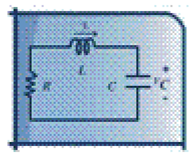
9. CIRCUITOS DE SEGUNDO ORDEN LC Y RLC



9.1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior vimos como los circuitos resistivos con capacitancias o los circuitos resistivos con inductancias tienen variables que son calculadas mediante ecuaciones diferenciales de primer orden. Ahora vamos a ver que cuando en el mismo circuito tenemos inductancias y capacitancias las ecuaciones diferenciales resultantes serán de segundo orden, por lo cual los denominamos *circuitos de segundo orden*.

También veremos cómo en circuitos con inductancias y capacitancias la energía almacenada por uno de estos elementos puede ser transferida al otro. Esto puede producir repuestas de tipo oscilatorio, incluso cuando no hay fuentes en el sistema.

El procedimiento para encontrar las ecuaciones diferenciales de estos circuitos es el mismo que para los casos de orden uno. La solución de las ecuaciones diferenciales también es muy similar, pero ahora tendremos dos raíces de la ecuación característica, las cuales pueden ser reales diferentes, reales iguales o complejas conjugadas (con parte real igual o diferente de cero). En función de esto tendremos cuatro tipos de respuesta de estado cero: oscilatoria, subamortiguada, sobreamortiguada y críticamente amortiguada. Lo que será un poco más complejo ahora será el cálculo de las condiciones iniciales, ya que necesitaremos adicionalmente las condiciones iniciales de la primera derivada de la variable de interés.

9.2. CIRCUITO LC – RESPUESTA DE ENTRADA CERO

El circuito de la Figura 9-1 muestra un circuito muy simple de segundo orden conformado por una capacitancia y una inductancia. Aunque este circuito no tiene fuentes, puede tener energía almacenada (condiciones iniciales) en cualquiera de los dos elementos o en ambos simultáneamente. La condición inicial del voltaje en la capacitancia nos fija el valor del voltaje en la inductancia, así como la condición inicial de la corriente en la inductancia nos determina la corriente en la capacitancia (pero con signo contrario).

Voltaje en la capacitancia

Vamos a encontrar la ecuación diferencial del voltaje en la capacitancia y resolverla (respuesta de entrada cero).

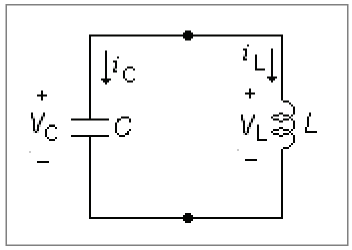


Figura 9-1

La ecuaciones que describen el circuito son:

Nodo:	$$i_L = -i_C = -C\frac{dV_C}{dt}$$ Derivando $$\frac{di_L}{dt} = -C\frac{d^2V_C}{dt^2}$$
Malla:	$$-V_C + V_L = 0$$ $$V_C = V_L = L\frac{di_L}{dt}$$ $$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}V_L = \frac{1}{L}V_C$$

Igualando la derivada de la corriente de la inductancia tenemos:

$$\frac{di_L}{dt} = -C\frac{d^2V_C}{dt^2} = \frac{1}{L}V_C$$

$$C\frac{d^2V_C}{dt^2} + \frac{1}{L}V_C = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2V_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}V_C = 0}$$

Como no hay entrada la respuesta depende exclusivamente de las condiciones iniciales con dos constantes indeterminadas A y B:

$$V_C(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

Para encontrar la solución homogénea para el voltaje en la capacitancia necesitamos conocer dos condiciones iniciales que pueden ser $V_C(t_o)$ y $\frac{dV_C(t_o)}{dt}$.

Para simplificar vamos a suponer que conocemos las condiciones iniciales del circuito en cero para el voltaje de la capacitancia $V_C\left(0^-\right)=V_{C0}$ y la corriente en la inductancia $i_L\left(0^-\right)=i_{L0}$. A partir de estas condiciones debemos encontrar la condición inicial de $\dfrac{dV_C\left(0\right)}{dt}$. Para esto hacemos uso de las relaciones entre voltaje y corriente en la capacitancia:

$$i_C(t)=C\,\frac{dV_C(t)}{dt}$$

Despejando la derivada del voltaje tenemos:

$$\frac{dV_C(t)}{dt}=\frac{i_C(t)}{C}$$

En el tiempo cero tenemos:

$$\frac{dV_C(0^+)}{dt}=\frac{i_C(0^+)}{C}$$

Ahora debemos conocer la corriente inicial en la capacitancia, y teniendo en cuenta que $i_C=-i_L$ y que la corriente en la inductancia es continua:

$$\frac{dV_C(0^+)}{dt}=\frac{i_C(0^+)}{C}=-\frac{i_L(0^+)}{C}=-\frac{i_L(0^-)}{C}=-\frac{i_{L0}}{C}$$

De manera que ya tenemos las dos condiciones iniciales necesarias para resolver la ecuación:

$$V_C(0^+)=V_{C0}$$

$$V_C'\left(0^+\right)=\frac{dV_C(0^+)}{dt}=-\frac{i_{L0}}{C}$$

Ahora encontramos la ecuación característica a partir de la ecuación diferencial $\left(D^2+\dfrac{1}{LC}\right)V_C=0$:

$$\left(\lambda^2+\frac{1}{LC}\right)=0$$

$$\lambda^2=-\frac{1}{LC}$$

La solución tiene por supuesto dos raíces complejas conjugadas:

$$\lambda_1=+j\,\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\lambda_2=-j\,\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Así se obtiene la siguiente solución homogénea:

$$V_{Ch}(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

$$\boxed{V_{Ch}(t) = Ae^{j\frac{1}{\sqrt{LC}}t} + Be^{-j\frac{1}{\sqrt{LC}}t}}$$

Como no tenemos entrada el voltaje en el condensador es:

$$\boxed{V_C(t) = Ae^{j\frac{1}{\sqrt{LC}}t} + Be^{-j\frac{1}{\sqrt{LC}}t}}$$

Para encontrar las constantes indeterminadas utilizamos las condiciones iniciales:

$$V_C(0^+) = V_{C0} = Ae^0 + Be^0 = A + B$$

Para simplificar digamos que la corriente inicial en la inductancia es cero $i_{L0} = 0$, así que:

$$V_C'\left(0^+\right) = -\frac{i_{L0}}{C} = j\frac{1}{\sqrt{LC}}Ae^0 - j\frac{1}{\sqrt{LC}}Be^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad A - B = 0 \quad \Rightarrow \quad A = B$$

Reemplazando en la primera condición:

$$A + A = V_{C0}$$

$$A = \frac{V_{C0}}{2}$$

Solución final:

$$V_C(t) = \frac{V_{C0}}{2}e^{j\frac{1}{\sqrt{LC}}t} + \frac{V_{C0}}{2}e^{-j\frac{1}{\sqrt{LC}}t}$$

$$= \frac{V_{C0}}{2}\left(e^{j\frac{1}{\sqrt{LC}}t} + e^{-j\frac{1}{\sqrt{LC}}t}\right)$$

Usando la relación de Euler,

$$e^{jx} = \cos(x) + jsen(x); \cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}; \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2},$$

podemos escribir:

$$V_C(t) = \frac{V_{C0}}{2}\left[2\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)\right]$$

$$\boxed{V_C(t) = V_{C0}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)} \qquad \boxed{\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \theta &= 0 \end{aligned}}$$

Como se aprecia la respuesta es una señal oscilatoria de tipo AC con la amplitud de la condición inicial. La frecuencia de oscilación depende de los valores de *L* y *C* y no de las condiciones iniciales.

Otra manera de resolverlo, dado que las raíces son complejas conjugadas, es asumir una solución de tipo senoidal con constantes indeterminadas *A* y ϕ:

$$V_C(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

con ω igual a la parte imaginaria de la raíz $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

De manera que $V_C^{'}(t) = -\omega A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$

Evaluando condiciones iniciales tenemos:

$$V_C(0^+) = A\cos(\phi) = V_{C0}$$

$$A = \frac{V_{C0}}{\cos(\phi)}$$

$$V_C^{'}(0^+) = -\omega A\,\mathrm{sen}(\phi) = -\frac{i_{L0}}{C}$$

$$\mathrm{sen}(\phi) = \frac{i_{L0}}{\omega C A}$$

De la segunda ecuación seno se concluye que si $i_{L0} = 0$ entonces $\phi = 0$, y que $A = V_{C0}$. Así que

$$V_C(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$V_C(t) = V_{C0}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

tal como lo habíamos encontrado anteriormente.

Si la corriente inicial en la inductancia no es cero, un análisis similar nos lleva al siguiente resultado:

$$V_C(t) = \sqrt{V_{C0}^{\;2} + \left(i_{L0}^{\;2}\,\frac{L}{C}\right)} \cdot \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}} + \phi\right)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{i_{L0}}{\omega C V_{C0}}\right)$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

En esta última formulación vemos que si $i_{L0} = 0$ tenemos el mismo resultado inicial.

Corriente en la inductancia

Con el resultado del voltaje sobre el condensador se puede obtener la corriente en la inductancia $i_L(t)$:

$$i_L = -i_C = -C\frac{dV_C}{dt}$$

Para el caso en que $i_L(0^-) = i_{L0}$ tenemos:

$$i_L = -C\frac{d}{dt}\left[V_{C0}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)\right]$$

$$= \frac{C}{\sqrt{LC}}V_{C0}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

$$\boxed{i_L(t) = V_{C0}\sqrt{\frac{C}{L}}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)}$$

9.3. CIRCUITO RLC SERIE

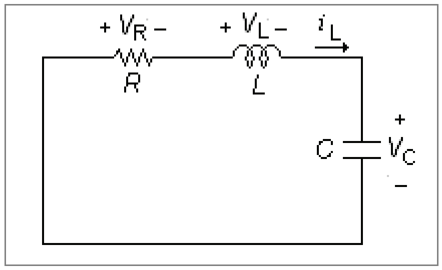


Figura 9-2

Ecuaciones que describen el circuito

Nodo:	$i_R = i_C = i_L$
Malla:	$V_R + V_L + V_C = 0$ $Ri_R + LDi_L + \frac{i_C}{CD} = 0$

Ecuación diferencial para la corriente

Con las anteriores ecuaciones se obtiene la ecuación diferencial para i_L

$$Ri_L + LDi_L + \frac{i_L}{CD} = 0$$

$$LD^2 i_L + RDi_L + \frac{1}{C}i_L = 0$$

$$D^2 i_L + \frac{R}{L}Di_L + \frac{1}{LC}i_L = 0$$

$$\left(D^2 + \frac{R}{L}D + \frac{1}{LC}\right)i_L = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC}i_L = 0}$$

9.4. CIRCUITO RLC PARALELO

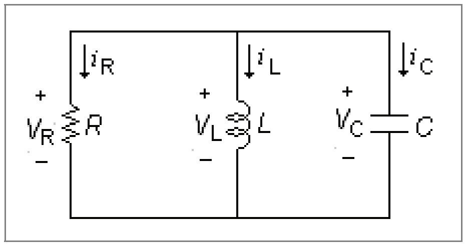


Figura 9-3

Ecuaciones que describen el circuito

Nodo:	$i_R + i_L + i_C = 0$ $\frac{V_R}{R} + \frac{V_L}{LD} + \frac{V_C}{1/CD} = 0$ $\frac{V_R}{R} + \frac{V_L}{LD} + CDV_C = 0$
KVL:	$V_R = V_L = V_C$

Ecuación diferencial para el voltaje

Con las anteriores ecuaciones se obtiene la ecuación diferencial para $V_C(t)$.

$$LDV_C + RV_C + RLCD^2V_C = 0$$

$$D^2V_C + \frac{1}{RC}DV_C + \frac{1}{LC}V_C = 0$$

$$\left(D^2 + \frac{1}{RC}D + \frac{1}{LC}\right)V_C = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2V_C}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{LC}V_C = 0}$$

9.5. COMPORTAMIENTO DE LA RESPUESTAS DE SEGUNDO ORDEN – ENTRADA CERO

La forma general de ecuación diferencial homogénea de segundo orden es:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + b\frac{dx(t)}{dt} + cx(t) = 0$$

la cual se puede escribir usando el operador *D* como:

$$\left(D^2 + bD + c\right)x = 0$$

La ecuación característica de esta ecuación será:

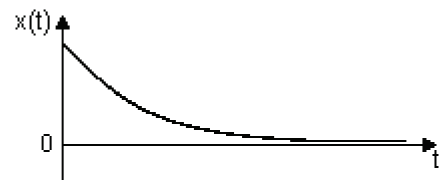
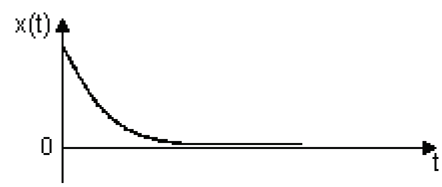
$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

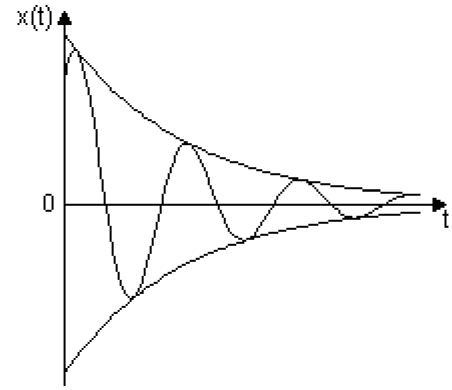
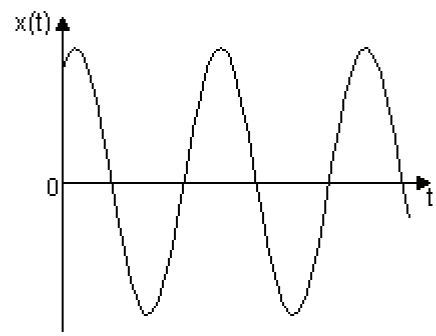
cuya solución es:

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \text{ y } \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

De acuerdo a los valores que tengan λ_1 y λ_2 la respuesta homogénea puede tener distintas formas, como lo muestra la siguiente tabla.

Tabla 9-1. Diferentes tipos de respuesta homogénea según las raíces.

TIPO	RESPUESTA	GRÁFICA
Sobre-amortiguada Raíces reales diferentes: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\lambda_1 \in \Re$ $\lambda_2 \in \Re$ $b^2 - 4c > 0$	$x(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t}$ Condiciones iniciales: $x(0) = k_1 + k_2$ $x'(0) = \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2$	
Críticamente amortiguada Raíces reales iguales: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ $\lambda \in \Re$ $b^2 - 4c = 0$	$x(t) = (k_1 + k_2 t)e^{\lambda t}$ Condiciones iniciales: $x(0) = k_1$ $x'(0) = \lambda k_1 + k_2$	

Subamortiguada Raíces complejas conjugadas: $\lambda_1 = \sigma + j\omega$ $\lambda_2 = \sigma - j\omega$ $b^2 - 4c < 0$ $b \neq 0$	$x(t) = k_1 e^{(\sigma + j\omega)t} + k_2 e^{(\sigma - j\omega)t}$ $x(t) = e^{\sigma t}\left[A\cos(\omega t) + B\mathrm{sen}(\omega t)\right]$ Condiciones iniciales: $x(0) = A$ $x'(0) = \sigma A + \omega B$ Otra forma: $x(t) = Ke^{\sigma t}\cos(\omega t + \theta)$ Condiciones iniciales: $x(0) = K\cos(\theta)$ $x'(0) = \theta K\cos(\theta) - \omega K\mathrm{sen}(\theta)$ La relación entre las constantes es: $K = \sqrt{A^2 + B^2}$ $\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{B}{A}\right)$	
No amortiguada Raíces puramente complejas: $\lambda_1 = j\omega$ $\lambda_2 = -j\omega$ $b^2 - 4c < 0$ $b = 0$	$x(t) = k_1 e^{j\omega t} + k_2 e^{-j\omega t}$ $x(t) = A\cos(\omega t) + B\mathrm{sen}(\omega t)$ $x(t) = K\cos(\omega t + \theta)$ Condiciones iniciales: $x(0) = A$; $x'(0) = B$	

9.6. CIRCUITO RLC SERIE CON ENTRADA CONSTANTE

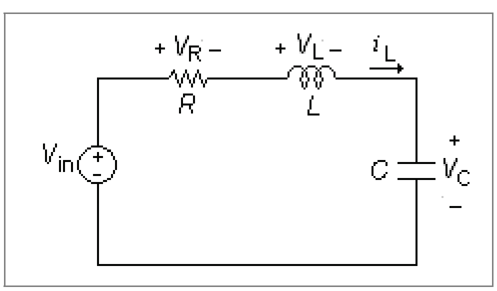


Figura 9-4

Ecuaciones que describen el circuito

Nodo:	$i_R = i_C = i_L$
Malla:	$V_{in} = V_R + V_L + V_C$ $= Ri_R + LDi_L + V_C$

Ecuación diferencial para el voltaje en el condensador

Con las ecuaciones (1) y (2) se puede encontrar la ecuación diferencial para el voltaje en el condensador:

$$i_C = CDV_C$$

$$\begin{aligned} V_{in} &= Ri_C + LDi_C + V_C \\ &= RCDV_C + LD(CDV_C) + V_C \\ &= LCD^2V_C + RCDV_C + V_C \end{aligned}$$

$$\frac{V_{in}}{LC} = D^2V_C + \frac{R}{L}DV_C + \frac{1}{LC}V_C$$

$$\boxed{\frac{d^2V_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{LC}V_C = \frac{1}{LC}V_{in} = Kte}$$

<u>Solución de la ecuación diferencial:</u>

La ecuación diferencial es de la forma:

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = F$$

donde $b = \frac{R}{L}$ y $c = \frac{1}{LC}$

La solución de esta ecuación diferencial es de la forma:

$$x = x_h + x_p$$

Solución homogénea:

De la ecuación diferencial se obtiene la siguiente ecuación característica:

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ Y se obtiene la siguiente solución homogénea:

$$\boxed{x_h(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}}$$

Solución particular:

La solución particular es de la forma de la fuente, es decir, una constante:

$$x_p = Kte$$
$$\dot{x}_p = 0$$
$$\ddot{x}_p = 0$$

Reemplazando en la ecuación diferencial se obtiene:

$$\ddot{x}_p + b\dot{x}_p + cx_p = F$$
$$cx_p = F$$
$$\boxed{x_p = \frac{F}{c}}$$

Solución completa:

La solución completa de la ecuación diferencial es:

$$\boxed{x(t) = x_h(t) + x_p = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} + \frac{F}{c}}$$

Reemplazando los valores de la ecuación diferencial del voltaje en el condensador se obtiene:

$$V_C(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} + \frac{\frac{V_{in}}{LC}}{1/LC}$$
$$\boxed{V_C(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} + V_{in}}$$

Condiciones iniciales:

Caso 1: Raíces reales diferentes $\left(b^2 - 4c > 0\right)$

$$V_C(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} + V_{in}$$
$$\boxed{V_C(0) = A + B + V_{in}}$$
$$\dot{V}_C(t) = \lambda_1 Ae^{\lambda_1 t} + \lambda_2 Be^{\lambda_2 t}$$
$$\boxed{\dot{V}_C(0) = \lambda_1 A + \lambda_2 B}$$

Caso 2: Raíces complejas conjugadas $\left(b^2 - 4c < 0\right)$

$$x(t) = e^{\sigma t}\left[A\cos(\omega t) + B\operatorname{sen}(\omega t)\right] + V_{in}$$
$$x(0) = A + V_{in}$$

$$\dot{x}(t) = \sigma \cdot e^{\sigma t}\left[A\cos(\omega t) + B\operatorname{sen}(\omega t)\right] + \omega \cdot e^{\sigma t}\left[-A\operatorname{sen}(\omega t) + B\cos(\omega t)\right]$$
$$\boxed{\dot{x}(0) = A\sigma + B\omega}$$

$$x(t) = Ke^{\sigma t}\cos(\omega t + \theta) + V_{in}$$
$$x(0) = F\cos(\theta) + V_{in}$$
$$\dot{x}(t) = \sigma \cdot Ke^{\sigma t}\cos(\omega t + \theta) - \omega \cdot Ke^{\sigma t}\operatorname{sen}(\omega t + \theta)$$
$$\boxed{\dot{x}(0) = \sigma \cdot K\cos(\theta) - \omega \cdot K\operatorname{sen}(\theta)}$$

Ejemplo 9-1 . Circuito R y LC con interruptor.

En el circuito de la Figura 9-5 el interruptor se cierra en $t = 0$. Encontrar:

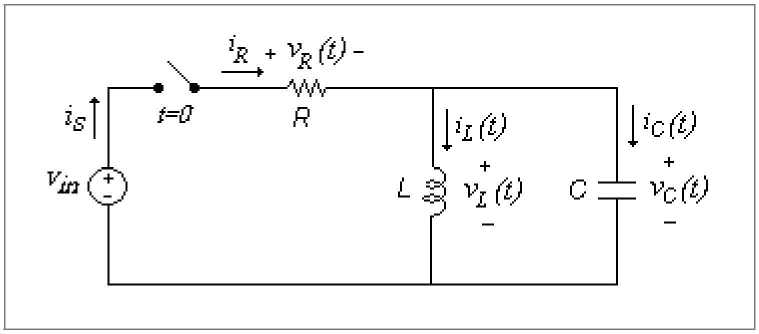


Figura 9-5

a. La ecuación diferencial para $i_L(t)$ cuando el interruptor está cerrado.

b. La ecuación diferencial para $v_C(t)$ cuando el interruptor está cerrado.

c. $v_c'(0^+)$ e $i_L'(0^+)$ al cerrar el interruptor si las condiciones iniciales son $v_c(0^-) = V_{c0}$ y $i_L(0^-) = I_{L0}$.

Solución

Parte a)

La ecuación diferencial para $i_L(t)$ la encontraremos usando el operador *D*:

$$L // C : \frac{\frac{1}{CD} \cdot LD}{\frac{1}{CD} + LD} = \frac{LD}{1 + LCD^2}$$

$$i_L = \frac{v_L}{Z_L} = \frac{v_{in} \cdot \left(\dfrac{\frac{LD}{1+LCD^2}}{R + \frac{LD}{1+LCD^2}} \right)}{LD} = v_{in} \cdot \frac{\frac{LD}{1+LCD^2}}{LD \cdot \left(R + \frac{LD}{1+LCD^2} \right)}$$

$$i_L = v_{in} \cdot \frac{1}{R\left(1 + LCD^2\right) + LD} = \frac{v_{in}}{RLCD^2 + LD + R}$$

$$\left(RLCD^2 + LD + R\right) \cdot i_L = v_{in}$$

$$\left(D^2 + \frac{1}{RC} D + \frac{1}{LC}\right) \cdot i_L = \frac{v_{in}}{RLC}$$

$$\boxed{\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i_L(t) = \frac{v_{in}}{RLC}}$$

Parte b)

$$v_C = v_{in}\frac{Z_{L//C}}{R+Z_{L//C}} = v_{in}\cdot\left(\frac{\dfrac{LD}{1+LCD^2}}{R+\dfrac{LD}{1+LCD^2}}\right) = v_{in}\frac{LD}{LD+R+RLCD^2}$$

$$\left(RLCD^2+LD+R\right)v_c = LDv_{in}$$

$$\left(D^2+\frac{1}{RC}D+\frac{1}{LC}\right)v_c = \frac{1}{RC}Dv_{in}$$

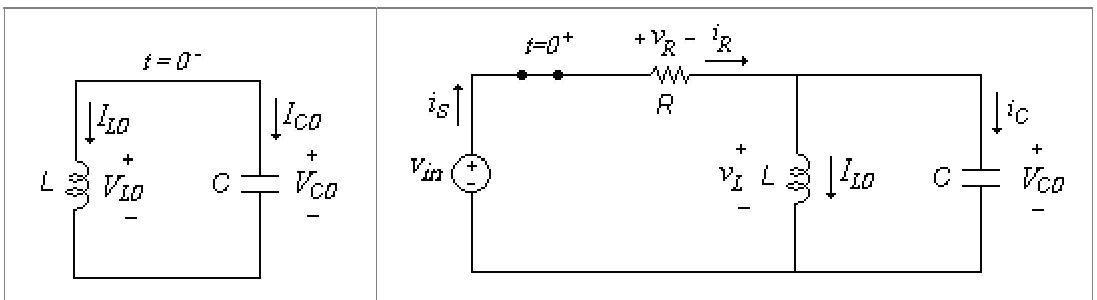
$$\frac{d^2v_c(t)}{dt^2}+\frac{1}{RC}\frac{dv_c(t)}{dt}+\frac{1}{LC}v_c(t) = \frac{1}{RC}\frac{dv_{in}(t)}{dt}$$

Parte c)

El circuito equivalente, antes de cerrar el interruptor $t=0^-$, se muestra en la Figura 9-6(a). Como el interruptor está abierto no hay corriente por la resistencia y la fuente de voltaje no tiene efecto, así que solo debemos examinar lo que ocurre con la inductancia y la capacitancia. Las condiciones iniciales son $v_c\left(0^-\right)=V_{c0}$ e $i_L\left(0^-\right)=I_{L0}$. Ahora debemos encontrar las condiciones en $t=0^+$, al cerrar el interruptor. En ese momento intervienen la fuente y la resistencia. El circuito equivalente en $t=0^+$ se muestra en la Figura 9-6(b). Por continuidad en *C* y *L* tenemos*:*

$$v_c\left(0^-\right)=V_{C0}=v_c\left(0^+\right)\ y\ I_L\left(0^-\right)=I_{L0}=I_L\left(0^+\right)$$

A partir de estos valores podemos encontrar las condiciones en $t=0^+$



(a)	(b)

Figura 9-6

i. $i_L'\left(0^+\right)$

$$v_C(t)=v_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt}=Li_L'(t)\quad\Rightarrow\quad i_L'(t)=\frac{1}{L}v_C(t)$$

$$i_L'\left(0^+\right)=\frac{1}{L}v_C\left(0^+\right)$$

$$\boxed{i_L'\left(0^+\right)=\frac{1}{L}V_{C0}}$$

ii. $v_c'\left(0^+\right)$

$$i_C(t) = C\frac{dV_C(t)}{dt}$$

$$v_c'(t) = \frac{dV_C(t)}{dt} = \frac{1}{C}i_C(t) = \frac{1}{C}\left[i_R(t) - i_L(t)\right]$$

$$v_c'(t) = \frac{1}{C}\left[\frac{v_{in}(t) - v_C(t)}{R} - i_L(t)\right]$$

$$v_c'\left(0^+\right) = \frac{1}{C}\left[\frac{v_{in}\left(0^+\right) - v_C\left(0^+\right)}{R} - i_L\left(0^+\right)\right]$$

$$\boxed{v_c'\left(0^+\right) = \frac{1}{C}\left[\frac{v_{in} - V_{C0}}{R} - i_{L0}\right]}$$

Ejemplo 9-2 . Circuito RC y L con interruptor.

El circuito de la Figura 9-7 tiene una fuente de voltaje *Vs* de tipo D.C.; el interruptor ha estado cerrado por un largo tiempo antes de $t_0 = 0$ y alcanzó el estado estable. En t_0 se abre el interruptor y se deja así por un corto tiempo hasta el instante t_1 (sin llegar a estado estable). Encontrar para $t \geq t_0$:

a. la ecuación diferencial para $v_C(t)$.

b. $v_C(t_0^-)$, $i_L(t_0^-)$, $v_C(t_0^+)$, $i_L(t_0^+)$, $v_C'(t_0^+)$

c. $v_C(t_1 \geq t \geq t_0)$, $v_C(t_1^+)$, $v_C'(t_1^+)$

d. $v_C(t \geq t_1)$, si R = 2 Ω, L = 1 H y C = 1/8 F y *Vs* = 10V.

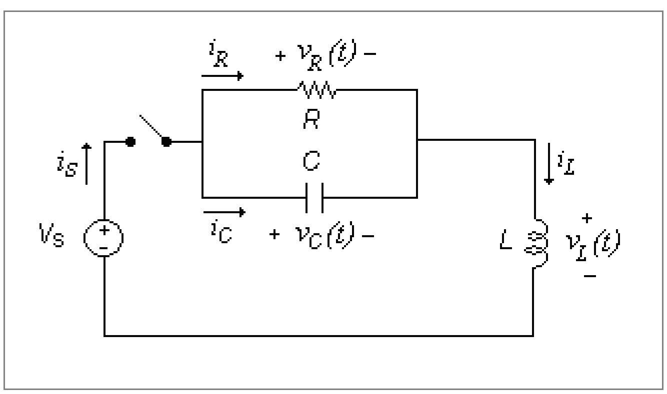


Figura 9-7

Solución

Parte a)

Tenemos que partir el problema en dos intervalos de tiempo: $[t_0, t_1]$ y $t \geq t_1$ y encontrar la ecuación diferencial de cada caso, con sus respectivas condiciones iniciales y resolverla.

En $[t_0, t_1]$:

Como el interruptor está abierto tenemos el circuito equivalente de la Figura 9-8, que corresponde a la descarga de la capacitancia a través de la resistencia y que es un circuito RC de primer orden cuya ecuación diferencial ya la conocemos del capítulo anterior:

$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_C(t) = 0$$

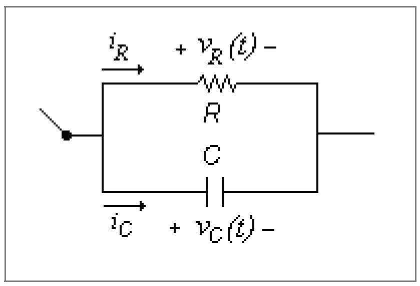


Figura 9-8

Para resolver esta ecuación vamos a necesitar la condición inicial en t_0: $v_C(t_0^+)$.

Para $t \geq t_1$:

Al cerrar el interruptor volvemos a tener un circuito de segundo orden.

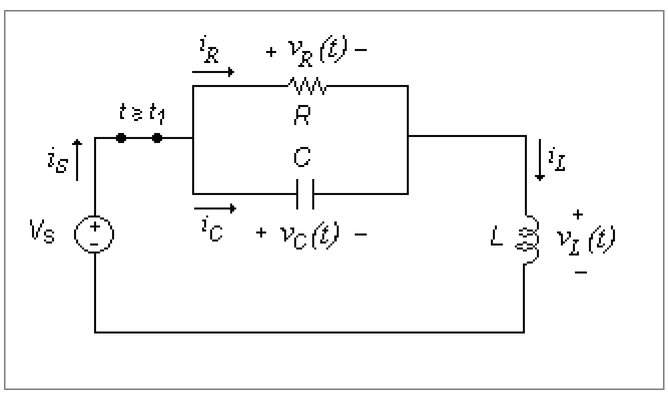


Figura 9-9

Usando el operador *D* podemos hacer el divisor de voltaje con en los otros ejemplos. Esta vez vamos a calcular KCL en el nodo entre RC y L y la malla entre la fuente C y L:

$$-V_S + v_C + v_L = 0$$

$$v_L = V_S - v_C$$

$$i_R + i_C - i_L = 0$$

$$\left(\frac{V_C}{R}\right) + \left(\frac{v_C}{1/CD}\right) - \left(\frac{v_L}{LD}\right) = 0$$

$$\left(\frac{V_C}{R}\right) + \left(\frac{v_C}{1/CD}\right) - \left(\frac{V_S - v_C}{LD}\right) = 0$$

$$\left(\frac{1}{R} + CD + \frac{1}{LD}\right)V_C = \frac{V_S}{LD}$$

$$RLD\left(\frac{1}{R} + CD + \frac{1}{LD}\right)V_C = RLD\frac{V_S}{LD}$$

$$\left(LD + RLCD^2 + R\right)\cdot V_C = RV_S$$

$$\left(D^2 + \frac{D}{RC} + \frac{1}{LC}\right)\cdot V_C = \frac{1}{LC}V_S$$

Pasando al dominio del tiempo tenemos entonces la siguiente ecuación diferencial de orden dos:

$$\frac{d^2V_C(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dV_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC}V_C(t) = \frac{1}{LC}V_S$$

Para resolver esta ecuación vamos a necesitar las condiciones iniciales en $t_1 : v_C(t_1^+)$ y $v_C'(t_1^+)$.

Parte b)

Para el intervalo de tiempo anterior a $t_0 = 0$ no hace falta escribir la ecuación diferencial ya sabemos que en $t_0 = 0$ se alcanzó el estado estable y que como la fuente es de tipo D.C. el condensador está abierto y la inductancia en corto circuito. Esto nos permite encontrar las condiciones iniciales.

En t_0^-:

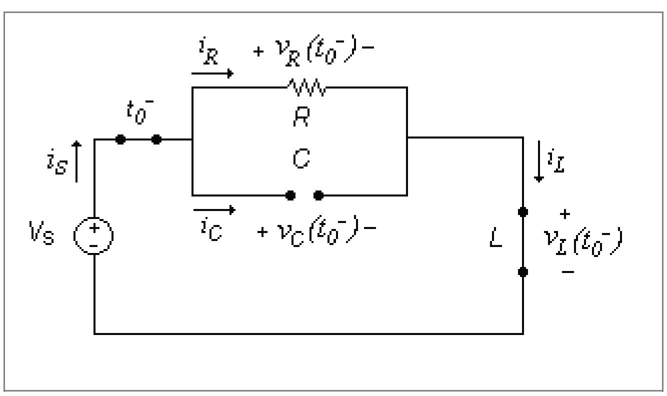


Figura 9-10

$$v_C(t_0^-) = V_S = v_C(t_0^+) = v_{C0}$$

$$i_L(t_0^-) = \frac{v_R(t_0^-)}{R} = \frac{V_S(t_0^-)}{R} = \frac{V_S}{R}$$

En t_0^+:

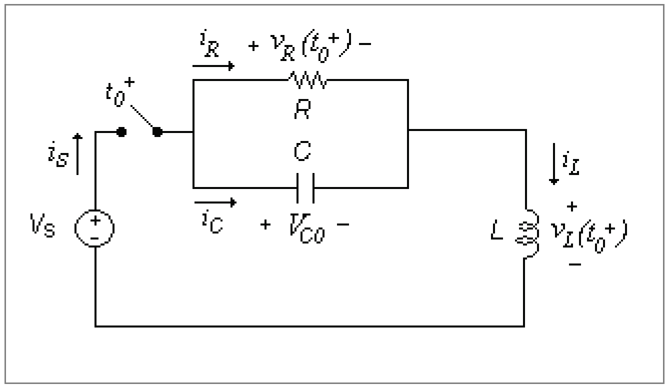


Figura 9-11

Por continuidad del voltaje en la capacitancia y dado que se alcanzó el estado estable en t_0 tenemos:

$$v_C(t_0^+) = v_C(t_0^-) = v_{C0} = V_S$$

Aquí ya no es válida la continuidad de la corriente en la inductancia ya que el interruptor está abierto y se debe respetar KCL:

$$i_L(t_0^-) = \frac{V_S}{R} \neq i_L(t_0^+) = 0$$

Para encontrar $v_C'(t_0^+)$ usamos la relación entre corriente y voltaje en la inductancia y el hecho de que el interruptor está abierto que implica que $i_C = -i_R$:

$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{i_C(t)}{C}$$

$$v_C(t_0^+)' = \frac{dv_C(t_0^+)}{dt} = \frac{i_C(t_0^+)}{C} = -\frac{i_R(t_0^+)}{C} = -\frac{\frac{v_R(t_0^+)}{R}}{C} = -\frac{v_R(t_0^+)}{RC}$$

Como *R* y *C* están en paralelo:

$$v_C(t_0^+)' = -\frac{v_C(t_0^+)}{RC} = -\frac{V_S}{RC}$$

Parte c)

Para encontrar las condiciones iniciales en t_1 necesitamos resolver la ecuación del voltaje en la capacitancia $v_C(t)$ en el intervalo $[t_0, t_1]$ y evaluarla en t_1.

$$\frac{dv_C(t)}{dt}+\frac{1}{RC}v_C(t)=0$$

$$v_C(t_0^{\,+})=V_S$$

Ya vimos en el capítulo anterior que la solución es:

$$v_C(t)=V_{C0}e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}$$

En $[t_0,t_1]$:

$$\boxed{v_C(t)=V_S e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}}$$

Evaluando en t_1 :

$$V_{C1}=V_C(t_1)=V_S e^{-\frac{1}{RC}(t_1-t_0)}$$

$$v_C'(t)=-\frac{1}{RC}V_S e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}$$

$$v_C'(t_1)=-\frac{1}{RC}V_S e^{-\frac{1}{RC}(t_1-t_0)}=-\frac{1}{RC}V_{C1}$$

Parte d)

La solución de $v_C(t)$ en el intervalo $[t_0,t_1]$ dependerá de las raíces de la ecuación característica de la ecuación diferencial encontrada para este intervalo de tiempo con R = 2 Ω, L = 1 H y C = 1/8 F y *Vs* = 10V.

$$\frac{d^2v_C(t)}{dt^2}+\frac{1}{RC}\frac{dv_C(t)}{dt}+\frac{1}{LC}v_C(t)=\frac{1}{LC}V_S$$

La solución homogénea será:

$$\lambda^2+\frac{1}{RC}\lambda+\frac{1}{LC}=0$$

$$\lambda^2+\frac{1}{2\cdot\frac{1}{8}}\lambda+\frac{1}{1\cdot\frac{1}{8}}=0$$

$$\lambda^2+4\lambda+8=0$$

$$\lambda_1=\frac{-4+\sqrt{4^2-4\cdot 8}}{2}\ \ y\ \ \lambda_2=\frac{-4-\sqrt{4^2-4\cdot 8}}{2}$$

$$\lambda_1=-2+j2\ \ y\ \ \lambda_2=-2-j2$$

Como las raíces son de la forma $\lambda_{1,2}=\sigma\pm j\omega$ la solución homogénea tendrá la forma

$$v_{Ch}(t) = Ke^{\sigma t}\cos(\omega t + \theta)$$

Donde K y θ son constantes indeterminadas.

$$v_{Ch}(t) = Ke^{-2t}\cos(2t + \theta)$$

La solución particular será:

$$v_{Ch}(t) = \frac{F}{c} = \frac{\left(\frac{1}{LC}V_S\right)}{\frac{1}{LC}} = V_S$$

Así que la solución completa es para $t \geq t_1$:

$$\boxed{v_C(t) = Ke^{-2t}\cos(2t + \theta) + V_S}$$

$$v_C(t)' = -2Ke^{-2t}\cos(2t + \theta) - 2Ke^{-2t}\,\mathrm{sen}(2t + \theta)$$

Ahora evaluamos condiciones iniciales:

$$V_{C1} = v_C(t_1) = V_S e^{-\frac{1}{RC}(t_1 - t_0)}$$

$$v_C'(t_1) = -\frac{1}{RC}V_S e^{-\frac{1}{RC}(t_1 - t_0)} = -\frac{1}{RC}V_{C1} = -4V_{C1}$$

$$v_C(t_1) = Ke^{-2t_1}\cos(2t_1 + \theta) + V_S = V_{C1} = V_S e^{-\frac{1}{RC}(t_1 - t_0)}$$

$$v_{Ch}(t_1)' = -2Ke^{-2t_1}\cos(2t_1 + \theta) - 2Ke^{-2t_1}\,\mathrm{sen}(2t_1 + \theta) = -4V_{C1}$$

$$v_C(t \geq t_0) = \begin{cases} V_S \cdot e^{-4(t - t_0)} & , para\ [t_0, t_1] \\ Ke^{-2t} \cdot \cos(2t + \theta) + V_S & , para\ t \geq t_1 \end{cases}$$

$$\boxed{v_C(t \geq t_0) = \begin{cases} 10 \cdot e^{-4(t - t_0)}\mathrm{V} & , para\ [t_0, t_1] \\ Ke^{-2t} \cdot \cos(2t + \theta) + 10\mathrm{V} & , para\ t \geq t_1 \end{cases}}$$

9.7. SIMULACIONES

9.7.1. RESPUESTA DE CIRCUITO RLC A DIVERSAS ENTRADAS.

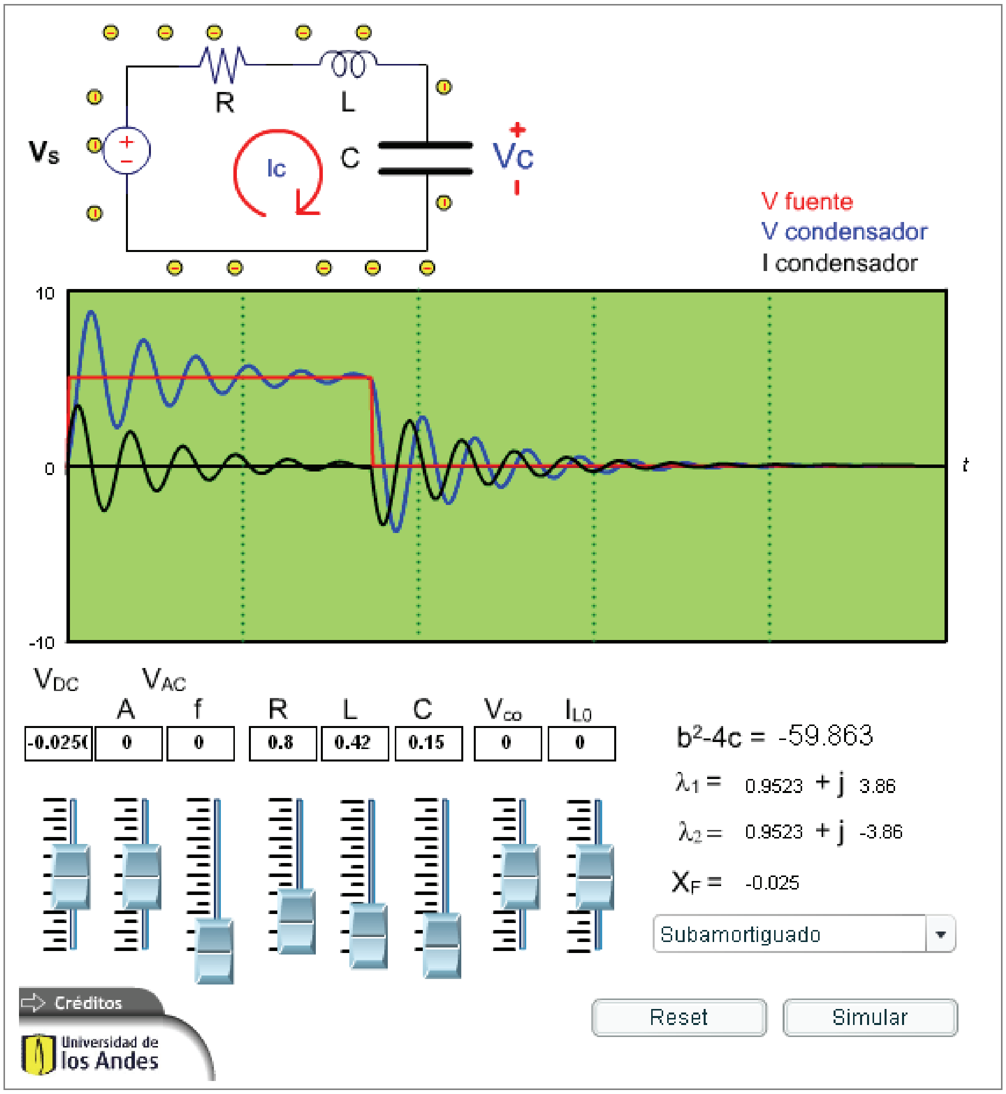


Figura 9-12

Descripción

Esta simulación permite mostrar el comportamiento de circuitos RLC de segundo orden, las raíces de la ecuación característica, y el comportamiento del circuito en función del tipo de raíces obtenidas. También permite analizar el comportamiento en función de los parámetros de los componentes RLC, de las condiciones iniciales y del tipo de entrada AC y DC.

Uso educativo

Esta simulación se presenta como un complemento a la clase presencial, para estudiantes de primeros semestres de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Mecánica. Una vez los estudiantes manejan los conceptos de circuitos RLC o segundo orden, representación de circuitos por ecuaciones diferenciales, condiciones iniciales, respuesta natural y respuesta particular, el estudiante puede variar las condiciones iniciales en la inductancia y la capacitancia y la señal de entrada y observar sus efectos en la respuesta del circuito en tiempo real. Los cambios se pueden dar el cualquier momento, lo que permite observar el comportamiento para cambio brusco en la señal de entrada o los cambio en la constante de tiempo. El sistema muestra las raíces de la ecuación característica según los valores definidos para R, L y C. También permite tener condiciones predefinidas para tener circuitos con respuesta no amortiguada, subamortiguada, sobreamortiguada y críticamente amortiguada.