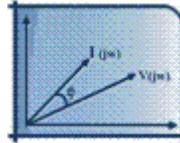


# 10. ANÁLISIS SENOIDAL POR FASORES

---



## 10.1. INTRODUCCIÓN

El análisis de circuitos complejos con resistencias, inductancias y capacitancias para entradas de tipo senoidal resulta muy dispendioso. El *análisis senoidal por fasores* es una manera simple de analizar tales circuitos sin resolver las ecuaciones diferenciales, que aplica al caso de entradas senoidales a una frecuencia dada, y una vez que el sistema se encuentra en estado estable.

Un fasor es una representación en el plano complejo de la magnitud y fase de la señal en el tiempo asociada al fasor. Como este representa una condición de inicio no depende del tiempo.

El análisis por fasores simplifica el estudio al caso de ecuaciones algebraicas, pero con la diferencia de que ahora se trabaja con números complejos.

## 10.2. SEÑAL EXPONENCIAL COMPLEJA Y FASORES

La Señal Exponencial Compleja (SEC) de una señal senoidal real en el tiempo es una transformada de la señal o un cambio de espacio de análisis definido como sigue.

Sea una señal senoidal  $v_s(t)$  en el dominio del tiempo, con amplitud  $V_s$ , ángulo de fase  $\theta_s$  y frecuencia  $\omega_s$ :

$$v_s(t) = V_s \cos(\omega t + \theta_s)$$

Su señal Exponencial Compleja (SEC) asociada será:

$$\tilde{v}_s(t) = V_s \cdot e^{j(\omega t + \theta_s)}$$

donde  $v_s(t)$  es la señal de entrada real en el tiempo y su SEC asociada es  $\tilde{v}_s(t)$ .

Nota:  $j$  es el número imaginario o complejo también llamado  $i = \sqrt{-1}$ , aunque en ingeniería se usa preferiblemente  $j$ .

Como se ve pasamos del espacio real al espacio complejo. La SEC tiene entonces parte real y parte imaginaria, las cuales varían en el tiempo.

Haciendo algunas modificaciones a la ecuación anterior tenemos:

$$\tilde{v}_s(t) = V_s \cdot e^{j(\omega t + \theta_s)} = V_s \cdot e^{j(\omega t)} \cdot e^{j\theta_s} = [V_s e^{j\theta_s}] \cdot e^{j\omega t}$$

El término en paréntesis cuadrados, que no depende del tiempo se conoce como el fasor y se representa por el símbolo  $\vec{V}_s$ :

$$\vec{V}_s = V_s e^{j\theta_s}$$

La anterior se conoce como la representación polar del fasor. Este fasor  $\vec{V}_s$  también tiene una amplitud  $V_s$ , ángulo de fase  $\theta_s$ .

Usando el fasor la SEC toma la forma

$$\tilde{v}_s(t) = V_s \cdot e^{j(\omega t + \theta_s)} = \vec{V}_s \cdot e^{j\omega t}$$

Otra manera de escribir el fasor es usar la notación de ingeniería eléctrica con como una magnitud real a un ángulo de fase dada por el símbolo  $\angle$ :

$$\vec{V}_s = V_s \angle \theta_s$$

Dado un fasor  $\vec{V}_s$ , nos podemos referir a su magnitud por la expresión

$$V_s = \left| \vec{V}_s \right|$$

y a su ángulo de fase por

$$\theta_s = \langle \vec{V}_s \rangle$$

Otra manera de representar el fasor es la forma rectangular, que se obtiene usando a relación de Euler:

$$\vec{V}_s = V_s \angle \theta_s = V_s e^{j\theta_s} = V_s [\cos(\theta_s) + j \operatorname{sen}(\theta_s)]$$

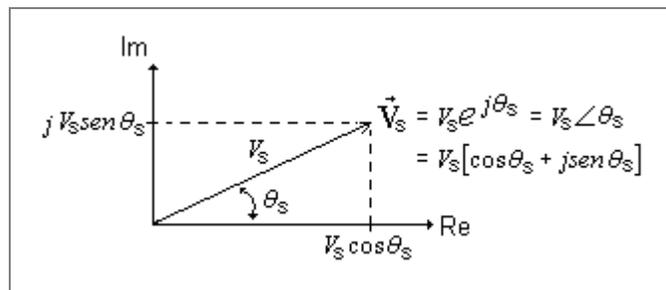


Figura 10-1

La Figura 10-1 muestra la relación en el plano complejo entre la forma polar y la forma rectangular del fasor.

Aplicando igualmente la relación de Euler a la SEC tenemos:

$$\tilde{v}_s(t) = V_s \cdot e^{j(\omega t + \theta_s)} = V_s [\cos(\omega t + \theta_s) + j \operatorname{sen}(\omega t + \theta_s)]$$

Esta SEC es entonces un fasor que rota alrededor del origen en función del tiempo, con un ángulo inicial, por lo cual también se le llama *fasor rotacional*.

Ya hemos visto la manera de encontrar la SEC asociada a una señal senoidal dada. Ahora veremos cómo hacer el proceso inverso: la señal senoidal en el tiempo a partir de una SEC dada.

Nótese que la parte real de la SEC  $\tilde{v}_s(t)$  es justamente  $v_s(t)$ :

$$\operatorname{Re}\{\tilde{v}_s(t)\} = \operatorname{Re}\{V_s [\cos(\omega t + \theta_s) + j \operatorname{sen}(\omega t + \theta_s)]\} = V_s \cos(\omega t + \theta_s) = v_s(t)$$

De manera que para pasar del espacio de la señal exponencial compleja dada al espacio real en el tiempo tan solo hay que calcular la parte real de la SEC.

$$v_s(t) = \operatorname{Re}\{\tilde{v}_s(t)\}$$

La derivada en el tiempo de la SEC es:

$$\frac{d\tilde{v}_s(t)}{dt} = \frac{dV_s \cdot e^{j(\omega t + \theta_s)}}{dt} = j\omega \cdot V_s \cdot e^{j(\omega t + \theta_s)} = j\omega \cdot \tilde{v}_s(t)$$

Lo que muestra que en el espacio de la SEC derivar la señal corresponde a multiplicarla por  $j\omega$ . Esto tiene una implicación importante a la hora de resolver ecuaciones diferenciales o de encontrar las relaciones entre corriente y voltaje en inductancias y capacitancias.

### 10.2.1. APLICACIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Dado que la señal exponencial compleja tiene exponenciales, al sacar sus derivadas en una ecuación diferencial vuelve a quedar una exponencial que se puede simplificar de la ecuación, dando como resultado una nueva ecuación puramente algebraica. Esto se muestra a continuación con una ecuación de orden uno, como la que tenemos para el voltaje en un condensador un circuito RC en serie ante entrada senoidal.

La ecuación del voltaje  $v_c(t)$  en un circuito RC serie, para voltaje de entrada AC de la forma  $v_{in}(t) = V_{in} \cos(\omega t + \theta_{in})$  es:

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_c(t) = \frac{1}{RC} v_{in}(t)$$

Al pasar al espacio de la SEC con  $v_c(t)$  la ecuación toma la siguiente forma:

$$j\omega \tilde{v}_c(t) + \frac{1}{RC} \tilde{v}_c(t) = \frac{1}{RC} \tilde{v}_{in}(t)$$

$$\left[ j\omega + \frac{1}{RC} \right] \tilde{v}_c(t) = \frac{1}{RC} \tilde{v}_{in}(t)$$

Recordemos que en el espacio de la SEC derivar equivale a multiplicar por  $j\omega$ . La solución para  $v_c(t)$  se puede expresar como  $v_c(t) = \text{Re}\{\tilde{v}_c(t)\}$ , de manera que ahora debemos calcular primero  $\tilde{v}_c(t)$ , a partir de ecuaciones algebraicas y de allí al espacio del tiempo real, en vez de resolver la ecuación diferencial y evaluar el resultado en estado estable.

Despejando tenemos  $\tilde{v}_c(t)$ :

$$\tilde{v}_c(t) = \frac{1}{[1 + j\omega RC]} \tilde{v}_{in}(t)$$

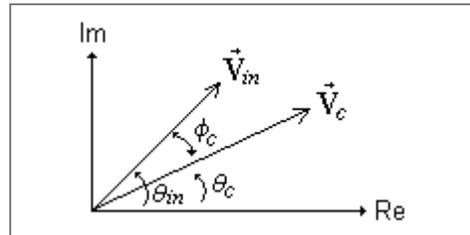
Recordemos que las SEC se pueden expresar como un fasor multiplicado por  $e^{j\omega t}$ . Aplicando esto al resultado anterior tenemos:

$$\vec{V}_c \cdot e^{j\omega t} = \frac{1}{[1 + j\omega RC]} \vec{V}_{in} \cdot e^{j\omega t}$$

simplificando

$$\vec{V}_c = \frac{1}{[1 + j\omega RC]} \vec{V}_{in}$$

La Figura 10-2 muestra la relación de los fasores  $\vec{V}_{in}$  y  $\vec{V}_c$  en el plano complejo, especialmente la relación entre los ángulos y el cambio de magnitud.



**Figura 10-2**

Conociendo la magnitud y el ángulo de fase de  $\vec{V}_c$  tenemos la solución en el tiempo:

$$v_c(t) = V_c \cos(\omega t + \theta_c)$$

$$V_c = \left| \vec{V}_c \right| = \left| \frac{1}{[1 + j\omega RC]} \vec{V}_{in} \right|$$

y

$$\theta_c = \left\langle \left( \frac{1}{[1 + j\omega RC]} \vec{V}_{in} \right) \right\rangle$$

Aplicando las normas de operaciones complejas tenemos para la magnitud:

$$V_C = \left| \vec{V}_C \right| = \left| \frac{1}{[1 + j\omega RC]} \right| \cdot \left| \vec{V}_{in} \right|$$

$$V_C = \frac{|1|}{|[1 + j\omega RC]|} \cdot \left| \vec{V}_{in} \right| = \frac{V_{in}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

y para el ángulo tenemos:

$$\theta_C = \angle \vec{V}_{in} - \angle (1 + j\omega RC) = \theta_{in} - \tan^{-1}(\omega RC)$$

Así que

$$v_C(t) = V_C \cos(\omega t + \theta_C)$$

$$v_C(t) = \frac{V_{in}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cos(\omega t + \theta_{in} - \tan^{-1}(\omega RC))$$

Esto indica que la señal de salida es igual a la de entrada pero con una atenuación de la magnitud de  $1/\sqrt{1 + (\omega RC)^2}$  y un cambio de fase de  $\phi_c = -\tan^{-1}(\omega RC)$ , los cuales dependen de la frecuencia de operación  $\omega$ .

### 10.3. IMPEDANCIA FASORIAL

Cuando la alimentación de un elemento (R, L o C) es una señal de tipo AC, por ejemplo  $v_{in}(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$ , la impedancia fasorial  $Z$  de un elemento se define como la relación entre el voltaje SEC y la corriente SEC del elemento, o lo que como se verá es equivalente a la relación entre el fasor de voltaje y el fasor de corriente del elemento:

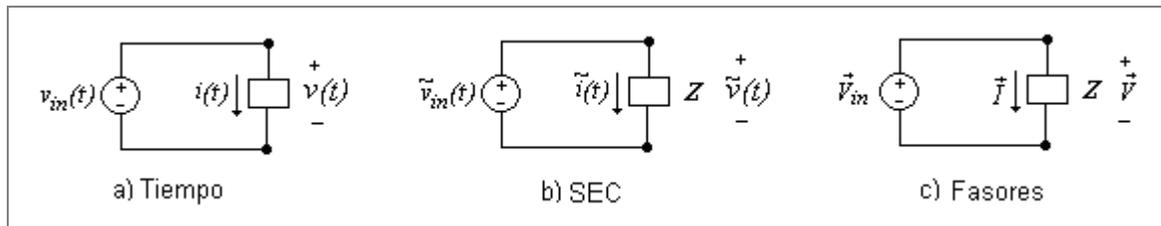


Figura 10-3

$$Z = \frac{\tilde{v}(t)}{\tilde{i}(t)} = \frac{\vec{V} \cdot e^{j\omega t}}{\vec{I} \cdot e^{j\omega t}} = \frac{\vec{V}}{\vec{I}}$$

Dado que la impedancia es la relación de dos fasores, que son complejos, la impedancia será también un complejo, el cual por supuesto tendrá magnitud y fase:

$$Z = |Z| \angle \theta_z$$

## 10.3.1. IMPEDANCIA DE UN CONDENSADOR

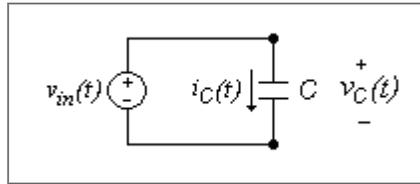


Figura 10-4

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$\tilde{i}_C(t) = C \frac{d\tilde{v}_C(t)}{dt}$$

$$\tilde{i}_C(t) = I_C e^{j\omega t} = C \frac{d\tilde{v}_C(t)}{dt} = C \frac{d(\tilde{V}_C e^{j\omega t})}{dt} = C\tilde{V}_C [j\omega e^{j\omega t}]$$

$$I_C e^{j\omega t} = C\tilde{V}_C [j\omega e^{j\omega t}]$$

$$I_C = C\tilde{V}_C [j\omega]$$

$$\frac{\tilde{V}_C}{I_C} = \frac{1}{j\omega C}$$

$$Z_C = \frac{\tilde{V}_C}{I_C} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ$$

La magnitud de la impedancia es  $1/\omega C$  y su fase  $-90^\circ$ .

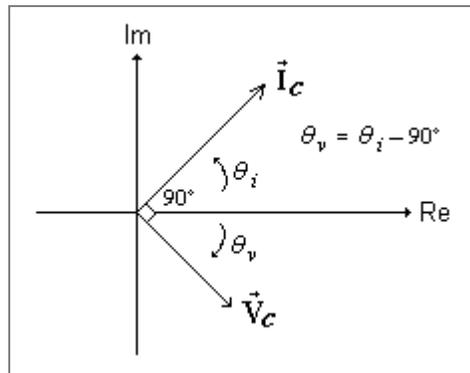


Figura 10-5

El fasor de corriente  $\vec{I}_C$  en un condensador está en adelanto con respecto al fasor de voltaje.

## 10.3.2. IMPEDANCIA DE UNA INDUCTANCIA

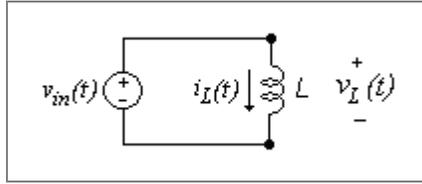


Figura 10-6

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$\tilde{v}_L(t) = L \frac{d\tilde{i}_L(t)}{dt}$$

$$\tilde{v}_L(t) = \tilde{V}_L e^{j\omega t} = L \frac{d\tilde{i}_L(t)}{dt} = L \frac{d(\tilde{I}_L e^{j\omega t})}{dt} = L \tilde{I}_L [j\omega e^{j\omega t}]$$

$$\tilde{V}_L e^{j\omega t} = L \tilde{I}_L [j\omega e^{j\omega t}]$$

$$\tilde{V}_L = L \tilde{I}_L [j\omega]$$

$$\frac{\tilde{V}_L}{\tilde{I}_L} = j\omega L$$

$$Z_L = \frac{\tilde{V}_L}{\tilde{I}_L} = j\omega L = \omega L \angle 90^\circ$$

La magnitud de la impedancia es  $\omega L$  y su fase  $90^\circ$ .

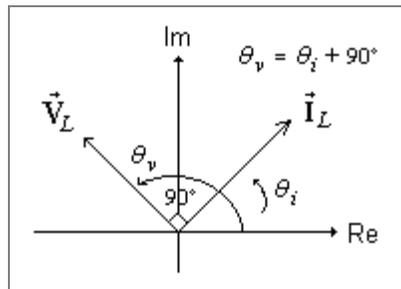


Figura 10-7

El fasor de corriente  $\tilde{I}_L$  en una inductancia está en retraso con respecto al fasor de voltaje.

### 10.3.3. IMPEDANCIA DE UNA RESISTENCIA

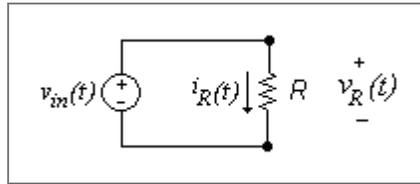


Figura 10-8

$$v_R(t) = Ri_R(t)$$

$$\tilde{v}_R(t) = R\tilde{i}_R(t)$$

$$\tilde{v}_R(t) = \tilde{V}_R e^{j\omega t} = R\tilde{i}_R(t) = R\tilde{I}_R e^{j\omega t}$$

$$\tilde{V}_R e^{j\omega t} = R\tilde{I}_R e^{j\omega t}$$

$$\tilde{V}_R = R\tilde{I}_R$$

$$\frac{\tilde{V}_R}{\tilde{I}_R} = R$$

$$Z_R = \frac{\tilde{V}_R}{\tilde{I}_R} = R = R \angle 0^\circ$$

La magnitud de la impedancia es  $R$  y su fase  $0^\circ$ .

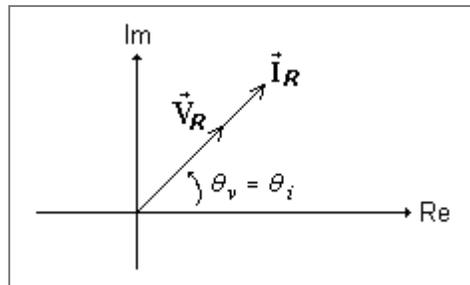


Figura 10-9

El fasor de corriente  $\tilde{I}_R$  en una resistencia está en fase con respecto al fasor de voltaje. En este caso la impedancia no depende de la frecuencia.

### 10.3.4. ADMITANCIA FASORIAL

Así como se define la relación de voltaje a corriente como la Impedancia se define su inverso y se denomina *Admitancia*  $Y$ :

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{\tilde{i}(t)}{\tilde{v}(t)} = \frac{\tilde{I}}{\tilde{V}}$$

**10.3.5. COMPORTAMIENTO DE LAS IMPEDANCIAS CON LA FRECUENCIA**

Como vimos anteriormente la impedancia de una capacitancia o una inductancia es función de la frecuencia, de manera que con frecuencia esta impedancia **Z** se escribe como **Z(jω)**.

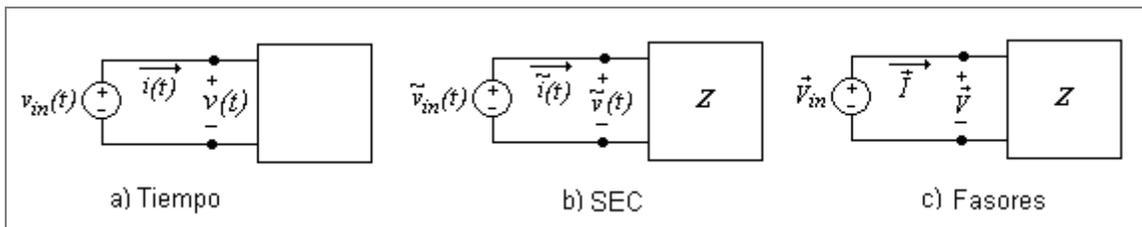
La siguiente tabla muestra el comportamiento de la magnitud de la impedancia de cada elemento al variar la frecuencia entre cero (señal DC) y una alta frecuencia (señal AC de alta frecuencia).

**Tabla 10-1.**

	$Z(j\omega)$	$Y(j\omega)$	$ Z(\omega \rightarrow 0) $	$ Z(\omega \rightarrow \infty) $
<i>R</i>	<i>R</i>	$\frac{1}{R}$	<i>R</i>	<i>R</i>
<i>L</i>	$\frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ$	$j\omega C$	$\infty$ <i>Circuito Abierto</i>	$0$ <i>Corto Circuito</i>
<i>C</i>	$j\omega L = \omega L \angle 90^\circ$	$\frac{1}{j\omega L} = -j \frac{1}{\omega L}$	$0$ <i>Corto Circuito</i>	$\infty$ <i>Circuito Abierto</i>

**10.3.6. IMPEDANCIA FASORIAL GENERALIZADA**

En las secciones anteriores se presentó el concepto de impedancia de un elemento R, L o C. Al interconectar varios elementos de este tipo podemos tener un circuito de dos terminales para el cual podemos calcular su relación entre voltaje y corriente y por tanto encontrar una impedancia fasorial equivalente del circuito de dos terminales.



**Figura 10-10**

Nuevamente definimos la impedancia generalizada de un circuito de dos terminales como:

$$Z = \frac{\tilde{v}(t)}{\tilde{i}(t)} = \frac{\tilde{V}}{\tilde{I}} = |Z| \angle \theta_z$$

Dado que la impedancia es la relación de dos fasores esta será también un fasor, el cual por supuesto tendrá magnitud y fase o una parte real y otra imaginaria, ya que el fasor se expresa como un número complejo:

$$Z = |Z| \angle \theta_z = R + jX$$

Recordando que la impedancia también depende de la frecuencia (para los componentes L y C) podemos escribir:

$$Z(\omega) = |Z(\omega)| \angle \theta_z(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

El término  $R(\omega)$  se conoce como la *Resistencia AC* y el término  $X(\omega)$  se conoce como la *Reactancia AC*.

### Ejemplo 10-1. Impedancia RLC en serie y frecuencia de resonancia.

Para el siguiente circuito encontrar:

- La impedancia del circuito de dos terminales de la figura (a) en forma rectangular y polar.
- La frecuencia de resonancia del circuito.

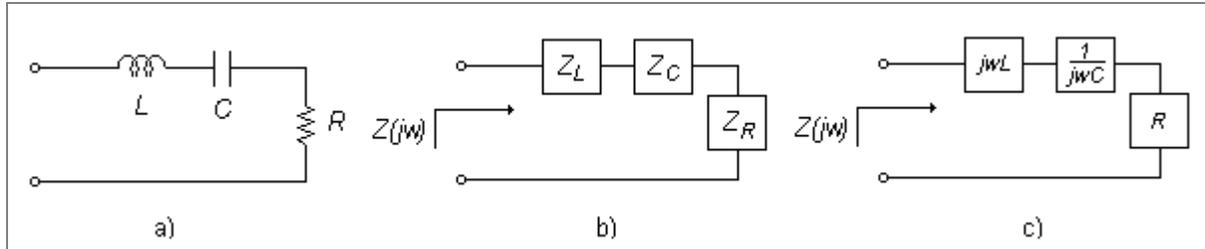


Figura 10-11

### Solución

#### Parte a)

$$Z(\omega) = Z_L + Z_C + Z_R = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R$$

$$Z(\omega) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + j\left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}\right)$$

La anterior es la forma rectangular de la impedancia, donde la resistencia y la reactancia AC son respectivamente:

$$R(\omega) = R \text{ y } X(\omega) = \left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}\right)$$

Expresándolo en forma polar  $Z = |Z| \angle \theta_z$  tenemos:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}\right)^2} \quad \text{y} \quad \theta_z = \tan^{-1}\left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega RC}\right)$$

### Parte b)

La frecuencia de resonancia  $\omega_r$  es aquella frecuencia para la cual la reactancia es cero:

$$X(\omega_r) = \left(\frac{\omega_r^2 LC - 1}{\omega_r C}\right) = 0$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\omega_r^2 LC - 1 &= 0 \\ \omega_r^2 LC &= 1 \\ \omega_r &= \frac{1}{\sqrt{LC}}\end{aligned}$$

Por lo tanto la impedancia en resonancia es:

$$Z(\omega_r) = |Z(\omega_r)| \angle \theta_z(\omega_r) = R(\omega_r) + jX(\omega_r) = R(\omega_r) = R$$

y así

$$\begin{aligned}|Z(\omega_r)| &= R \\ \theta_z(\omega_r) &= \tan^{-1}(0) = 0^\circ\end{aligned}$$

Lo anterior muestra que cuando hay resonancia el circuito se comporta puramente resistivo y por lo tanto la corriente y el voltaje están en fase. Esto se comprueba por el hecho de que la fase de la impedancia es cero y recordando que  $\vec{V} / \vec{I} = |Z| \angle \theta_z$  implica que para que las fases de  $\vec{V}$  y de  $\vec{I}$  deben ser iguales, lo que comprueba que están en fase.

Como se ve en este caso la frecuencia de resonancia depende de  $L$  y de  $C$  pero no de  $R$ .

## Problema 1

Para el ejemplo anterior con  $R=100$ ,  $L=0.1$  y  $C=2$  encontrar:

- $Z(\omega)$  en forma polar y rectangular si  $f = 60\text{Hz}$
- La frecuencia de resonancia y  $Z(\omega_r)$  en forma polar y rectangular.
- Si  $v_{in}(t) = 120\cos(\omega t + 50^\circ)$  y  $f = 60\text{Hz}$  calcular los fasores de voltaje  $V_{in}$ ,  $V_L$ ,  $V_C$ ,  $V_R$ , y los respectivos voltajes en el tiempo  $v_L(t)$ ,  $v_C(t)$  y  $v_R(t)$ .

d. Encontrar la corriente en el tiempo  $i(t)$  si  $f = 60\text{Hz}$ .

**Problema 2**

Encontrar la impedancia del siguiente circuito de dos terminales:

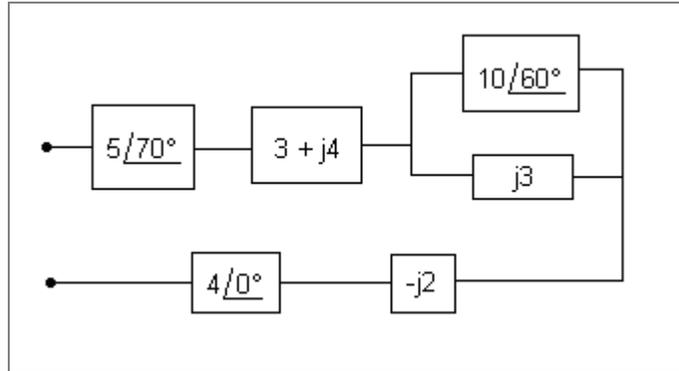


Figura 10-12

**Ejemplo 10-2. Impedancia en Amplificadores Operacionales.**

Encontrar  $\mathbf{V}_o$  y  $v_o(t)$  si  $v_i(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_i)$ .

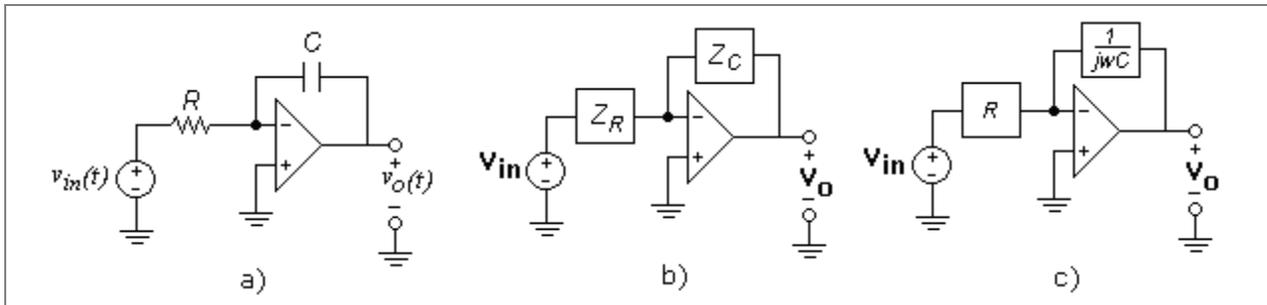


Figura 10-13

**Solución**

Con respecto a la figura (b) en la que el amplificador operacional está en configuración de inversor tenemos:

$$\frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_{in}} = -\frac{Z_C}{Z_R} = -\frac{1/j\omega C}{R} = -\frac{1}{j\omega RC} = j\frac{1}{\omega RC}$$

Como  $v_i(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_i)$  su fasor asociado es  $\mathbf{V}_i = V_i \angle \theta_i$

$$\mathbf{V}_o = j\frac{1}{\omega RC} \mathbf{V}_{in} = j\frac{1}{\omega RC} (V_{in} \angle \theta_i) = \frac{V_{in}}{\omega RC} \angle (\theta_i + 90^\circ)$$

Por tanto la señal en el tiempo asociada a este fasor es:

$$v_o(t) = \frac{V_{in}}{\omega RC} \cos(\theta_i + 90^\circ)$$

### Ejemplo 10-3. Circuito trifásico balanceado.

Para el siguiente circuito, que representa un sistema trifásico balanceado:

- Calcular los fasores VAB, VBC y VCA en forma rectangular y polar.
- Mostrar que la magnitud de las corrientes es igual a  $|I_A| = |I_{AB}|(\sqrt{3})$ .

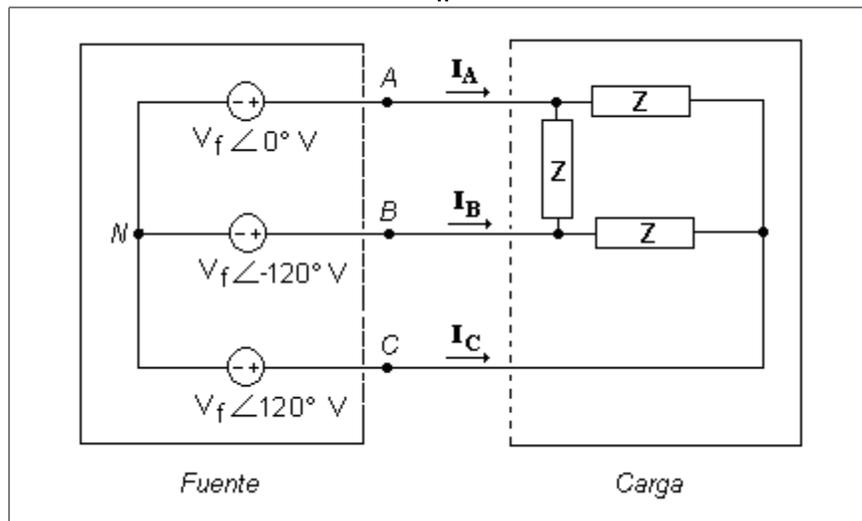


Figura 10-14

### Solución

#### Parte a)

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{AB} &= \mathbf{V}_{AN} + \mathbf{V}_{NB} \\ &= V_f \angle 0^\circ + (-V_f \angle -120^\circ) \\ &= V_f [1 - \cos(-120^\circ) - j \cdot \sin(-120^\circ)] \\ &= V_f \left[ 1 - (-0.5) - j \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] \\ &= V_f \left[ 1.5 + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \text{ (forma rectangular)} \\ &= V_f \sqrt{3} \angle 30^\circ \text{ (forma polar)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{BC} &= \mathbf{V}_{BN} + \mathbf{V}_{NC} \\
&= V_f \angle -120^\circ + (-V_f \angle 120^\circ) \\
&= V_f [\cos(-120^\circ) + j \operatorname{sen}(-120^\circ) - \cos(120^\circ) - j \operatorname{sen}(120^\circ)] \\
&= V_f [j \operatorname{sen}(-120^\circ) - j \operatorname{sen}(120^\circ)] \\
&= V_f \left[ -j \frac{\sqrt{3}}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \\
&= V_f [-j\sqrt{3}] \\
&= V_f \sqrt{3} \angle -90^\circ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{CA} &= \mathbf{V}_{CN} + \mathbf{V}_{NA} \\
&= V_f \angle 120^\circ + (-V_f \angle 0^\circ) \\
&= V_f [\cos(120^\circ) + j \operatorname{sen}(120^\circ) - 1] \\
&= V_f \left[ -0.5 + j \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right] \\
&= V_f \left[ -1.5 + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \\
&= V_f \sqrt{3} \angle 150^\circ
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$|\mathbf{V}_{AB}| = |\mathbf{V}_{BC}| = |\mathbf{V}_{CA}| = V_f \sqrt{3} = V_L = V_{AN} \sqrt{3}$$

Los fasores  $\mathbf{V}_{AB}$ ,  $\mathbf{V}_{BC}$  y  $\mathbf{V}_{CA}$  se conocen como los voltajes de línea y los fasores  $\mathbf{V}_{AN}$ ,  $\mathbf{V}_{BN}$  y  $\mathbf{V}_{CN}$  se conocen como los voltajes de fase o de línea a neutro con magnitud  $V_f$ . Como se ve el voltaje de línea para esta configuración es  $V_L = V_f \sqrt{3}$ . Este tema se tratará a fondo más adelante en otro capítulo.

**Parte b)**

$$\begin{aligned}
I_A &= I_{AB} - I_{CA} \\
&= \frac{V_{AB}}{Z} - \frac{V_{CA}}{Z} \\
V_{AB} &= V_f \sqrt{3} \angle 30^\circ \\
V_{CA} &= V_f \sqrt{3} \angle 150^\circ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_A &= \frac{V_f \sqrt{3} \angle 30^\circ}{Z} - \frac{V_f \sqrt{3} \angle 150^\circ}{Z} \\
 &= \frac{V_f \sqrt{3}}{Z} (1 \angle 30^\circ - 1 \angle 150^\circ) \\
 &= \frac{V_f \sqrt{3}}{Z} (\cos(30^\circ) + j \operatorname{sen}(30^\circ) - \cos(150^\circ) - j \operatorname{sen}(150^\circ)) \\
 &= \frac{V_f \sqrt{3}}{Z} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - j \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{V_f \sqrt{3}}{Z} (\sqrt{3}) \\
 |I_A| &= \left| \frac{V_f \sqrt{3}}{Z} (\sqrt{3}) \right| = \left| \frac{V_{AB}}{Z} (\sqrt{3}) \right| = |I_{AB}| (\sqrt{3}) \\
 |I_A| &= |I_{AB}| (\sqrt{3})
 \end{aligned}$$

#### Ejemplo 10-4. Impedancia y función de transferencia en función de $\omega$ .

Para el circuito de la Figura 10-15 con voltaje de entrada AC:

- Encontrar la impedancia vista por la fuente en función de  $\omega$ , R, C y L.
- Encontrar la función de transferencia  $H(\omega) = V_{out} / V_{in}$ .
- Encontrar la frecuencia  $\omega_1$  para la cual la magnitud de  $V_{out}$  es igual a la magnitud de  $V_{in}$ .
- Encontrar la frecuencia  $\omega_m$  para la cual la magnitud de  $H(\omega)$  tiene un máximo.
- Graficar la magnitud y la fase del  $H(\omega)$  si  $R = 10 \Omega$ ,  $C = 5 \text{ mF}$  y  $L = 5 \text{ mH}$  y calcular  $\omega_m$ .

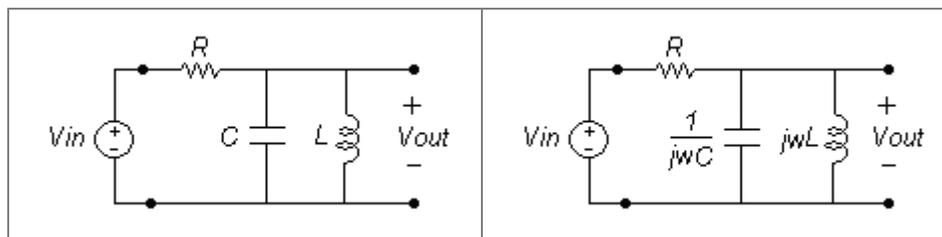


Figura 10-15

**Solución****Parte a)**

$$Z = R + \left( \frac{1}{j\omega C} \right) // (j\omega L) = R + \frac{\left( \frac{1}{j\omega C} \right) \cdot (j\omega L)}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L} = R + j \left( \frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC} \right)$$

$$Z = R + j \left( \frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC} \right) = \sqrt{R^2 + \left( \frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC} \right)^2} \angle \tan^{-1} \left( \frac{\omega L}{R(1 - \omega^2 LC)} \right)$$

**Parte b)**

Usando divisor de voltaje tenemos:

$$V_{out} = V_{in} \left( \frac{\left( \frac{1}{j\omega C} \right) // (j\omega L)}{R + \left( \frac{1}{j\omega C} \right) // (j\omega L)} \right) = V_{in} \left( \frac{\left( \frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC} \right)}{R + \left( \frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC} \right)} \right) = V_{in} \left( \frac{j\omega L}{R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L} \right)$$

$$H(\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{j\omega L}{R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L}$$

La magnitud será:

$$|H(\omega)| = \frac{\omega L}{\sqrt{[R(1 - \omega^2 LC)]^2 + (\omega L)^2}}$$

y la fase:

$$\angle H(\omega) = \angle j\omega L - \angle \{R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L\} = 90^\circ - \tan^{-1} \left( \frac{\omega L}{R(1 - \omega^2 LC)} \right)$$

$$\angle H(\omega) = 90^\circ - \tan^{-1} \left( \frac{\omega L}{R(1 - \omega^2 LC)} \right)$$

En forma polar tenemos:

$$H(\omega) = |H(\omega)| \angle \angle H(\omega) = \frac{j\omega L}{\sqrt{[R(1 - \omega^2 LC)]^2 + (j\omega L)^2}} \angle \left( 90^\circ - \tan^{-1} \left( \frac{\omega L}{R(1 - \omega^2 LC)} \right) \right)$$

**Parte d)**

Para que las dos magnitudes sean iguales se requiere que  $|H(\omega_1)| = V_{out}/V_{in} = 1$

$$|H(\omega_1)| = \frac{\omega_1 L}{\sqrt{[R(1 - \omega_1^2 LC)]^2 + (\omega_1 L)^2}} = 1$$

$$\omega_1 L = \sqrt{[R(1 - \omega_1^2 LC)]^2 + (\omega_1 L)^2}$$

$$(\omega_1 L)^2 = [R(1 - \omega_1^2 LC)]^2 + (\omega_1 L)^2$$

$$0 = [R(1 - \omega_1^2 LC)]^2$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

**Parte d)**

Para encontrar la frecuencia  $\omega_m$  para la cual la magnitud de  $H(\omega)$  tiene un máximo vamos a derivar  $|H(\omega)|$  con respecto a  $\omega$  e igualamos a cero:

$$\left. \frac{d|H(\omega)|}{d\omega} = \frac{d\left( \frac{\omega L}{\sqrt{[R(1 - \omega^2 LC)]^2 + (\omega L)^2}} \right)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_1} = 0$$

Resolviendo esta ecuación llegamos a que

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_1$$

**Parte e)**

$$\omega_m = \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(0.005H)(0.005F)}} = 200 \text{ rad/seg}$$

Usando las expresiones encontradas para la magnitud y para la fase, y haciendo variar  $\omega$  tenemos:

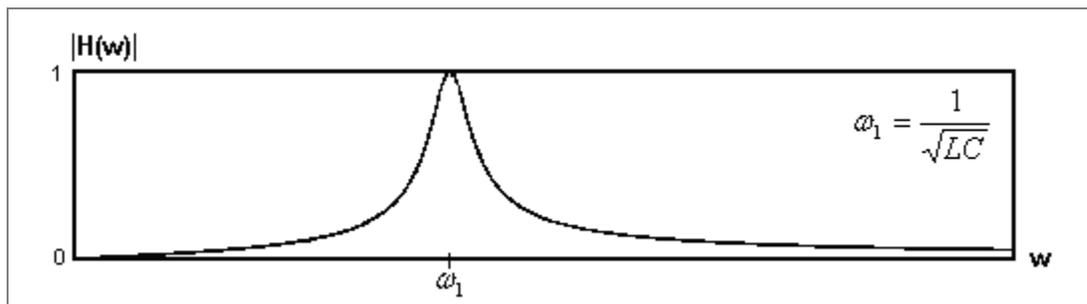


Figura 10-16

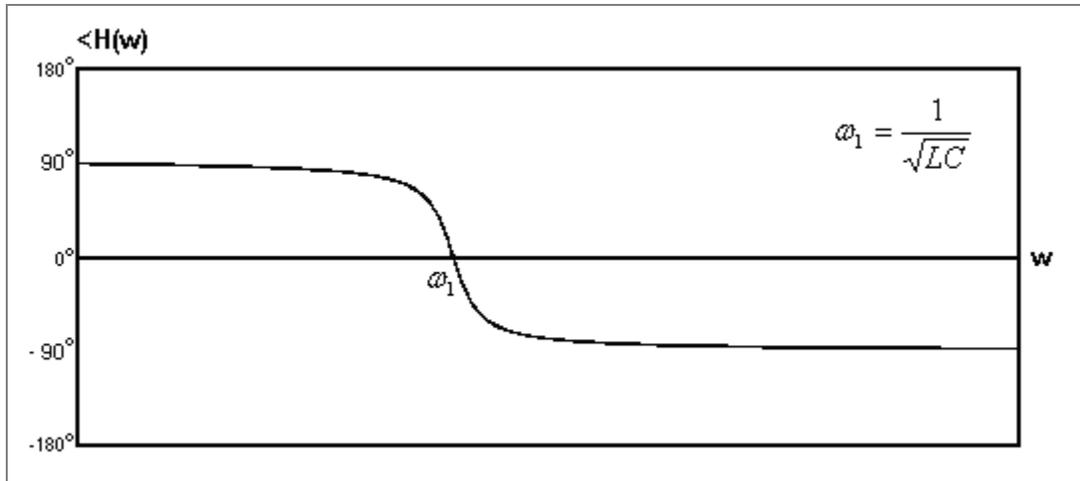


Figura 10-17

### Ejemplo 10-5. Impedancia y frecuencia de resonancia.

Para el circuito de la Figura 10-18:

- Encontrar la impedancia vista por la fuente.
- Encontrar la frecuencia de resonancia en función de  $R$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  y  $L$ .
- Encontrar el circuito equivalente en DC y en alta frecuencia.

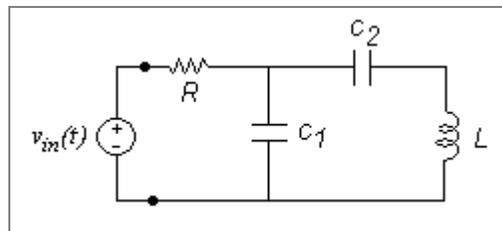


Figura 10-18

### Solución

#### Parte a)

$$\begin{aligned}
 Z &= R + \left( \frac{1}{j\omega C_1} \right) // \left( j\omega L + \frac{1}{j\omega C_2} \right) = R + \frac{\left( \frac{1}{j\omega C_1} \right) \cdot \left( j\omega L + \frac{1}{j\omega C_2} \right)}{\frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L + \frac{1}{j\omega C_2}} = R + \frac{(j\omega L)(j\omega C_2) + 1}{j\omega C_2 + j\omega C_1 + j\omega L(-\omega^2 C_1 C_2)} \\
 &= R + \frac{1 - \omega^2 LC_2}{j \cdot [-\omega^3 LC_1 C_2 + \omega(C_2 + C_1)]} = R + \frac{1 - \omega^2 LC_2}{-j\omega \cdot [\omega^2 LC_1 C_2 - (C_1 + C_2)]} \\
 &= R + j \frac{1 - \omega^2 LC_2}{\omega \cdot [\omega^2 LC_1 C_2 - (C_1 + C_2)]}
 \end{aligned}$$

**Parte b)**

$$Z = R(\omega) + jX(\omega)$$

$$X(\omega_{res}) = 0 = \frac{1 - \omega_{res}^2 LC_2}{\omega_{res} \cdot [\omega_{res}^2 LC_1 C_2 - (C_1 + C_2)]} \Rightarrow \omega_{res} = \frac{1}{\sqrt{LC_2}}$$

**Parte c)**

En la Figura 10-19 se puede ver el circuito para DC y para frecuencias altas equivalente.

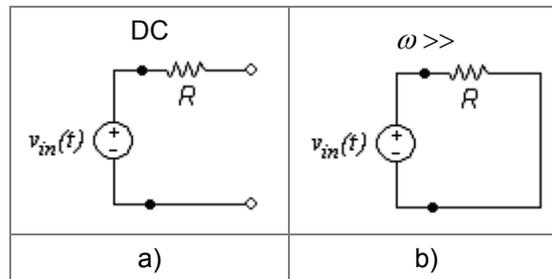


Figura 10-19

### Ejemplo 10-6. Impedancia y frecuencia de resonancia.

Dado los siguientes circuitos calcular:

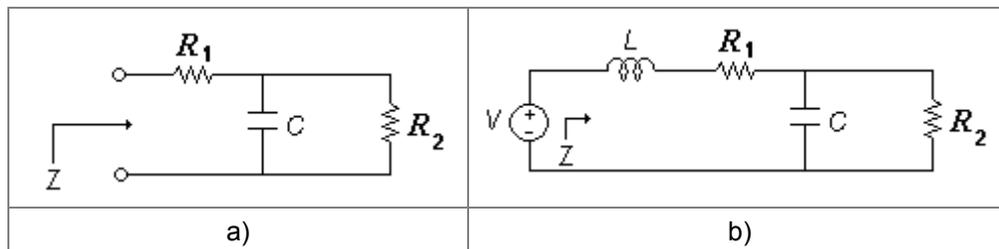


Figura 10-20

- La impedancia  $Z$  del circuito (a).
- La impedancia  $Z$  del circuito (b).
- La frecuencia de resonancia  $\omega_{res}$  del circuito (b) en función de  $L$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  y  $C$ .
- La frecuencia de resonancia  $\omega_{res}$  reemplazando los valores dados  $R_1 = 1\text{k}\Omega$ ,  $R_2 = 5\text{k}\Omega$ ,  $C = 2\mu\text{F}$  y  $L = 1\text{mH}$ .
- La impedancia para la frecuencia de resonancia  $\omega_{res}$ .

**Solución****Parte a)**

$$\begin{aligned}
Z &= R_1 + (Z_C // Z_{R_2}) = R_1 + \left( \frac{1}{j\omega C} // R_2 \right) \\
&= R_1 + \left( \frac{\frac{1}{j\omega C} \cdot R_2}{\frac{1}{j\omega C} + R_2} \right) \left( \frac{j\omega C}{j\omega C} \right) = R_1 + \frac{R_2}{1 + j\omega CR_2} \\
&= R_1 + \frac{R_2}{1 + j\omega CR_2} \cdot \frac{1 - j\omega CR_2}{1 - j\omega CR_2} = R_1 + \frac{R_2 - j\omega CR_2^2}{1 + (\omega CR_2)^2} \\
&= R_1 + \frac{R_2}{1 + (\omega CR_2)^2} - j \cdot \left( \frac{\omega CR_2^2}{1 + (\omega CR_2)^2} \right) \\
Z &= R(\omega) + jX(\omega)
\end{aligned}$$

$$\boxed{R(\omega) = R_1 + \frac{R_2}{1 + (\omega CR_2)^2}}$$

$$\boxed{X(\omega) = \frac{-\omega CR_2^2}{1 + (\omega CR_2)^2}}$$

**Parte b)**

La impedancia es la misma del punto anterior más la impedancia de la inductancia.

$$\begin{aligned}
Z &= j\omega L + R_1 + \frac{R_2}{1 + (\omega CR_2)^2} - j \cdot \left( \frac{\omega CR_2^2}{1 + (\omega CR_2)^2} \right) \\
Z &= R(\omega) + jX(\omega)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(\omega) &= R_1 + \frac{R_2}{1 + (\omega CR_2)^2} \\
X(\omega) &= \omega L - \frac{\omega CR_2^2}{1 + (\omega CR_2)^2}
\end{aligned}$$

**Parte c)**

$$\begin{aligned}
X(\omega_{\text{res}}) &= 0 \Rightarrow \omega_{\text{res}} L - \frac{\omega_{\text{res}} CR_2^2}{1 + (\omega_{\text{res}} CR_2)^2} = 0 \\
\omega_{\text{res}} L &= \frac{\omega_{\text{res}} CR_2^2}{1 + (\omega_{\text{res}} CR_2)^2} \\
\omega_{\text{res}} &= \frac{1}{CR_2} \sqrt{\frac{CR_2^2}{L} - 1}
\end{aligned}$$

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{(CR_2)^2}}$$

Parte d)

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{1}{1 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^{-6}} - \frac{1}{(2 \times 10^{-6} \times 5 \times 10^3)^2}} = 22360 \text{ rad/seg}$$

Parte e)

$$R(\omega_{\text{res}}) = R_1 + \frac{R_2}{1 + (\omega_{\text{res}} CR_2)^2} = 1000 + \frac{2000}{1 + (22360 \times 2 \times 10^{-6} \times 5 \times 10^3)^2}$$

$$= 1000.1 \Omega$$

$$Z(\omega_{\text{res}}) = R(\omega_{\text{res}}) = 1000.1 \Omega$$

Como está en resonancia el ángulo de fase es cero.

### Ejemplo 10-7. Fasores y fuentes controladas.

Dado el siguiente circuito:

- Encontrar una expresión para  $i_x(t)$  si  $V_i(t) = 10\cos(120t + 50^\circ)\text{V}$
- Calcular  $i_x(t)$  si  $R = 1\text{k}\Omega$ ,  $C = 2\mu\text{F}$  y  $L = 1\text{mH}$

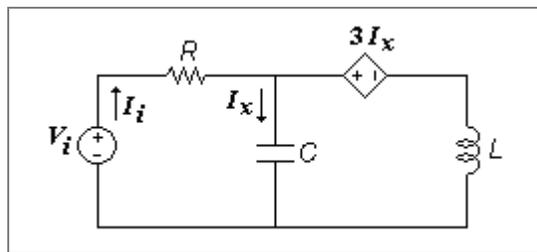


Figura 10-21

Solución

Parte a)

El equivalente del circuito se presenta en la siguiente figura:

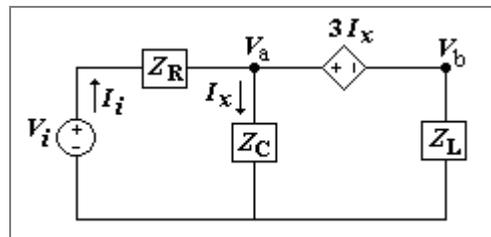


Figura 10-22

$$V_a = V_b + 3I_X \Rightarrow V_b = V_a - 3I_X$$

$$V_a = V_b + 3I_X \Rightarrow V_b = V_a - 3I_X$$

$$\frac{V_a - V_i}{Z_R} + \frac{V_a}{Z_C} + \frac{V_b}{Z_L} = 0$$

$$V_a \left( \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_C} \right) - \frac{V_i}{Z_R} + \frac{V_a - 3I_X}{Z_L} = 0$$

$$V_a \left( \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_C} \right) - \frac{V_i}{Z_R} + \frac{V_a}{Z_L} - \frac{3}{Z_L} \left( \frac{V_a}{Z_C} \right) = 0$$

$$V_a \left( \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L} - \frac{3}{Z_L Z_C} \right) = \frac{V_i}{Z_R}$$

$$V_a = \frac{V_i}{Z_R \left( \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L} - \frac{3}{Z_L Z_C} \right)}$$

$$I_X = \frac{V_a}{Z_C} = \frac{V_i}{Z_C Z_R \left( \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L} - \frac{3}{Z_L Z_C} \right)}$$

$$I_X = \frac{Z_L \cdot V_i}{Z_C Z_L + Z_L Z_R + Z_C Z_R - 3Z_R}$$

$$= \frac{j\omega L}{\frac{j\omega L}{j\omega C} + j\omega RL + \frac{R}{j\omega C} - 3R} V_i$$

$$= \frac{j\omega L}{\frac{L}{C} + j\omega RL - j\frac{R}{\omega C} - 3R} V_i$$

$$I_X = \frac{j\omega^2 LC}{(\omega L - 3\omega RC) + j \cdot (\omega^2 RLC - R)} V_i$$

$$V_i(t) = 10 \cos(120t + 50^\circ) \text{ V} \Rightarrow \mathbf{V}_i = 10 \angle 50^\circ \quad \omega = 120$$

### Parte b:

Si  $R=1\text{k}\Omega$ ,  $C=2\mu\text{F}$  y  $L=1\text{mH}$

$$I_X = \frac{j(120)^2 (1 \times 10^{-3}) (2 \times 10^{-6})}{(120 \times 10^{-3} - 3 \cdot (120) \times 10^{-3} \times 2 \times 10^{-6}) + j \cdot (120^2 \times 10^3 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^{-6} - 10^3)} V_i$$

$$= \frac{j \cdot 2.88 \times 10^{-5}}{-0.6 + j \cdot (-1000)} \cdot 10 \angle 50^\circ = \frac{(2.88 \times 10^{-5} \angle 90^\circ) \cdot (10 \angle 90^\circ)}{-1000 \angle 90^\circ}$$

$$\mathbf{I}_X = 2.88 \times 10^{-7} \angle -90^\circ$$

$$i_X(t) = 2.88 \times 10^{-7} \cos(120t - 90^\circ)$$

### Ejemplo 10-8. Fasores y resonancia.

Dado el siguiente circuito con entrada AC, para la cual  $i(t)$  y  $v(t)$  están en fase, encontrar:

- Una expresión para  $\omega_{res}$ .
- La magnitud de la corriente sabiendo que  $V_{pico}$  es 10V.
- Calcular los valores numéricos de (a) y (b) si  $L = 1\text{H}$ ,  $R_1 = 2\Omega$ ,  $R_2 = 1\Omega$  y  $C = 1/5\text{F}$ .

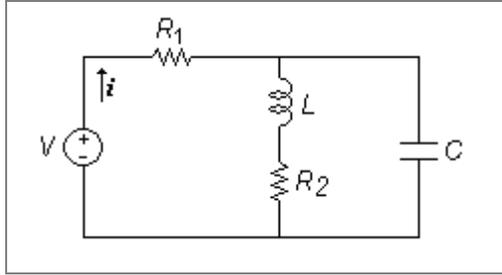


Figura 10-23

### Solución

#### Parte a)

$$\mathbf{V} = V_m \angle \theta_V$$

$$\mathbf{I} = I_m \angle \theta_i$$

Cuando voltaje y corriente están en fase  $\theta_V = \theta_i$ .

$$\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = Z_m \angle \theta_Z = \frac{V_m \angle \theta_V}{I_m \angle \theta_i} = \frac{V_m}{I_m} \angle (\theta_V - \theta_i) = \frac{V_m}{I_m} \angle 0^\circ \Rightarrow$$

$$Z_m = \frac{V_m}{I_m} \quad \theta_Z = 0^\circ \quad X(\omega_{res}) = 0$$

$$Z = R_1 + (Z_L + Z_{R_2}) // Z_C$$

$$= R_1 + \frac{Z_C(Z_L + R_2)}{R_2 + Z_L + Z_C} = R_1 + \frac{Z_L Z_C + R_2 Z_C}{R_2 + Z_L + Z_C} = R_1 + \frac{\frac{j\omega L}{j\omega C} + \frac{R_2}{j\omega C}}{R_2 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \left( \frac{j\omega C}{j\omega C} \right)$$

$$= R_1 + \frac{R_2 + j\omega L}{(1 - \omega^2 LC) + j(\omega R_2 C)} = R_1 + \frac{R_2 + j\omega L}{(1 - \omega^2 LC) + j(\omega R_2 C)} \cdot \frac{(1 - \omega^2 LC) - j(\omega R_2 C)}{(1 - \omega^2 LC) - j(\omega R_2 C)}$$

$$\text{Como } \frac{a + jb}{c + jd} = \frac{a + jb}{c + jd} \cdot \frac{c - jd}{c - jd} = \frac{(ac + bd) + j(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{a + jb}{c + jd}\right) = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} = 0 \Rightarrow bc - ad = 0$$

Para este caso:  $a = R_2$   $b = \omega_{res} L$   $c = 1 - \omega_{res}^2 LC$   $d = \omega_{res} R_2 C$

Reemplazando se obtiene:

$$\begin{aligned} bc - ad &= 0 \\ (\omega_{res} L)(1 - \omega_{res}^2 LC) - (R_2)(\omega_{res} R_2 C) &= 0 \\ L(1 - \omega_{res}^2 LC) - R_2^2 C &= 0 \\ L - \omega_{res}^2 L^2 C - R_2^2 C &= 0 \\ \omega_{res}^2 L^2 C &= L - R_2^2 C \\ \omega_{res}^2 &= \frac{1}{LC} - \left(\frac{R_2}{L}\right)^2 \\ \omega_{res} &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_2}{L}\right)^2} \end{aligned}$$

**Parte b)**

$$I = \frac{V}{Z} \quad Z(\omega_0) = R(\omega_0) + jX(\omega_0) = R(\omega_0) = \operatorname{Re}(Z(\omega))$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(Z) &= R_1 + \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} = R_1 + \frac{(R_2)(1 - \omega^2 LC) + (\omega L)(\omega R_2 C)}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega R_2 C)^2} = R_1 + \frac{R_2 - \omega^2 R_2 LC + \omega^2 R_2 LC}{1 - 2\omega^2 LC + \omega^4 L^2 C^2 + \omega^2 R_2^2 C^2} \\ &= R_1 + \frac{R_2}{1 + \omega^2 (R_2^2 C^2 - 2LC) + \omega^4 L^2 C^2} \end{aligned}$$

Reemplazando por el valor de  $\omega$  encontrado en el numeral (a) se obtiene:

$$\operatorname{Re}(Z) = R_1 + \frac{R_2}{1 + \omega^2 (R_2^2 C^2 - 2LC) + \omega^4 L^2 C^2} \Big|_{\omega=\omega_0} = R_1 + \frac{R_2}{\frac{R_2^2 C}{L}} = R_1 + \frac{L}{R_2 C}$$

$$\boxed{Z(\omega_0) = R(\omega_0) + jX(\omega_0) = R(\omega_0) = R_1 + \frac{L}{R_2 C} = Z_0}$$

$$\mathbf{I}_0 = \frac{\mathbf{V}}{Z_0} = \frac{10 \angle \theta_V}{R_1 + \frac{L}{R_2 C}}$$

$$\boxed{I_{\text{pico}} = \frac{10}{R_1 + \frac{L}{R_2 C}}} \quad \boxed{\theta_i = \theta_V}$$

**Parte c)**

Con  $L=1\text{H}$ ,  $R_1=2\ \Omega$ ,  $R_2=1\ \Omega$ ,  $C = 1/5\text{F}$ .

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_2}{L}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{1/5} - \left(\frac{1}{1}\right)^2} = \sqrt{5-1}$$

$$\omega_0 = 2$$

$$I_{\text{pico}} = \frac{10}{R_1 + \frac{L}{R_2 C}} = \frac{10}{2 + \frac{1}{1(1/5)}}$$

$$I_{\text{pico}} = \frac{10}{7} \text{ A}$$

**Ejemplo 10-9. Fasores y resonancia.**

Una fuente con voltaje  $v_s(t) = 10 \cos(5t + 40^\circ) \text{ V}$  alimenta una impedancia con  $|Z| = 5\ \Omega$ . Calcular  $i_s(t)$  si se sabe que el circuito opera a la frecuencia de resonancia.

**Solución**

$$v_s(t) = 10 \cos(5t + 40^\circ) \text{ V} \Rightarrow \mathbf{V}_s = 10 \angle 40^\circ \quad \omega = 5$$

$$|Z| = 5\ \Omega$$

Si hay resonancia  $\mathbf{V}_s$  está en fase con  $\mathbf{I}_s$ :

$$\mathbf{I}_s = I_s \angle 40^\circ = \frac{\mathbf{V}_s}{Z} = \frac{10 \angle 40^\circ}{Z_m \angle \theta_z}$$

$$I_s = \frac{10}{|Z|} = \frac{10}{5} = 2$$

$$40^\circ = 40^\circ - \theta_z \Rightarrow \theta_z = 0^\circ$$

por lo tanto,

$$\mathbf{I}_s = 2 \angle 40^\circ \Rightarrow i_s(t) = 2 \cos(5t + 40^\circ)$$

**Ejemplo 10-10. Fasores y w.**

Para la red mostrada en la siguiente figura, con señal de entrada AC:

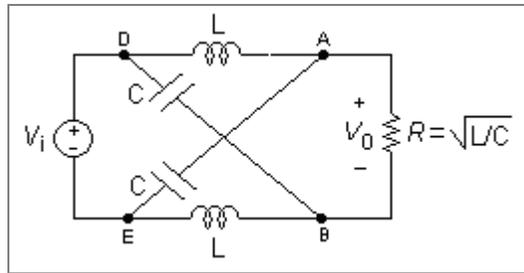


Figura 10-24

- Demstrar que  $|V_o|=|V_i|$  independientemente de la frecuencia.
- Dar una explicación física a lo anterior.
- Mostrar que la fase entre  $V_o$  y  $V_i$  cambia de  $0^\circ$  a  $-180^\circ$  al variar la frecuencia entre cero e infinito haciendo los cálculos necesarios y graficando la fase.

### Solución

#### Parte a)

Hay cuatro nodos pero uno es tierra (E) y otro es el de la fuente (D), por consiguiente, quedan dos nodos:

<i>nodo A:</i>	$\frac{V_A - V_i}{Z_L} + \frac{V_A}{Z_C} + \frac{V_A - V_B}{Z_R} = 0$ $V_A \left( \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_R} \right) - \frac{1}{Z_R} V_B = \frac{V_i}{Z_L}$
<i>nodo B:</i>	$\frac{V_B - V_A}{Z_R} + \frac{V_B - V_i}{Z_C} + \frac{V_B}{Z_L} = 0$ $-\frac{1}{Z_R} V_A + V_B \left( \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L} \right) = \frac{V_i}{Z_C}$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_R} & -\frac{1}{Z_R} \\ -\frac{1}{Z_R} & \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_L} \\ \frac{1}{Z_C} \end{bmatrix} V_i$$

Se necesita despejar  $V_A$  y  $V_B$  del sistema para obtener:

$$V_0 = V_A - V_B$$

Para un sistema:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

con  $a=d$  y  $b=c$  se tiene:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} u & b \\ v & a \end{vmatrix}}{a^2 - b^2} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & u \\ b & v \end{vmatrix}}{a^2 - b^2}$$

$$x_1 - x_2 = \frac{(au - bv) - (av - ub)}{a^2 - b^2} = \frac{a(u - v) + b(u - v)}{a^2 - b^2} = \frac{(u - v)(a + b)}{(a - b)(a + b)} = \frac{u - v}{a - b}$$

Aplicando esta solución al circuito se obtiene:

$$V_0 = V_A - V_B = V_i \frac{\frac{1}{Z_L} - \frac{1}{Z_C}}{\frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_R} - \frac{1}{Z_R}} = V_i \frac{\frac{1}{Z_L} - \frac{1}{Z_C}}{\frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} + \frac{2}{Z_R}} = V_i \frac{Y_L - Y_C}{Y_L + Y_C + 2Y_R}$$

$$V_0 = V_i \left[ \frac{\frac{1}{j\omega L} - j\omega C}{\frac{1}{j\omega L} + j\omega C + 2\sqrt{\frac{C}{L}}} \right] \cdot \frac{j\omega L}{j\omega L} = V_i \left[ \frac{1 + \omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC + j(2\omega\sqrt{LC})} \right]_{H(j\omega)}$$

$$V_0 = V_i \cdot H(j\omega)$$

$$|V_0| = |V_i| \cdot |H(j\omega)|$$

$$H(j\omega) = \frac{1 + \omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC + j(2\omega\sqrt{LC})}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1 + \omega^2 LC}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (2\omega\sqrt{LC})^2}} = \frac{1 + \omega^2 LC}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (2\omega\sqrt{LC})^2}}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1 + \omega^2 LC}{\sqrt{1 - 2\omega^2 LC + (\omega^2 LC)^2 + 4\omega^2 LC}}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1 + \omega^2 LC}{\sqrt{1 + 2\omega^2 LC + (\omega^2 LC)^2}} = \frac{1 + \omega^2 LC}{\sqrt{(1 + \omega^2 LC)^2}} = \frac{1 + \omega^2 LC}{1 + \omega^2 LC} = 1$$

$$\Rightarrow |V_0| = |V_i|$$

**Parte b)**

$$\angle V_0 = \angle(V_i \cdot H(j\omega)) = \angle V_i + \angle H(j\omega)$$

$$\begin{aligned}\phi &= \angle V_o - \angle V_i = \angle H(j\omega) = \angle(1 + \omega^2 LC) - \angle(1 - \omega^2 LC + j(2\omega\sqrt{LC})) \\ &= 0 - \angle(1 - \omega^2 LC + j(2\omega\sqrt{LC})) \\ &= -\tan^{-1}\left(\frac{2\omega\sqrt{LC}}{1 - \omega^2 LC}\right)\end{aligned}$$

Para  $\omega_0 = 0$ :

$$\phi = -\tan^{-1}(0) = 0^\circ$$

Para  $\omega_\infty \rightarrow \infty$ :

$$\phi = -\lim_{\omega \rightarrow \infty} \tan^{-1}\left(\frac{2\omega\sqrt{LC}}{1 - \omega^2 LC}\right) = -180^\circ$$

### Parte c)

A baja frecuencia ( $\omega \rightarrow 0$ ):

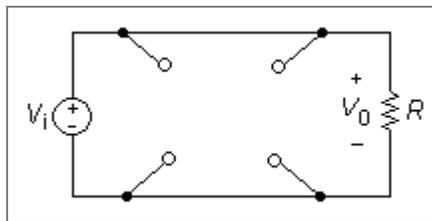


Figura 10-25

$$\begin{aligned}\phi &= \angle V_o - \angle V_i \\ \mathbf{V}_o &= \mathbf{V}_i \rightarrow \phi = 0\end{aligned}$$

A alta frecuencia ( $\omega \rightarrow \infty$ ):

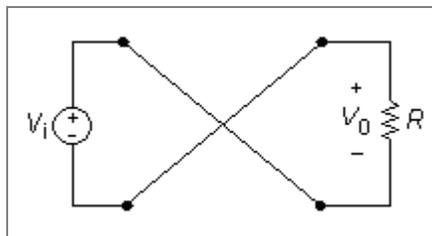


Figura 10-26

$$\begin{aligned}\phi &= \angle V_o - \angle V_i \\ \mathbf{V}_o &= -\mathbf{V}_i \rightarrow \angle V_o = \angle V_i - 180^\circ \rightarrow \phi = -180^\circ\end{aligned}$$

## 10.4. SIMULACIONES

### 10.4.1. SEÑAL EXPONENCIAL COMPLEJA Y FASORES.

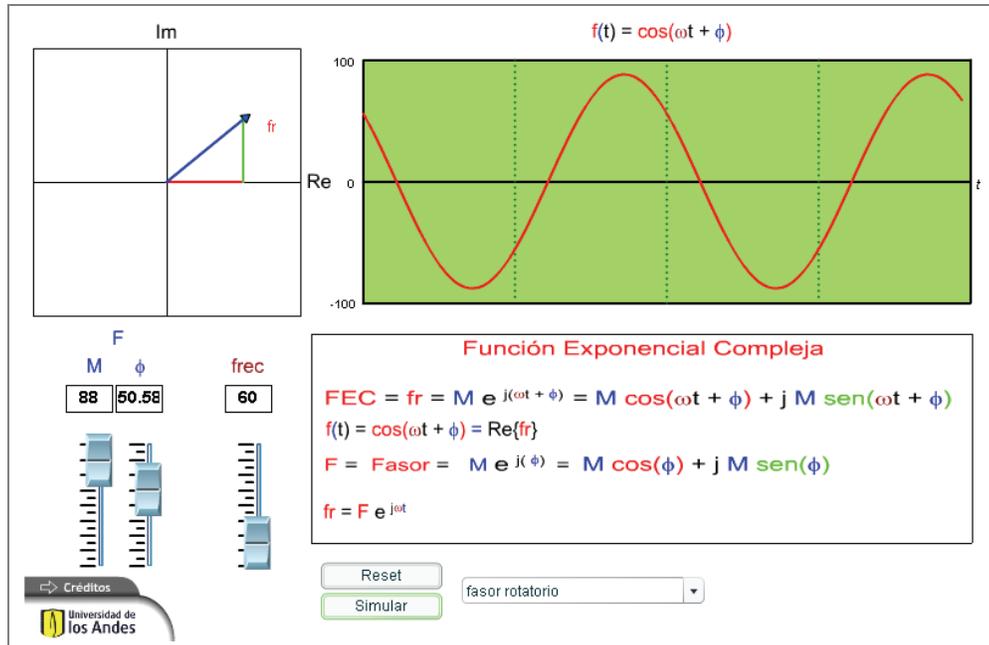


Figura 10-27

#### Descripción

Esta simulación permite mostrar la relación entre una señal senoidal y su señal exponencial compleja SEC (fasor rotatorio) asociada y como transformar de una a otra señal en los dos sentidos. También permite ver la relación entre la SEC y el Fasor asociado y entre este fasor y la señal senoidal viendo la correspondencia entre sus magnitudes y ángulos de fase.

#### Uso educativo

Esta simulación se presenta como un complemento a la clase presencial, para estudiantes de primeros semestres de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Mecánica. Una vez los estudiantes manejan los conceptos de señal exponencial compleja y fasores pueden interactuar con la simulación para ver los efectos de los cambios en la magnitud y la fase de un fasor con la señal senoidal asociada al mismo.

## 10.4.2. FASORES. MAGNITUD Y FASE.

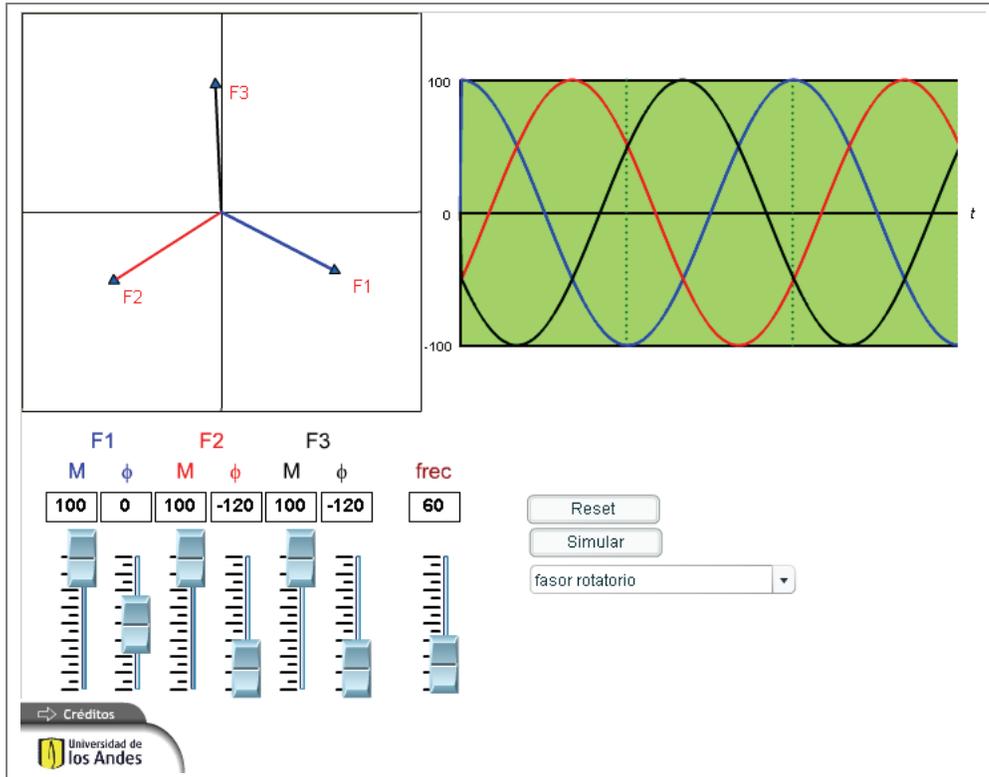


Figura 10-28

**Descripción**

Esta simulación permite mostrar la relación entre una señal senoidal y su señal exponencial compleja SEC (fasor rotatorio) asociada. También permite ver la relación entre la diferencia de los ángulos de fase de varios fasores y el desfase en las señales senoidales asociadas. Con el uso de tres fasores permite explicar los conceptos de fuentes trifásicas.

**Uso educativo**

Esta simulación se presenta como un complemento a la clase presencial, para estudiantes de primeros semestres de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Mecánica. Una vez los estudiantes manejan los conceptos de señal exponencial compleja y fasores pueden interactuar con la simulación para ver las relaciones entre los ángulos de fase de los fasores y la fase de las señales senoidales asociadas.

## 10.4.3. FASORES. OPERACIONES

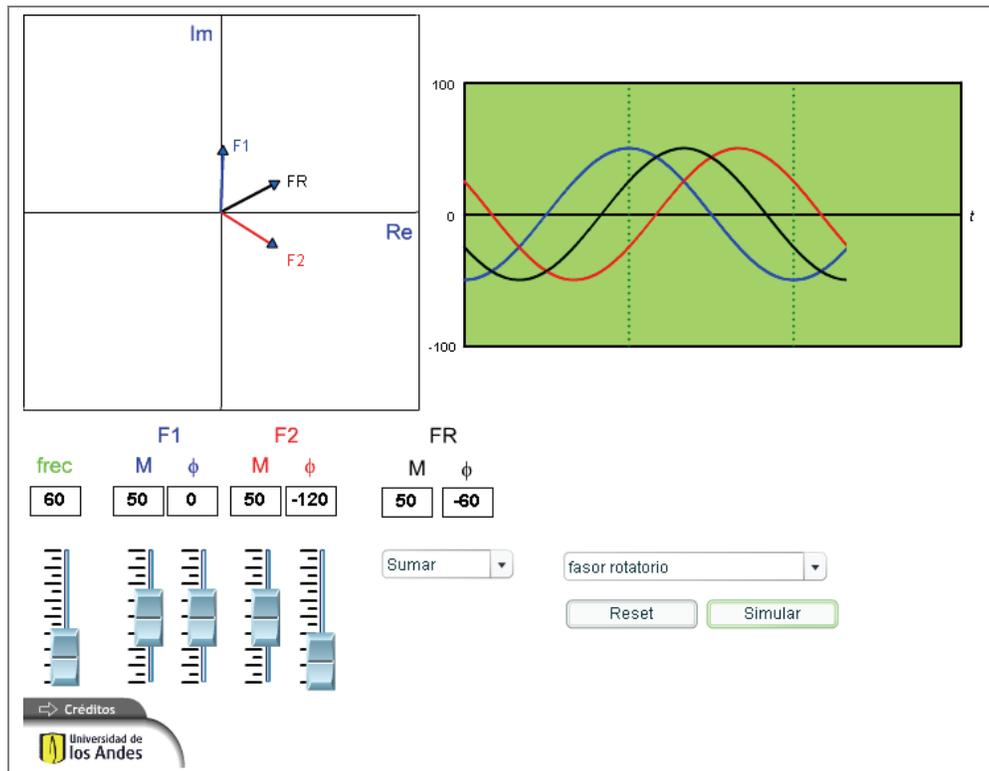


Figura 10-29

**Descripción**

Esta simulación permite mostrar los resultados de sumar, restar y multiplicar señales exponenciales complejas SEC o fasores y el resultado en las señales senoidales asociadas a ellos. Muestra los cambios en la magnitud y fase de la señal resultado al variar los fasores originales y el cambio en la frecuencia al multiplicar dos SEC.

**Uso educativo**

Esta simulación se presenta como un complemento a la clase presencial, para estudiantes de primeros semestres de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Mecánica. Una vez los estudiantes manejan los conceptos de señal exponencial compleja y fasores y operaciones entre ellos pueden interactuar con la simulación para ver las relaciones entre los ángulos de fase y las magnitudes de los fasores originales y los del fasor resultante o la señal senoidal resultante. Al multiplicar dos señales de la misma frecuencia muestra como la señal resultante tiene una frecuencia duplicada.

## 10.4.4. FASORES. MAGNITUD Y FASE

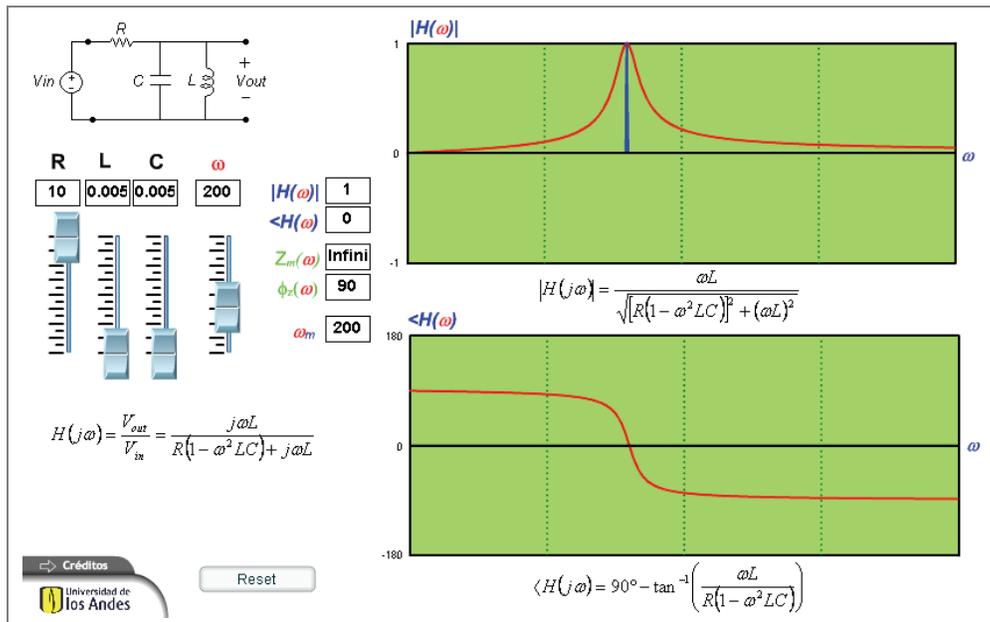


Figura 10-30

## Descripción

Esta simulación permite mostrar la dependencia de la magnitud y la fase de la impedancia y de una la función de transferencia en función de la frecuencia.

## Uso educativo

Esta simulación se presenta como un complemento a la clase presencial, para estudiantes de primeros semestres de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Mecánica. Una vez los estudiantes manejan los conceptos fasores y su magnitud y fase en función de la frecuencia ellos pueden interactuar con la simulación para ver cómo la función de magnitud o la función de fase de una función de transferencia, respecto a la frecuencia depende de los valores particulares que tengan los componentes del circuito ( $R$ ,  $L$  o  $C$ ). Igualmente puede observar la variación de la impedancia respecto a la frecuencia.

## 10.4.5. POTENCIA AC EN ESTADO ESTABLE

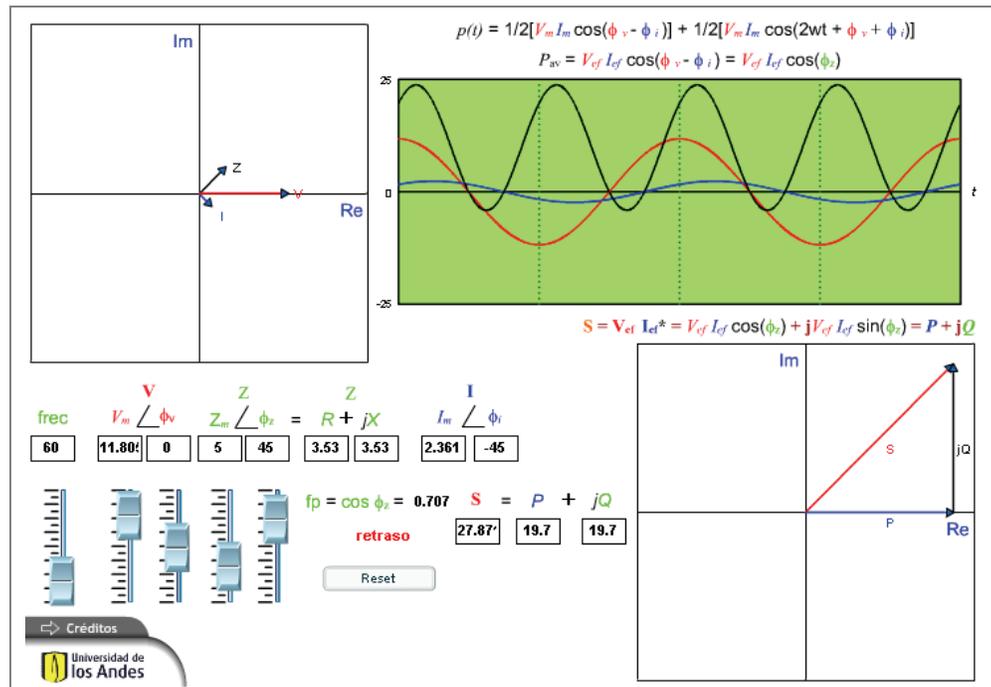


Figura 10-31

**Descripción**

Esta simulación permite mostrar los conceptos Potencia AC en estado estable, Potencia Activa, Potencia Reactiva, Potencia Aparente, Potencia Compleja y Factor de Potencia en función de la impedancia y las relaciones entre voltaje y corriente fasorial.

**Uso educativo**

Esta simulación se presenta como un complemento a la clase presencial, para estudiantes de primeros semestres de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Mecánica. Una vez los estudiantes manejan los conceptos de potencia compleja, potencia activa y reactiva, potencia aparente, impedancia y factor de potencia, los estudiantes pueden interactuar para analizar los efectos del cambio en la impedancia sobre la potencia, tanto en el plano complejo como en el tiempo. Estos cambios se pueden observar al cambiar el fasor de voltaje o la magnitud y fase de la impedancia.