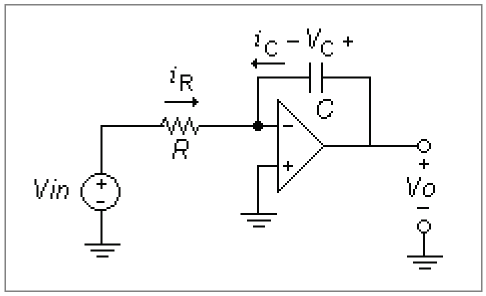


Figura 7-18

El voltaje en la capacitancia es:

$$V_C(t) = V_C(0^+) + \frac{1}{C}\int_0^T i_C(\tau)d\tau$$

La corriente en la capacitancia es:

(1)	$i_C(t) = -i_R(t) = -\frac{V_{in}(t)}{R}$
(2)	$\begin{aligned} V_0(t) = V_C(t) &= V_C(0^+) + \frac{1}{C}\int_0^t i_C(\tau)d\tau \\ &= 0 + \frac{1}{C}\int_0^t - i_R(\tau)d\tau \\ &= -\frac{1}{C}\int_0^t \frac{V_{in}}{R}(\tau)d\tau \\ &= -\frac{1}{RC}\int_0^t V_{in}(\tau)d\tau \end{aligned}$

Así que el voltaje de salida en el OPAM es:

$$\boxed{V_0(t) = -\frac{1}{RC}\int_0^t V_{in}(\tau)d\tau}$$

Como se puede ver el voltaje en la salida del OPAM es la integral de la entrada, multiplicada por una ganancia e invertida:

$$\boxed{V_0(t) = \underbrace{-K}_{\text{Inversor}} \underbrace{\int_0^t V_{in}(\tau)d\tau}_{\text{Integrador}}}$$

7.4. SIMULACIONES

7.4.1. CARGA DE UN CONDENSADOR

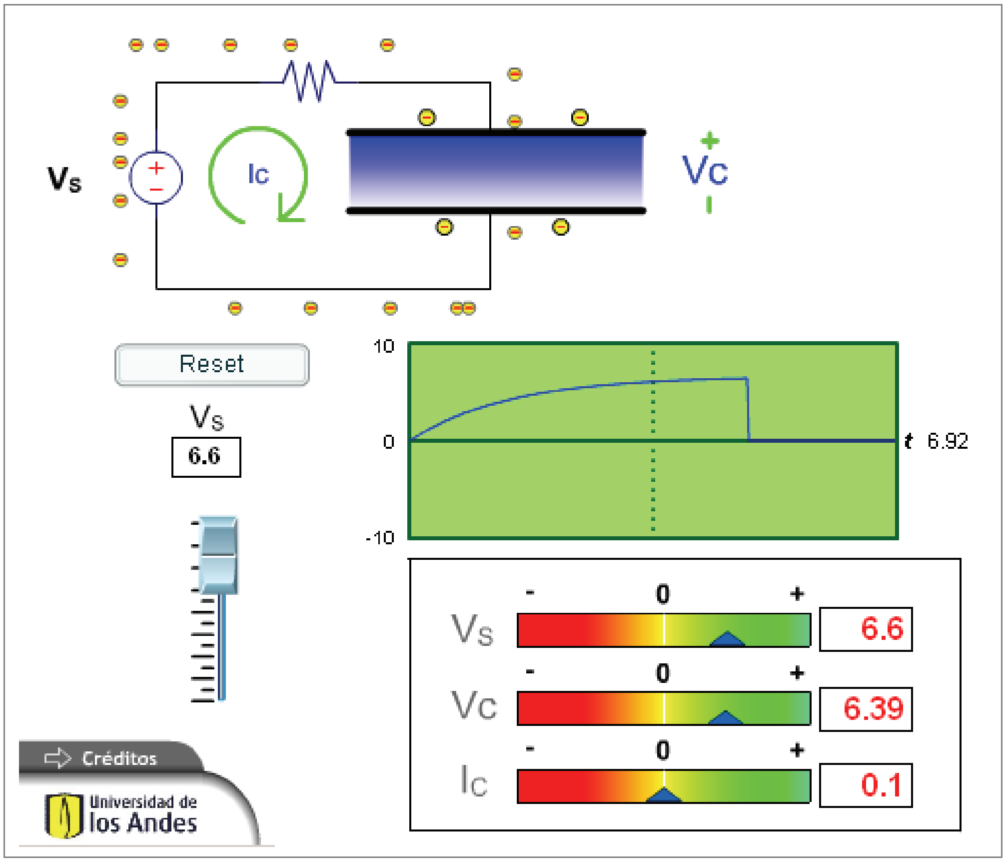


Figura 7-19

Descripción

Esta simulación permite mostrar el comportamiento de un condensador de placas paralelas: la acumulación de cargas que parten de una placa para depositarse en la otra, el campo eléctrico que se origina en él y el comportamiento del condensador en estado estable para una entrada DC.

Uso educativo

Esta simulación se presenta como un complemento a la clase presencial, para estudiantes de primeros semestres de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Mecánica. Una vez los estudiantes manejan los conceptos de capacitancia, carga acumulada, dieléctrico, campo eléctrico pueden interactuar con esta simulación variando el voltaje de la fuente y observando cómo las cargas no pueden atravesar al interior del condensador y se depositan las cargas en el condensador y se crea un campo eléctrico entre sus placas. Se observa que a medida que se acumulan las cargas se produce una caída de voltaje en el condensador y cómo a largo plazo el condensador de carga y deja de circular corriente por el circuito.

7.4.2. CARGA Y DESCARGA DE UN CONDENSADOR CON CONDICIONES INICIALES

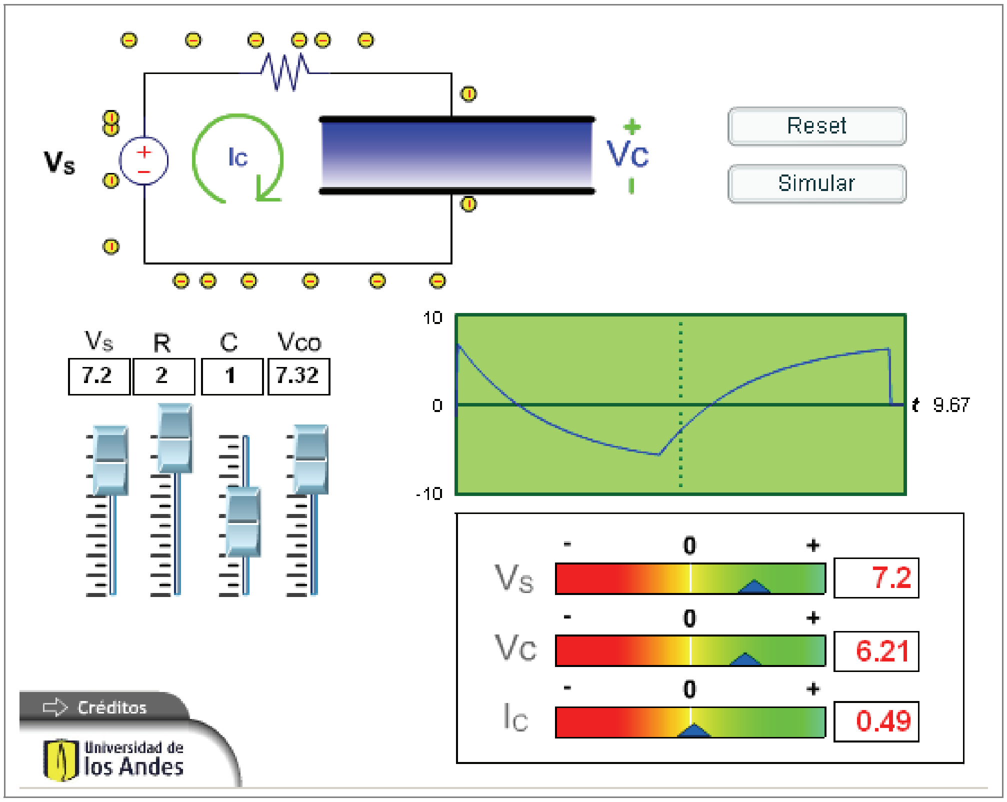


Figura 7-20

Descripción

Esta simulación permite mostrar el comportamiento de un condensador de placas paralelas: la acumulación de cargas que parten de una placa para depositarse en la otra tanto en el proceso de carga como en el de descarga para unas condiciones iniciales dadas, con o sin fuente.

Uso educativo

Esta simulación se presenta como un complemento a la clase presencial, para estudiantes de primeros semestres de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Mecánica. Una vez los estudiantes manejan los conceptos de capacitancia, carga acumulada, energía acumulada, dieléctrico, campo eléctrico pueden interactuar con esta simulación variando el voltaje de la fuente, el voltaje inicial en el condensador producido por la carga almacenada y observar cómo cambian las corrientes en los procesos de carga y descarga y cómo afecta la respuesta del circuito el hecho de que exista un voltaje inicial positivo o negativo.