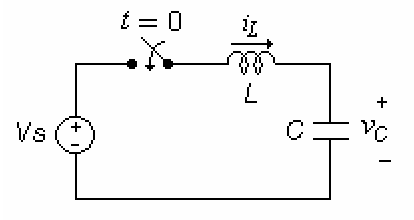
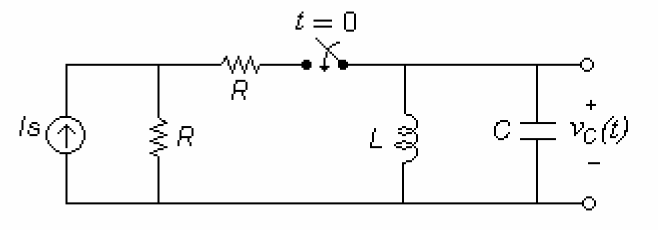
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
DEPARTAMENTO DE ING. ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA
FUNDAMENTOS DE CIRCUITOS

Problemas Resueltos- DeCarlo- Cap. 09 – Circuitos de segundo orden RLC

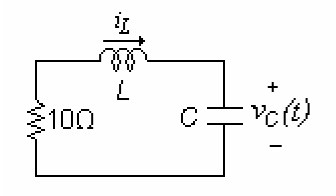
1. Cuando se aplica un voltaje DC de *Vs* V a un circuito *LC* sin energía almacenada, el voltaje en *C* alcanza un pico del doble del valor de la fuente. Considere el siguiente circuito en el cual se cierra el interruptor en *t* = 0. Asuma que el voltaje en *C* y la corriente en *L* son cero en *t* = 0. Demostrar que para *t* ≥ 0 se tiene:
   a) $i_L(t) = \dfrac{Vs}{\sqrt{\dfrac{L}{C}}} sen\left(\dfrac{1}{\sqrt{LC}} t\right)$
   b) $v_C(t) = Vs\left[1 - \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{LC}} t\right)\right]$



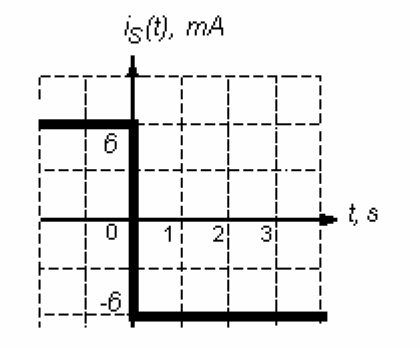
2. En el siguiente circuito el interruptor ha estado cerrado por mucho tiempo y se abre en *t* = 0. Encontrar v_C(t) para *t* ≥ 0, en términos de *R*, *L*, *C* e *Is*.

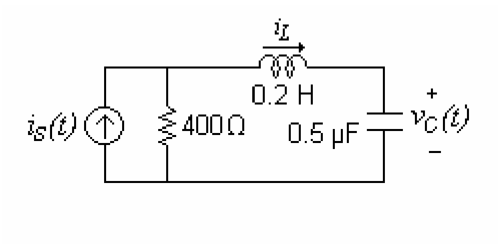


3. En el siguiente circuito $i_L(t) = 50e^{-10t}\text{sen}(10\sqrt{3}\, t)$ A para todo *t* ≥ 0. Encontrar el valor de *C* que produzca esta respuesta. Luego calcular las condiciones iniciales $v_C(0^+)$, $v'_C(0^+)$ y $v_C(t)$ para *t* > 0.

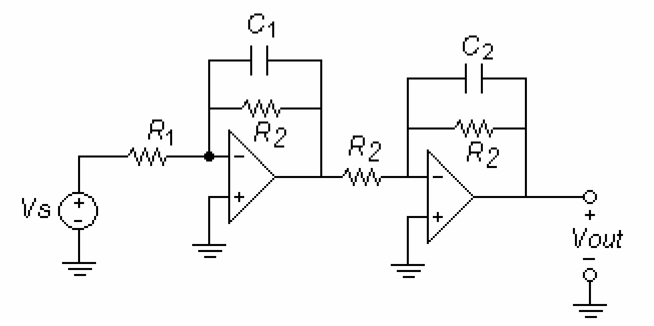


4. Considere el siguiente circuito *RLC*. Encuentre la respuesta $v_C(t)$ para $t > 0$.



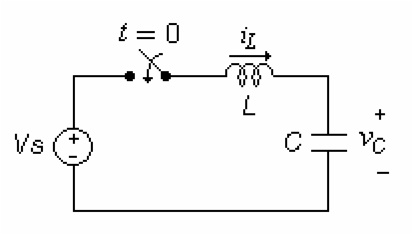


5. El siguiente es un circuito de segundo orden con OP AMP ideal. Si R_2= 1MΩ:
   a) Determinar los valores de C_1 y C_2 que produzcan una ecuación característica con frecuencias naturales en -4 y -12.
   b) Ajustar el valor de R_1 tal que una entrada de voltaje escalón unitario produzca luego de un largo tiempo una salida V_{out} = 10V.
   c) Calcular $v_{out}(t)$ cuando $v_S(t) = u(t)$ y todos los voltajes de los condensadores valen cero en t = 0.



SOLUCIÓN

1.



$$Vs = Vl + Vc$$

$$Vs = L\frac{dIl}{dt} + \frac{1}{C}\int Ildt$$

derivando :

$$\frac{d^2 Il}{dt} + \frac{1}{LC} Il = 0 \quad \Rightarrow \quad Wo = \sqrt{1/LC}$$

Ecuacion Homogenea :

$$Il = A\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}} + \phi\right) \qquad Vc = Vs - Vl = Vs - L\frac{dil}{dt} \qquad Vc(t) = Vs + \frac{AL}{\sqrt{LC}} sen\left(\frac{t}{\sqrt{LC}} + \phi\right)$$

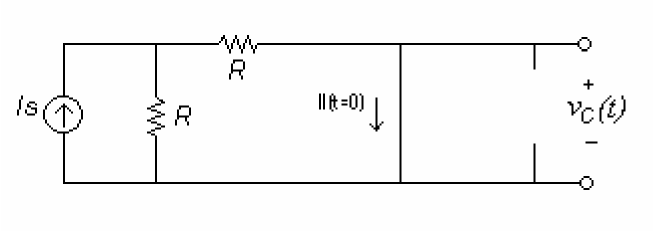
$$condiciones\ iniciales: \quad Il(0) = 0 = A\cos\phi \quad A \neq 0 \qquad \cos\phi = 0 \qquad \phi = 90$$

$$Vc(0) = 0 = Vs + \frac{AL}{\sqrt{LC}} sen(90) \quad \Rightarrow \quad A = -Vs\sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$Il(t) = -Vs\sqrt{\frac{C}{L}}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}} + 90\right) \qquad Vc(t) = Vs - VsSen\left(\frac{t}{\sqrt{LC}} + 90\right)$$

$$Il(t) = Vs\sqrt{\frac{C}{L}} Sen\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \qquad Vc(t) = Vs\left[1 - sen\left(\frac{t}{\sqrt{LC}} + 90\right)\right]$$

2.

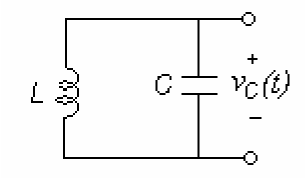


Para t<0 Se asume los componentes inicialmente cargados

$Vc(t=0^-)=0$ [V]

$Il((t=0^-)=Is/2$ [A]

Para t>0



$$Vl + Vc = 0 \ (por\ la\ malla)$$

$$L\frac{dIl}{dt} + Vc = 0 \qquad pero \quad Ic = C\frac{dVc}{dt}$$

$$CL\frac{d^2Vc}{dt^2} + Vc = 0 \ \Rightarrow \ \frac{d^2Vc}{dt^2} + \frac{Vc}{LC} = 0$$

$$Vc(t) = ACos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}} + \phi\right) \qquad Il(t) = -\frac{AC}{\sqrt{LC}} sen\left(\frac{t}{\sqrt{LC}} + \phi\right)$$

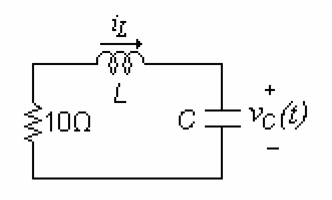
CI :

$$Vc(0) = 0 = A\cos\phi \quad \Rightarrow \quad \phi = 90$$

$$Il(0) = \frac{Is}{2} = -\frac{AC}{\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{Is}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$Vc(t) = -\frac{Is}{2}\sqrt{\frac{L}{C}} Cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}} + 90\right) \qquad \Rightarrow \qquad Vc(t) = \frac{Is}{2}\sqrt{\frac{L}{C}} Sen\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

3.



$Il(t)=50e^{-10t}Sen(10(3)^{1/2}t)$

Se tiene una respuesta subamortiguada con α=10 y $Wd=10(3)^{1/2}$

$$10=\xi Wo \qquad 10\sqrt{3}=Wo\sqrt{1-\xi^2}$$

se despeja y reemplaza :

$$Wo=20 \qquad \xi=0.5$$

$$RI_l+L\frac{dI_l}{dt}+\frac{1}{C}\int I_l dt=0$$

se deriva y organizan las exp*resiones* : *se deriva y organizan las* exp*resiones* :

$$\frac{d^2I_l}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dI_l}{dt}+\frac{I_l}{LC}=0$$

de la ecuacion :

$$Wo=\frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad 2\xi Wo=\frac{R}{L}$$

resolviendo :

$$L=0.5H$$

$$C=5mF$$

CI :

$$Il(t=0^+)=0=CVc'(0^+) \qquad Vc'(0^+)=0$$

$$Vl(t)=L\frac{dI_l}{dt}=25\left[-10e^{-10t}sen\left(10\sqrt{3}t\right)+10\sqrt{3}\cos\left(10\sqrt{3}t\right)\right]$$

$$Vl(t=0)=250\sqrt{3}=433.01 \qquad Il(t=0)=0 \quad \Rightarrow \quad Vr(0)=0$$

$$Vc(0)=-Vl(0) \quad \Rightarrow \quad Vc(0^+)=-433.01[V]$$

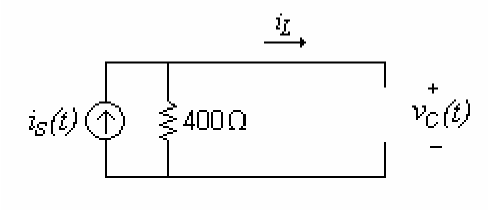
$$Vc(t)=-Vr(t)-Vl(t)$$

$$Vc(t)=-10Il(t)-L\frac{dI_l}{dt}$$

$$Vc(t)=-250e^{-10t}sen\left(10\sqrt{3}t\right)+250\sqrt{3}\cos\left(10\sqrt{3}t\right)$$

4.

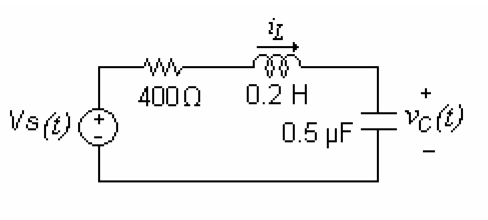
Para t<0 se asumen los elementos cargados



$$Il(t=0^-)=0$$

$$Vc(t=0^-)=(6m)(400)=2.4V$$

Para t>0, realizamos una transformación de fuentes



$$-2.4=400Il+0.2\frac{dIl}{dt}+Vc$$

$$Il=C\frac{dVc}{dt}$$

organizando y reemplazando :

$$\frac{d^2Vc}{dt}+2000\frac{dVc}{dt}+10*10^6Vc=-2.4(10*10^{-6})$$

$$Wo = 3162.27\left[\frac{rad}{s}\right] \quad y \quad \xi = 0.316 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1000 \quad y \quad Wd = 3000\left[\frac{rad}{s}\right]$$

$$Vc(t) = Ae^{-1000t}\cos(3000t+\phi) - 2.4 \quad dado\ que\ Vc(\infty) = -2.4[V]$$

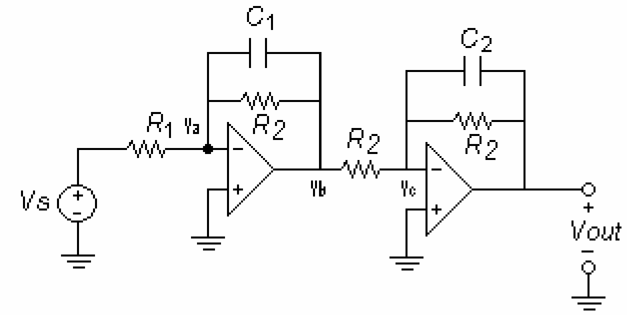
$aplicando\ condiciones\ iniciales\ similar\ a\ los\ puntos\ anteriores\ obtenemos:$

$\phi = -18.43$

$A = 5.06$

$$Vc(t) = 5.06e^{-1000t}\cos(3000t-18.43) - 2.4[V]$$

5.



a) Va=Vc=0 (ley OP-AMP)

$Nodo\ Va:$

$$\frac{Vs}{R1} = -\frac{Vb}{1M} - C1\frac{dVb}{dt}$$

$Nodo\ Vc:$

$$\frac{Vb}{1M} = -\frac{Vout}{1M} - C2\frac{dVout}{dt}$$

$$Vb = -Vout - (1M)C_2\frac{dVout}{dt} \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{Vs}{R_1} = -\frac{1}{1M}\left(-Vout - (1M)C_2\frac{dVout}{dt}\right) - C_1\frac{d}{dt}\left(-Vout - (1M)C_2\frac{dVout}{dt}\right)$$

$$\frac{Vs}{R_1} = \frac{Vout}{1M} + C_2\frac{dVout}{dt} + C_1\frac{dVout}{dt} + (1M)C_1C_2\frac{d^2Vout}{dt^2}$$

$se\ resuelve\ la\ cuadratica\ de\ la\ \hom ogenea:$

$$S1 = -\frac{1}{(1M)C1} \qquad S2 = -\frac{1}{(1M)C2} \qquad S1 = -4 \quad S2 = -12$$

$C_1 = 250nF \qquad C_2 = 83.33nF$

B)

Cuando pasa mucho tiempo los efectos de las derivadas desaparecen

$$\frac{Vout(\infty)}{1M} = \frac{Vs}{R1} \quad entonces \quad Vout(\infty) = 10V \quad y \quad Vs = 1V$$

$R1 = 100K\Omega$

C)

Por A) y B Vout(t)=$A_1e^{-4t}+A_2e^{-12t}+10$

CI:

$V_{c2}(0)=0$ ➔ Vout(0)=0 ➔ A1+A2=-10

Como Vc1(0)=0 ➔ Vb(0)=0

Vb(t)= $-A_1e^{-4t}-A_2e^{-12t}-10-0.0833[-4e^{-4t}-12e^{-12t}]$

Vb(0)=0=$-A_1-A_2-10+0.33^{a}{}_{1}+A_2$

$A_1=-15$

$A_2=5$

Vout(t)=$-15e^{-4t}+5e^{-12t}+10$[V]