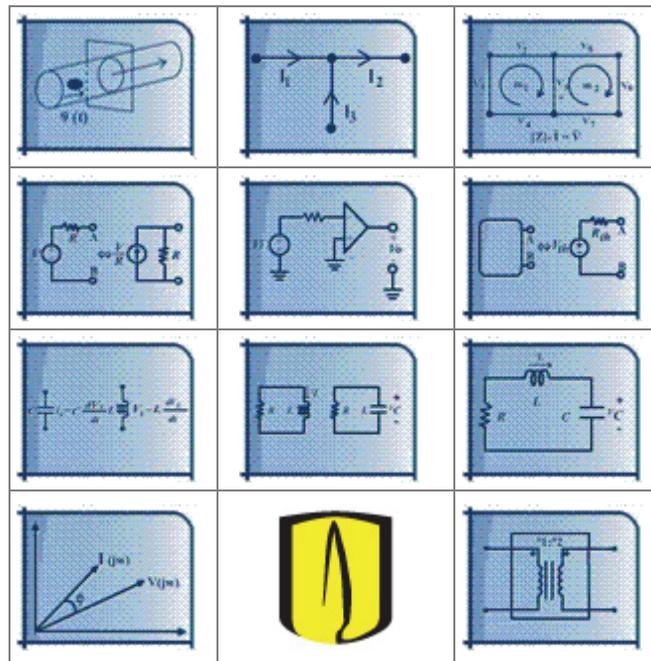




FUNDAMENTOS DE CIRCUITOS



ANTONIO JOSÉ SALAZAR GÓMEZ

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
 FACULTAD DE INGENIERÍA
 DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA

Salazar Gómez, Antonio José

Fundamentos de circuitos / Antonio José Salazar Gómez. -- Bogotá : Universidad de los Andes, Facultad de Ingeniería, Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, Ediciones Uniandes, 2009.

p. 250



1. Circuitos eléctricos 2. Análisis de circuitos eléctricos I. Universidad de Los Andes (Colombia). Facultad de Ingeniería. Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica II. Tít.

CDD. 621.3815

SBUA

Primera edición: junio 2008

© Antonio José Salazar Gómez

© Universidad de los Andes
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica
Dirección: Cr 1 Este 19ª 40. Edificio Mario Laserna
Teléfono: 3 394949 – 3 324316.
Bogotá D.C., Colombia
lieeweb@uniandes.edu.co

Ediciones Uniandes
Carrera 1ª. No 19-27. Edificio AU 6
Bogotá D.C., Colombia
Teléfono: 3394949- 3394999. Ext: 2133. Fájx: Ext. 2158
<http://ediciones.uniandes.edu.co>
infeduni@uniandes.edu.co

ISBN: 978-958-695-414-3

:

PÁGINA WEB <http://iee.uniandes.edu.co/web/?seccion=2&ver=167&lenguaje=es>

Todos los derechos reservados. Esta publicación no puede ser reproducida ni en su todo ni en sus partes, ni registrada en o transmitida por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio sea mecánico, fotoquímico, electrónico, magnético, electro-óptico, por fotocopia o cualquier otro medio, sin el permiso previo por escrito de la editorial. Solo se permite su acceso y descarga de la página de la Universidad para fines estrictamente académicos y sin ánimo de lucro

PRESENTACION

El presente trabajo es el resultado de la recopilación del material del curso de Fundamentos de Circuitos dictado por el autor en la Universidad de los Andes y el cual se ha desarrollado como soporte y complemento en línea al curso presencial.

Comprende todos los temas del curso (11 capítulos) con teoría y múltiples ejemplos (70), los cuales están acompañados por una gran variedad de gráficas (más de 300).

Un aporte novedoso y fundamental de este trabajo es una serie de simulaciones interactivas, para todos los capítulos, las cuales permiten al profesor complementar su trabajo en la clase presencial y al estudiante interactuar con ellas fuera del aula de clase. Estas simulaciones están desarrolladas en Macromedia Flash usando el lenguaje ActionScript.

Todo este material se encuentra disponible en línea en SICUA (Sistema de Cursos de la Universidad de los Andes basado en WebCT).

Registro de Derechos de Autor del libro:

MINISTERIO DEL INTERIOR Y JUSTICIA

Oficina Nacional de Derecho de Autor

Registro (Libro-tomo-Partida) No. 10-193-103

Fecha de registro 04-sep-2008

245 páginas.

Registro de Derechos de Autor de las Simulaciones:

MINISTERIO DEL INTERIOR Y JUSTICIA

Oficina Nacional de Derecho de Autor

Registro (Libro-tomo-Partida) No. 13-21-114

Fecha de registro: 08-sep-2008.

A mi familia

TABLA DE MATERIAS

1. FUNDAMENTOS	1
2. LEYES DE VOLTAJES Y CORRIENTES DE KIRCHHOFF.....	13
3. ANÁLISIS POR NODOS Y MALLAS	35
4. LINEALIDAD SUPERPOSICIÓN Y TRANSFORMACIÓN DE FUENTES.....	63
5. AMPLIFICADOR OPERACIONAL	79
6. THÉVENIN, NORTON Y MÁXIMA TRANSFERENCIA DE POTENCIA.....	99
7. CAPACITANCIA E INDUCTANCIA.....	106
8. CIRCUITOS DE PRIMER ORDEN RL Y RC	106
9. CIRCUITOS DE SEGUNDO ORDEN LC Y RLC	106
10. ANÁLISIS SENOIDAL POR FASORES.....	106
11. TRANSFORMADOR IDEAL.....	106

TABLA DE CONTENIDO

1. FUNDAMENTOS	1
1.1. INTRODUCCIÓN	1
1.2. CARGA ELÉCTRICA.....	1
1.3. CAMPO ELÉCTRICO	2
1.4. VOLTAJE, CAÍDA DE VOLTAJE O DIFERENCIA DE POTENCIAL.....	2
1.5. ENERGÍA	3
1.6. CORRIENTE.....	3
1.7. POTENCIA	3
1.8. LEY DE OHM.....	4
1.9. CIRCUITO	4
1.10. CONVENCION DE NOTACION PARA EL VOLTAJE	4
1.11. CONVENCION PASIVA DE SIGNOS.....	5
1.12. CONVENCION PARA POTENCIA ABSORBIDA	6
1.13. PRINCIPIO DE CONSERVACION DE POTENCIA	6
1.14. SIMULACIONES	9
1.14.1. Carga Eléctrica	9
1.14.2. Campo Eléctrico.....	10
2. LEYES DE VOLTAJES Y CORRIENTES DE KIRCHHOFF.....	13
2.1. INTRODUCCIÓN	13
2.2. CONCEPTOS BÁSICOS DE TOPOLOGÍA DE CIRCUITOS	13
2.3. KCL – LEY DE CORRIENTES DE KIRCHHOFF	14
2.4. KCL – LEY DE CORRIENTES DE KIRCHHOFF EN CURVA GAUSSIANA.....	14
2.5. KVL – LEY DE VOLTAJES DE KIRCHHOFF	15
2.6. RESISTENCIA EQUIVALENTE Y DIVISORES	24
2.6.1. resistencia en Serie y Divisor de Voltaje	24
2.6.2. Resistencia en Paralelo y Divisor de Corriente.....	25
2.7. CONVERSION DELTA – ESTRELLA (Δ -Y).....	27
2.8. SIMULACIONES	33
2.8.1. KCL – Ley de Corrientes de Kirchhoff	33
2.8.2. KVL – Ley de Voltajes de Kirchhoff.....	34
3. ANÁLISIS POR NODOS Y MALLAS	35
3.1. INTRODUCCIÓN	35
3.2. ANÁLISIS POR NODOS.....	36
3.3. ANÁLISIS POR MALLAS	36
3.4. SIMULACIONES	61
3.4.1. ANÁLISIS POR NODOS	61
3.4.2. ANÁLISIS POR mallaS.....	62
4. LINEALIDAD SUPERPOSICIÓN Y TRANSFORMACIÓN DE FUENTES.....	63

4.1.	INTRODUCCIÓN	63
4.2.	TEOREMA DE LINEALIDAD	63
4.2.1.	Superposición y proporcionalidad	64
4.3.	TRANSFORMACIÓN DE FUENTES	66
4.4.	TEOREMA DE TRANSFORMACIÓN ENTRE FUENTES DE VOLTAJE Y CORRIENTE	68
4.5.	SIMULACIONES	77
4.5.1.	Superposición de fuente DC y AC	77
5.	AMPLIFICADOR OPERACIONAL	79
5.1.	INTRODUCCIÓN	79
5.2.	MODELO "REAL" DEL AMPLIFICADOR.....	80
5.3.	MODELO DE RESISTENCIAS IDEALES DEL AMPLIFICADOR.....	80
5.4.	MODELO IDEAL DEL AMPLIFICADOR – MODELO DE CORTO CIRCUITO VIRTUAL	81
5.5.	MÉTODO DE CÁLCULO CON AMPLIFICADOR IDEAL CON GANANCIA A INFINITA.....	82
5.6.	CONFIGURACIONES DE LAZO CERRADO DEL AMPLIFICADOR	83
5.7.	MODELO IDEAL DEL AMPLIFICADOR CON SATURACIÓN.....	87
5.8.	AMPLIFICADOR CON VD NO NULO	88
5.9.	MODELO IDEAL DEL AMPLIFICADOR CON GANANCIA A FINITA.....	88
5.10.	REGIÓN ACTIVA Y REGIÓN DE SATURACIÓN	94
5.11.	MÉTODO DE CÁLCULO CON AMPLIFICADOR IDEAL CON SATURACIÓN Y REALIMENTACIÓN NEGATIVA	94
5.12.	MÉTODO DE CÁLCULO CON AMPLIFICADOR IDEAL CON SATURACIÓN Y SIN REALIMENTACIÓN NEGATIVA.....	95
5.13.	SIMULACIONES	97
5.13.1.	AMPLIFICADOR OPERACIONAL	97
6.	THÉVENIN, NORTON Y MÁXIMA TRANSFERENCIA DE POTENCIA	99
6.1.	INTRODUCCIÓN	99
6.2.	CÁLCULO DEL EQUIVALENTE DE THÉVENIN	100
6.3.	MÉTODO DE FUENTE DE PRUEBA VAB.....	102
6.4.	CONSECUENCIAS DEL MÉTODO DE FUENTE DE PRUEBA	102
6.5.	MÉTODO DE VOLTAJE DE CIRCUITO ABIERTO Y RESISTENCIA EQUIVALENTE	103
6.6.	CÁLCULO DEL EQUIVALENTE DE NORTON	104
6.7.	MÁXIMA TRANSFERENCIA DE POTENCIA.....	106
6.8.	MÁXIMA TRANSFERENCIA DE POTENCIA CON CARGA RESISTIVA.....	106
6.9.	MÁXIMA TRANSFERENCIA DE POTENCIA CON CARGA ARBITRARIA.....	106
6.10.	SIMULACIONES	106
6.10.1.	Thévenin, Norton y Máxima transferencia de potencia.....	106
7.	CAPACITANCIA E INDUCTANCIA.....	106
7.1.	INTRODUCCIÓN	106
7.2.	CAPACITANCIA.....	106
7.2.1.	Continuidad del voltaje y cambios bruscos	106
7.2.2.	POTENCIA Y ENERGÍA EN LA CAPACITANCIA.....	106
7.2.3.	ENERGÍA INSTANTÁNEA almacenada.....	106
7.2.4.	ENERGÍA almacenada en un intervalo de tiempo	106
7.2.5.	RESPUESTA DC Y AC DE LA CAPACITANCIA EN ESTADO ESTABLE	106
7.2.6.	CARGA Y DESCARGA DE LA CAPACITANCIA.....	106
7.2.7.	PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA CARGA	106

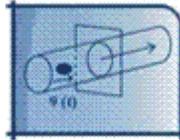
7.2.8.	EQUIVALENTE DE CAPACITANCIAS EN PARALELO	106
7.2.9.	EQUIVALENTE DE CAPACITANCIAS EN SERIE	106
7.3.	INDUCTANCIA	106
7.3.1.	Continuidad de la corriente y cambios bruscos	106
7.3.2.	POTENCIA Y ENERGÍA EN LA INDUCTANCIA	106
7.3.3.	ENERGÍA INSTANTÁNEA almacenada	106
7.3.4.	ENERGÍA almacenada en un intervalo de tiempo	106
7.3.5.	RESPUESTA DC Y AC DE LA INDUCTANCIA EN ESTADO ESTABLE	106
7.3.6.	EQUIVALENTE DE INDUCTANCIAS EN SERIE	106
7.3.7.	EQUIVALENTE DE INDUCTANCIAS EN PARALELO	106
7.4.	SIMULACIONES	106
7.4.1.	Carga de un condensadorR	106
7.4.2.	Carga Y DESCARGA de un condensador CON CONDICIONES INICIALES	106
8.	CIRCUITOS DE PRIMER ORDEN RL Y RC	106
8.1.	INTRODUCCIÓN	106
8.2.	ECUACIÓN DIFERENCIAL DE UN CIRCUITO SERIE RC	106
8.3.	OPERADOR D	106
8.4.	TIPOS DE RESPUESTAS DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL	106
8.5.	SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN	106
8.5.1.	MÉTODO DE INTEGRACIÓN	106
8.5.2.	MÉTODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS	106
8.6.	FUNCIÓN ESCALÓN UNITARIO	106
8.7.	CIRCUITOS CON INTERRUPTORES Y FUENTES VARIABLES	106
8.8.	SIMULACIONES	106
8.8.1.	Respuesta de circuito RC a entrada AC DC	106
9.	CIRCUITOS DE SEGUNDO ORDEN LC Y RLC	106
9.1.	INTRODUCCIÓN	106
9.2.	CIRCUITO LC – RESPUESTA DE ENTRADA CERO	106
9.3.	CIRCUITO RLC SERIE	106
9.4.	CIRCUITO RLC PARALELO	106
9.5.	COMPORTAMIENTO DE LA RESPUESTAS DE SEGUNDO ORDEN – ENTRADA CERO	106
9.6.	CIRCUITO RLC SERIE CON ENTRADA CONSTANTE	106
9.7.	SIMULACIONES	106
9.7.1.	Respuesta de circuito RLC a diversas entradas.	106
10.	ANÁLISIS SENOIDAL POR FASORES.....	106
10.1.	INTRODUCCIÓN	106
10.2.	SEÑAL EXPONENCIAL COMPLEJA Y FASORES	106
10.2.1.	Aplicación a las Ecuaciones Diferenciales	106
10.3.	IMPEDANCIA FASORIAL.....	106
10.3.1.	Impedancia de un Condensador	106
10.3.2.	Impedancia de una Inductancia	106
10.3.3.	Impedancia de una Resistencia	106
10.3.4.	Admitancia Fasorial.....	106
10.3.5.	Comportamiento de las Impedancias con la frecuencia	106
10.3.6.	Impedancia Fasorial Generalizada	106
10.4.	SIMULACIONES	106
10.4.1.	Señal Exponencial Compleja y Fasores.....	106
10.4.2.	Fasores. Magnitud y fase.	106
10.4.3.	Fasores. Operaciones.....	106

10.4.4.	Fasores. MAGNITUD Y FASE	106
10.4.5.	Potencia AC EN ESTADO ESTABLE	106

11. TRANSFORMADOR IDEAL106

11.1.	INTRODUCCIÓN	106
11.2.	RELACIONES ENTRE VOLTAJES Y CORRIENTES EN EL TRANSFORMADOR IDEAL.....	106
11.3.	CONVENCIÓN DE PUNTOS PARA LAS FASES	106
11.4.	IMPEDANCIA REFLEJADA EN EL TRANSFORMADOR IDEAL.....	106
11.5.	ACOPLE DE IMPEDANCIAS	106
11.6.	SIMULACIONES	106
11.6.1.	transformador ideal	106

1. FUNDAMENTOS



1.1. INTRODUCCIÓN

La electricidad se conoce desde el año 600 A.C., cuando el griego Tales de Mileto descubrió que al frotar el ámbar (*elektron* en griego) este podía atraer pequeñas partículas. Esta propiedad de la materia se denominó electricidad estática. En el siglo XVI el inglés Gilbert estableció que existían materiales que con la fricción presentaban el fenómeno de electricidad estática y los denominó materiales eléctricos, y a aquellos que no lo presentaban los denominó no-eléctricos. Los materiales eléctricos son aisladores mientras que los no-eléctricos son conductores. Aunque parece una contradicción la explicación a esto es simple: en un material aislador (material eléctrico) las cargas eléctricas se pueden acumular en el lugar donde hay fricción y producir electricidad estática, mientras que en un conductor (material no-eléctrico) las cargas producidas por fricción se distribuyen a lo largo del conductor y no se produce electricidad estática.

Lo anterior es válido para la electricidad estática. Sin embargo cuando las cargas se exponen a un campo que las hace moverse el fenómeno de la electricidad se invierte: los conductores permiten la circulación de cargas eléctricas, produciendo una corriente eléctrica, mientras que los aisladores impiden la circulación de las cargas y por tanto se oponen a la corriente eléctrica.

Estos fenómenos son producidos por la acumulación o movimiento de cargas eléctricas.

En este capítulo se presentan conceptos fundamentales de la electricidad como son: carga, corriente, potencial, voltaje y energía, así como conceptos básicos de los circuitos como son: circuito, fuentes, elementos pasivos y activos, ley de Ohm y potencia entre otros.

1.2. CARGA ELÉCTRICA

La carga eléctrica es una propiedad eléctrica de la materia medida en coulombs (C). Las cargas eléctricas iguales se repelen y las opuestas se atraen. La fuerza que se crea entre las cargas es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. La carga de un electrón ($-e$) es -1.6019×10^{-19} C, o de manera equivalente, 1 C es la carga de 6.2415×10^{18} electrones.

Los átomos están formados por un núcleo, de protones y neutrones, el cual está rodeado de una nube de electrones. El núcleo se considera como un sólido con respecto a los electrones. Los protones tienen una carga positiva (+e), los electrones tienen una carga negativa (-e), mientras que los neutrones no tienen carga. La materia en su estado natural es en general neutra, lo que significa que en sus átomos el número de electrones y de protones es igual. Para que la materia se cargue positivamente o negativamente se requiere que el número de protones y electrones sea diferente. Como los protones están fuertemente ligados al núcleo no es posible separarlos para producir una carga positiva, por lo cual se requiere retirar electrones del átomo para que este tenga una carga neta positiva. De igual manera para producir una carga negativa se requiere adicionar electrones a un átomo neutro.

La Ley de Coulomb establece que la fuerza entre dos cargas eléctricas está dada por:

$$F = K \frac{Qq_0}{r^2}$$

1.3. CAMPO ELÉCTRICO

Un campo es una representación de los espacios de fuerzas con una magnitud y una dirección por una fuente dada. Ejemplos de campos son el gravitacional, el magnético, el eléctrico y el electromagnético. Un Campo Eléctrico será la representación de las fuerzas eléctricas experimentadas por una carga en el espacio. En el ámbito de la ingeniería eléctrica y electrónica será común trabajar también con otros campos como son los campos magnéticos y los campos electromagnéticos.

$$E = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{F}{q_0} = K \frac{Q}{r^2}$$

Por tanto:

$$F = q \cdot E$$

1.4. VOLTAJE, CAÍDA DE VOLTAJE O DIFERENCIA DE POTENCIAL

El voltaje es la diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos. Si una carga positiva se somete a un campo eléctrico ésta se moverá del punto de mayor potencial al de menor potencial realizando un trabajo que implica un cambio de energía. Sin embargo para que exista una diferencia de potencial entre dos puntos no es necesario que exista una carga moviéndose entre ellos. Tan solo se requiere que exista un campo eléctrico diferente entre los dos puntos.

La diferencia de potencial entre dos puntos de un campo eléctrico homogéneo está dada por:

$$V = E \cdot d$$

en donde d es la distancia entre los puntos.

1.5. ENERGÍA

El trabajo realizado para desplazar una carga entre los dos puntos será:

$$W = F \cdot d = (q \cdot E) \cdot d = q \cdot V$$

Por tanto la energía entre los dos puntos es:

$$\varepsilon = q \cdot V$$

1.6. CORRIENTE

La corriente es el flujo neto de cargas positivas (iones positivos) o negativas (electrones libres o iones negativos) a través de una sección transversal de un conductor. En los metales se presenta movimiento de electrones libres; en los gases movimiento de electrones libres en un sentido y movimiento de iones positivos en el otro sentido; en las soluciones salinas hay movimiento de iones positivos y negativos en direcciones opuestas.

La corriente se mide en amperios (A), que corresponde al flujo de una carga de un Coulomb (6.2415×10^{18} electrones) en un segundo:

$$1A = \frac{1C}{1s}$$

Para una carga neta de Δq en un punto en Δt la corriente promedio será:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

Cuando Δt tiende a cero, esto es, en un tiempo infinitesimal:

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq(t)}{dt}$$

La cantidad de carga que pasa por el conductor en un intervalo de tiempo $[t_0, t]$ es:

$$q(t) = \int_{t_0}^t i(t) dt$$

1.7. POTENCIA

La potencia es el trabajo realizado por unidad de tiempo expresado en (J/s) o vatios (W).

En el caso de corriente directa se tiene:

$$P = \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta T} = \frac{\Delta q \cdot V}{\Delta T} = \left(\frac{\Delta q}{\Delta T} \right) \cdot V = I \cdot V$$

de manera que la potencia es:

$$P = I \cdot V$$

En el caso de corriente no directa tenemos:

$$p(t) = i(t) \cdot v(t)$$

y en este caso la energía en un intervalo de tiempo $[t_0, t]$ será:

$$W(t_0, t) = \int_{t_0}^t p(\tau) d\tau$$

1.8. LEY DE OHM

La relación entre el voltaje y la corriente en un conductor es proporcional a una constante en cualquier instante de tiempo:

$$I = V / R$$

1.9. CIRCUITO

Un circuito es un procesador de energía o señal (información), formado por la interconexión de elementos o dispositivos simples. La energía en un circuito puede ser suministrada, absorbida, almacenada o convertida.

1.10. CONVENCION DE NOTACION PARA EL VOLTAJE

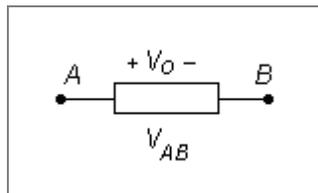


Figura 1-1

Con respecto a la gráfica anterior, se dice que la caída de voltaje entre los puntos A y B corresponde al voltaje V_{AB} . Cuando el potencial en A es mayor que el potencial en B $V_{AB} > 0$ y cuando el potencial en A es menor que el potencial en B $V_{AB} < 0$. Si V_0 es la caída de voltaje entre los puntos A y B entonces $V_{AB} = V_0$ cuando se usa la notación de los signos (+ -) para identificar los puntos A y B respectivamente. De lo anterior se puede deducir que $V_{BA} = -V_{AB}$, ya que la caída de voltaje de B hacia A es la opuesta de A hacia B.

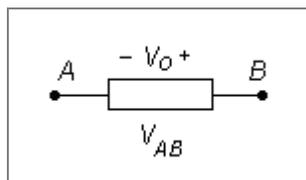


Figura 1-2

Si el voltaje V_o se define como está en la gráfica anterior entonces $V_{AB} = -V_o$.

Los puntos A y B o los signos (+ -) pueden ser asignados arbitrariamente, pero hay que tener en cuenta la relación de dependencia que se crea entre las variables V_{AB} y V_o en cada caso.

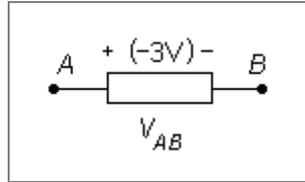


Figura 1-3

En este último caso el valor de V_o está explícito con respecto a los signos (+ -). En este caso tenemos que el potencial en el punto B (-) es mayor que el potencial en el punto A (+).

1.11. CONVENCION PASIVA DE SIGNOS

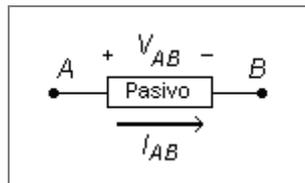


Figura 1-4

Convención de notación que define como positiva una corriente I_{AB} cuando esta pasa de un punto de mayor potencial A hacia uno de menor potencial B con una caída de voltaje V_{AB} (según la convención de voltaje explicada anteriormente). Esto es válido en un elemento pasivo como en la gráfica anterior. El punto asumido con mayor potencial tienen el signo (+) y el de menor potencial el signo (-). En este caso la corriente se representa por una flecha que va del signo (+) al (-).

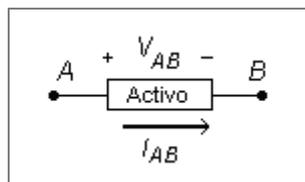


Figura 1-5

Como en un elemento activo la corriente pasa del punto de menor potencial al de mayor potencial la corriente será negativa para esta convención.

1.12. CONVENCION PARA POTENCIA ABSORBIDA

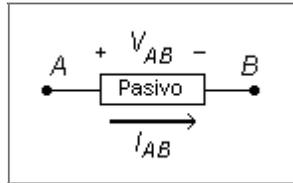


Figura 1-6

Se dice en general que un elemento pasivo AB absorbe potencia y la disipa o convierte, mientras que un elemento activo suministra potencia. Si la potencia absorbida por un elemento es positiva significa que en realidad el elemento está absorbiendo potencia. Si la potencia absorbida por un elemento es negativa significa que en realidad el elemento está suministrando potencia.

La potencia absorbida se calcula respecto a la convención pasiva de corriente:

$$P_{\text{absorbida}} = V_{AB} \cdot I_{AB}$$

En un elemento pasivo de tipo resistivo la potencia absorbida siempre es positiva. En un elemento pasivo de almacenamiento de energía (como una inductancia o un condensador) la potencia absorbida puede ser absorbida en un momento y suministrada en otro, por lo cual la potencia absorbida puede ser positiva o negativa. Lo mismo ocurre con los elementos activos (fuentes). Dependiendo del sentido de la corriente de la diferencia de potencial una fuente puede estar suministrando o absorbiendo potencia.

1.13. PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE POTENCIA

El principio de conservación de potencia establece que:

“La suma algebraica de todas las potencias absorbidas por cada uno de los elementos de un circuito es cero en cualquier instante de tiempo”.

Si se calculan por aparte las potencias absorbidas para elementos pasivos y las potencias generadas por elementos activos entonces se tiene que:

“La suma de la potencia absorbida es igual a la suma de la potencia generada en cualquier instante de tiempo”.

Ejemplo 1-1. Conservación de potencia.

En el circuito de la Figura 1-7(a) la fuente y la resistencia están conectadas a un elemento de dos terminales desconocido.

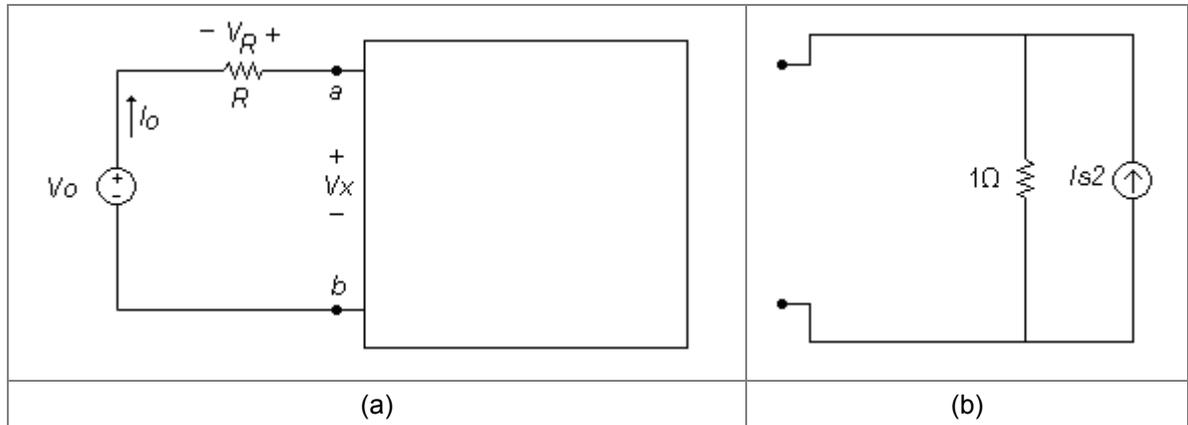


Figura 1-7

Si se sabe que $V_o = 9V$, $R = 2 \Omega$ y $V_x = 10V$ calcular:

- La corriente I_o usando el principio de conservación de potencia.
- La potencia absorbida por todos los elementos y comprobar Indicar para cada elemento si absorbe o suministra potencia.
- Calcular I_{s2} si se sabe que el circuito de la caja es el mostrado en la Figura 1-7(b).

Solución

Parte a)

Calculamos la potencia absorbida en cada elemento y aplicamos el principio de conservación de potencia:

$$\begin{aligned} \text{Potencia absorbida en } V_o &= V_o * (-I_o) \\ \text{Potencia absorbida en } R &= V_R * (-I_o) = (R * (-I_o)) * (-I_o) = R * I_o^2 \\ \text{Potencia absorbida en caja} &= V_x * I_o \end{aligned}$$

Conservación de potencia:

$$\begin{aligned} V_o * (-I_o) + R * I_o^2 + V_x * I_o &= 0 \\ -9I_o + 2I_o^2 + 10I_o &= 0 \\ 2I_o^2 + I_o &= 0 \end{aligned}$$

De donde

$$I_o = -0.5A$$

Parte b)

Potencia absorbida en $V_o = V_o * (-I_o) = (9v) * (0.5A) = 4.5 W$ (absorbe potencia)

Potencia absorbida en $R = R * I_o^2 = (2 \Omega) * (-0.5A)^2 = 0.5 W$ (absorbe potencia)

Potencia absorbida en caja = $V_x * I_o = 10V * (-0.5A) = -5 W$ (suministra potencia)

Conservación de potencia: $4.5 W + 0.5 W - 5 W = 0$

Parte c)

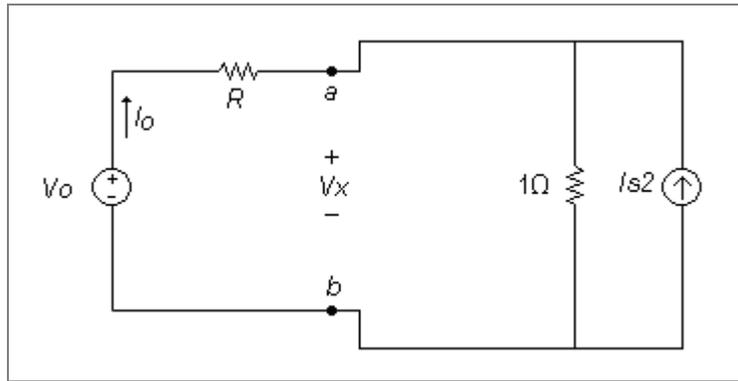


Figura 1-8

$$P_{ab \text{ en caja}} = -5 \text{ W} = P_{ab_{R1\Omega}} + P_{ab_{I_{s2}}} = V_x^2 / (1 \Omega) + V_x * (-I_{s2}) = (10\text{V})^2 / (1 \Omega) - (10 \text{ V}) * I_{s2}$$

$$\Rightarrow I_{s2} = (100 \text{ W} + 5 \text{ W}) / 10\text{V} = 10.5\text{A}$$

Ejemplo 1-2. Conservación de potencia.

Para el circuito de la Figura 1-9 calcular:

- La potencia absorbida por cada elemento en función de las fuentes y las resistencias.
- Si $R_1=1\Omega$, $R_2=2\Omega$, $V_o = -3\text{V}$, $V_1 = 1\text{V}$, indicar para cada elemento si absorbe o suministra potencia y comprobar el principio de conservación de potencia.

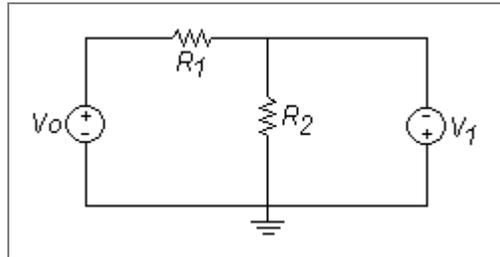


Figura 1-9

Solución

Parte a)

$$P_{R2} = \frac{V_1^2}{R_2}$$

$$P_{R1} = \frac{(V_o + V_1)^2}{R_1}$$

$$P_{V_o} = \frac{V_o(-V_1 - V_o)}{R_1}$$

$$P_{V_1} = V_1 \left[- \left(\frac{V_o + V_1}{R_1} + \frac{V_1}{R_2} \right) \right]$$

Parte b)

$$P_{R_2} = \frac{(1V)^2}{2\Omega} = 0.5W$$

$$P_{R_1} = \frac{(-3V + 1V)^2}{1\Omega} = 4W$$

$$P_{V_o} = \frac{-3V(-1V) - (-3V)}{1\Omega} = -6W$$

$$P_{V_1} = 1V \left[- \left(\frac{-3V + 1V}{1\Omega} + \frac{1V}{2\Omega} \right) \right] = 1.5W$$

$$P_{R_2} + P_{R_1} + P_{V_o} + P_{V_1} = 0.5W + 4W - 6W + 1.5W = 0$$

1.14. SIMULACIONES

1.14.1. CARGA ELÉCTRICA

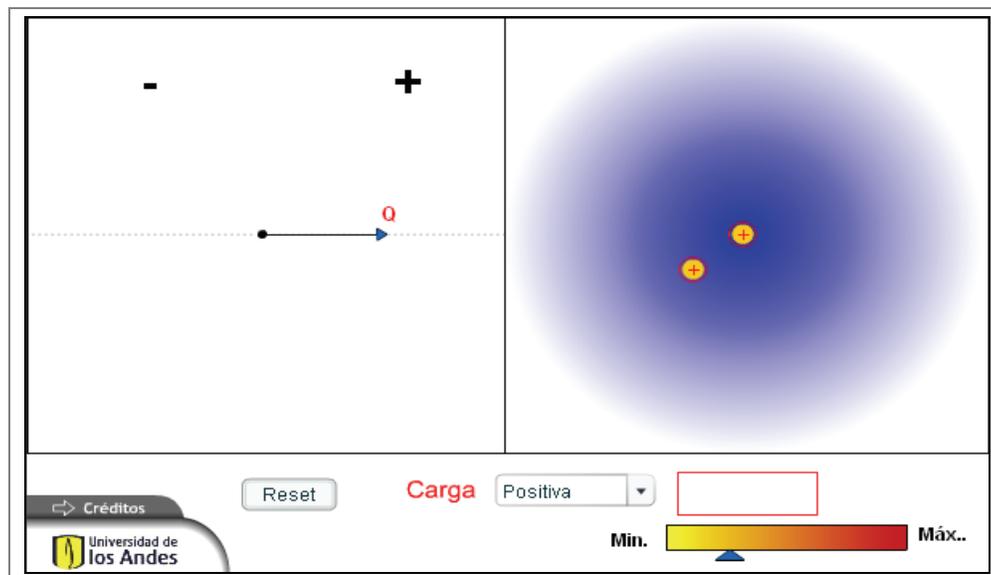


Figura 1-10

Descripción

Este objeto consiste en una simulación de cargas y campos eléctricos. El estudiante interactúa con la herramienta, seleccionando una carga (positiva o negativa) y estableciendo la intensidad de su campo eléctrico, para luego situar una carga (positiva o negativa) en este campo eléctrico y visualizar su comportamiento.

Uso Educativo

Esta simulación se presenta como un complemento a la clase presencial, para estudiantes de primeros semestres de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Mecánica. Una vez los estudiantes manejan los conceptos de cargas y el campo eléctrico que éstas generan, así como el de diferencia de potencial, interactúan con el recurso estableciendo diferentes cargas con sus campos eléctricos generados (magnitud y dirección de las fuerzas) y visualizando el comportamiento al contacto con otras cargas. Se pueden proponer ejercicios en los que el estudiante deba inferir el comportamiento de una carga determinada dadas ciertas características del campo eléctrico, para luego contrastar su respuesta con la visualización en el simulador y ver cómo varía el potencial entre dos puntos dados.

1.14.2. CAMPO ELÉCTRICO

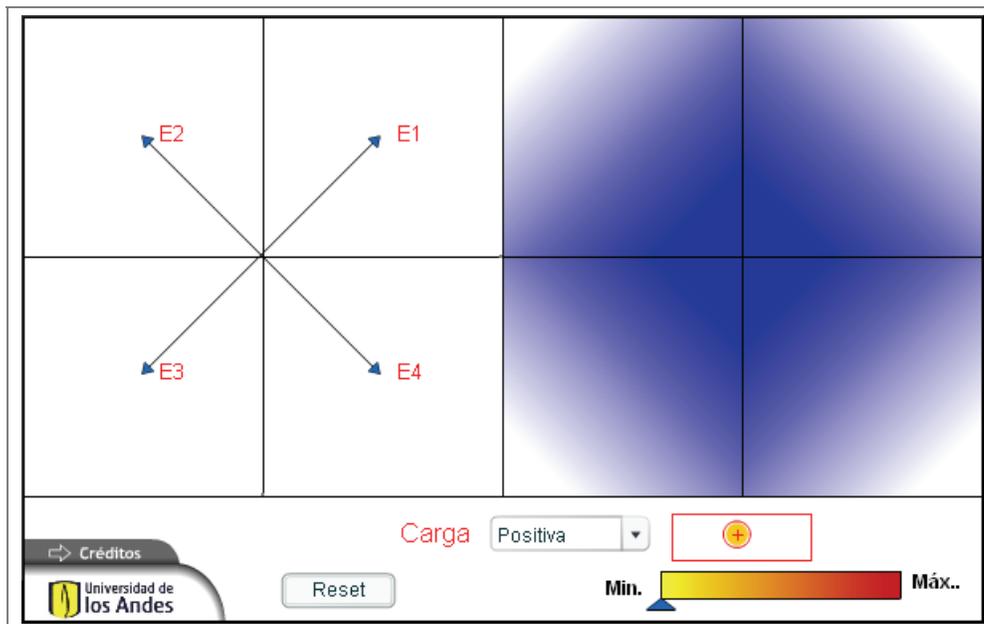


Figura 1-11

Descripción

Este objeto consiste en una simulación de cargas y campos eléctricos. El estudiante interactúa con la herramienta, seleccionando una carga (positiva o negativa) y estableciendo la intensidad de su campo eléctrico (estableciendo la magnitud y dirección de cuatro fuerzas), para luego situar una carga (positiva o negativa) en este campo eléctrico y visualizar su comportamiento.

Uso educativo

Esta simulación se presenta como un complemento a la clase presencial, para estudiantes de primeros semestres de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Mecánica. Una vez los estudiantes manejan los conceptos de cargas y el campo eléctrico que éstas generan, así como el de diferencia de potencial, interactúan con el recurso estableciendo diferentes campos eléctricos (magnitud y dirección de las fuerzas) y visualizando el comportamiento de cargas al interior de los campos eléctricos presentados. Se pueden proponer ejercicios en los que el estudiante deba inferir el comportamiento de una carga determinada dados unos campos eléctricos definidos.

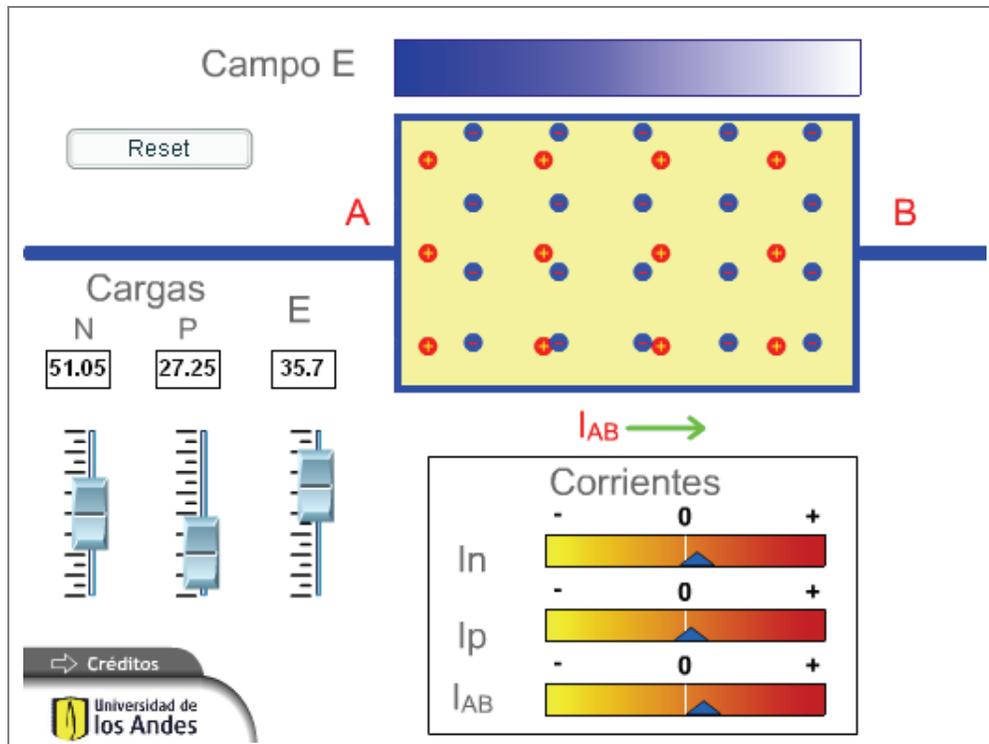


Figura 1-12

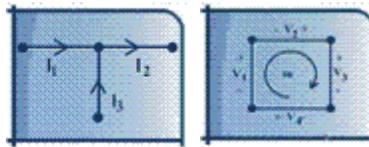
Descripción

Este objeto consiste en un simulador de corriente. El estudiante selecciona la cantidad de cargas positivas y negativas que deben fluir por el conductor y la intensidad del campo eléctrico. Una vez establecidos estos valores, visualiza el movimiento de las cargas eléctricas en una sección del conductor y sus efectos sobre los signos de la corriente.

Uso educativo

Esta simulación se presenta como un complemento a la clase presencial, para estudiantes de primeros semestres de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Mecánica. Una vez los estudiantes manejan los conceptos de campo eléctrico, cargas y corriente, interactúan con el recurso estableciendo el porcentaje de cargas positivas y negativas que fluirán por un conductor. Finalmente se puede visualizar la animación de la corriente a través del conductor y comparar esta corriente ante diferentes porcentajes de cargas e intensidades del campo eléctrico. Permite formular y describir la conversión pasiva de signos.

2. LEYES DE VOLTAJES Y CORRIENTES DE KIRCHHOFF



2.1. INTRODUCCIÓN

Este capítulo trata de las leyes de voltajes y corrientes de Kirchhoff llamadas KVL y KCL respectivamente. KVL establece que la suma algebraica de las caídas de voltaje en una secuencia cerrada de nodos es cero. Así mismo KCL establece que la suma algebraica de corrientes que entran en un nodo es igual a cero.

A partir de estos dos conceptos se derivan las ecuaciones requeridas para encontrar los equivalentes de elementos conectados en serie y en paralelo, así como las relaciones de los divisores de voltaje y corriente.

Estos conceptos serán la base para el análisis de circuitos complejos por los métodos de nodos y mallas.

2.2. CONCEPTOS BÁSICOS DE TOPOLOGÍA DE CIRCUITOS

Rama

Representación de un elemento o circuito de dos terminales.

Nodo

Punto de conexión entre dos o más ramas o elementos.

Camino cerrado o lazo

Conexión de ramas a través de una secuencia de nodos que comienza y termina en el mismo nodo pasando sólo una vez por cada nodo (sin repetir ramas). En los libros en inglés lo denominan *loop*.

Malla

Camino cerrado (o lazo) en el cual no existen otros caminos cerrados al interior. En los libros en inglés lo denominan *mesh*.

Red

Interconexión de varios elementos o ramas. En los libros en inglés lo denominan *network*.

Circuito

Es una red con al menos un camino cerrado.

Corriente de Rama

Es la corriente neta en una rama.

Voltaje de Rama

Es la caída de voltaje entre los nodos de una rama.

Corriente de Malla

Es la corriente ficticia que se ha definido para una malla. La suma algebraica de las corrientes de malla que pasan por la rama da como resultado la corriente de rama.

Conexión Serie

Conexión de elementos en la cual la corriente es la misma en todos los elementos. Esto se tiene al conectar el fin de un nodo de una rama con el nodo de inicio de la siguiente rama de la secuencia.

Conexión Paralelo

Conexión de elementos entre dos nodos comunes (nodo superior con nodo superior y nodo inferior con nodo inferior) en la cual el voltaje es el mismo en todos los elementos.

Secuencia de Nodos Cerrada

Es una secuencia de nodos finita que comienza y termina en el mismo nodo. Aquí no se requiere que haya una rama entre los nodos.

Circuito Conectado

Es aquél en el cual cada nodo puede ser alcanzado desde otro nodo por un camino a través de los elementos del circuito.

2.3. KCL – LEY DE CORRIENTES DE KIRCHHOFF

Dado que la carga que entra a un nodo debe salir, y que ni se crea ni se destruye carga en los nodos, la carga neta que entra en un nodo es igual a la que sale del mismo. De lo anterior se puede deducir las siguientes leyes para la corriente:

1. La suma algebraica de corrientes de rama que **entran** a un nodo es cero, en cualquier instante de tiempo.
2. La suma algebraica de corrientes de rama que **salen** a un nodo es cero, en cualquier instante de tiempo.

De lo anterior se desprende el hecho de que no se pueden tener fuentes ideales de corriente en serie.

2.4. KCL – LEY DE CORRIENTES DE KIRCHHOFF EN CURVA GAUSSIANA

Una curva gaussiana es una curva cerrada que contiene en su interior varios nodos o ramas y que corta en dos algunas ramas.

En una curva gaussiana los dos enunciados anteriores para los nodos siguen siendo válidos:

1. La suma algebraica de corrientes de rama que **entran** en una curva gaussiana es cero, en cualquier instante de tiempo.

- La suma algebraica de corrientes de rama que **salen** de una curva gaussiana, en cualquier instante de tiempo.

2.5. KVL – LEY DE VOLTAJES DE KIRCHHOFF

- La suma algebraica de caídas de voltaje alrededor de un **camino cerrado** es cero, en cualquier instante de tiempo.
- Para cualquier par de nodos j y k , la caída de voltaje de j a k V_{jk} es: $V_{jk} = V_j - V_k$, en cualquier instante de tiempo. Donde V_j es el voltaje de nodo del nodo j respecto a la referencia, y V_k es el voltaje de nodo del nodo k respecto a la referencia.
- Para un circuito conectado una secuencia de nodos A-B-D-...-G-P, la caída de voltaje en cualquier instante de tiempo es: $V_{AP} = V_{AB} + V_{BD} + \dots + V_{GP}$
- Para un circuito conectado la suma algebraica de **voltajes nodo-a-nodo** para una secuencia de nodos cerrada es cero en cualquier instante de tiempo.

Ejemplo 2-1. KVL.

Para el circuito de la Figura 2-1 calcular V_x y V_y .

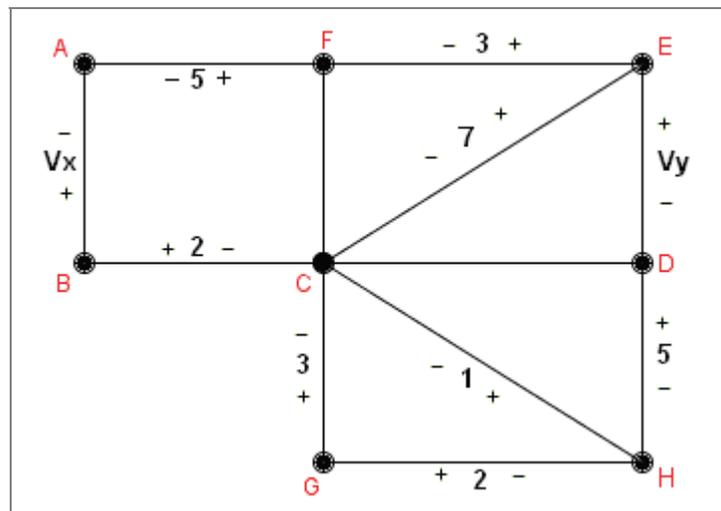
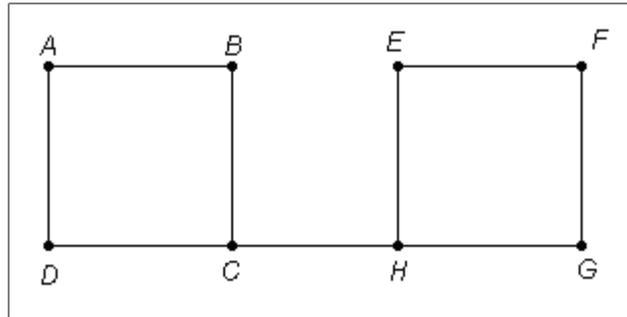


Figura 2-1

Solución

Usando el camino cerrado ABCEFA Y KVL: $-V_x + 2 - 7 + 3 + 5 = 0 \Rightarrow V_x = 3$

Usando el camino cerrado EDHCE Y KVL: $V_y + 5 + 1 - 7 = 0 \Rightarrow V_y = 1$

Ejemplo 2-2. Escritura de KVL y KCL en sus distintas formas.**Figura 2-2**

Para el circuito de la Figura 2-2:

- Escribir dos ecuaciones para cada una de las cuatro formas de KVL.
- Escribir dos ecuaciones de KCL en dos nodos diferentes.
- Escribir dos ecuaciones de KCL en dos curvas gaussianas y demostrar que la corriente por la rama CH es cero.
- Analizar cómo puede ser V_{CH} si el elemento de esta rama es una fuente de voltaje, una resistencia o una fuente de corriente.

Solución**Parte a)**

Forma 1: Seleccionamos el camino cerrado EFGH y lo recorremos en el sentido horario, haciendo que la sumatoria de caídas de voltaje sea igual a cero:

$$V_{EF} + V_{FG} + V_{GH} + V_{HE} = 0$$

Ahora seleccionamos el camino cerrado DCBAD y lo recorremos en el sentido contra-horario, haciendo que la sumatoria de caídas de voltaje sea igual a cero:

$$V_{DC} + V_{CB} + V_{BA} + V_{AD} = 0$$

Forma 2: Calculamos la caída de voltaje en la rama AB como

$$V_{AB} = V_A - V_B$$

Ahora calculamos la caída de voltaje entre el nodo A y el nodo H:

$$V_{AH} = V_A - V_H$$

Forma 3: Seleccionamos la secuencia (no cerrada) de nodos ABCH y obtenemos la caída de voltaje entre el nodo A y el nodo H:

$$V_{AB} + V_{BC} + V_{CH} = V_{AH}$$

Forma 4: Seleccionamos la secuencia cerrada de nodos BCHEB y calculamos los voltajes nodo a nodo, que deben sumar cero:

$$V_{BC} + V_{CH} + V_{HE} + V_{EB} = 0$$

Nótese que entre E y B no hay rama pero al cerrar la secuencia de nodos la suma de voltajes debe ser cero. Podemos llegar a este resultado aplicando las otras formas: primero escribimos la forma 3 para el camino no cerrado BCHE calculando la caída de voltaje entre el nodo B y E:

$$V_{BC} + V_{CH} + V_{HE} = V_{BE}$$

Por la forma 2 tenemos:

$$V_{BE} = V_B - V_E$$

$$V_{EB} = V_E - V_B = -V_{BE}$$

entonces

$$V_{BC} + V_{CH} + V_{HE} = V_{BE} = -V_{EB}$$

$$V_{BC} + V_{CH} + V_{HE} + V_{EB} = 0$$

Parte b)

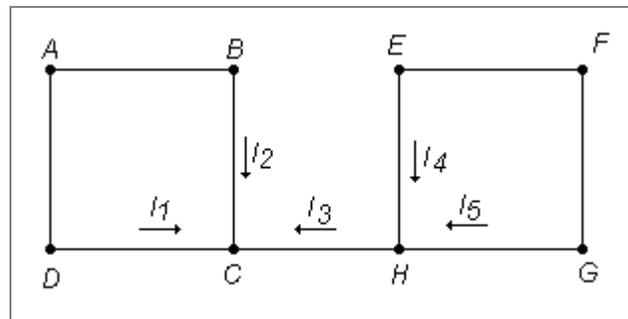


Figura 2-3

Usamos las corrientes de rama definidas en la Figura 2-3. Aplicamos KCL en el nodo C haciendo que la suma algebraica de corrientes que entran se cero:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

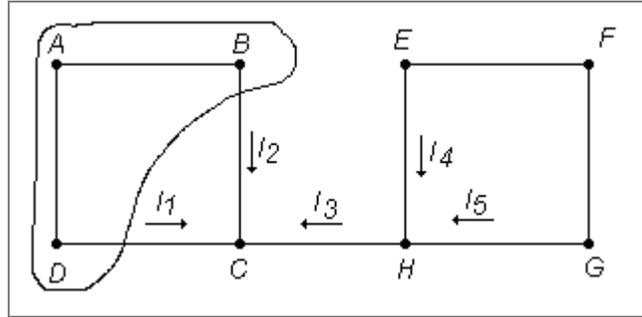
Ahora aplicamos KCL en el nodo H haciendo que la suma algebraica de corrientes que entran se cero:

$$I_4 + I_5 + (-I_3) = 0$$

$$I_4 + I_5 - I_3 = 0$$

Lo cual es equivalente a decir que las corrientes definidas entrando son iguales a las corrientes definidas saliendo:

$$I_4 + I_5 = I_3$$

Parte c)**Figura 2-4**

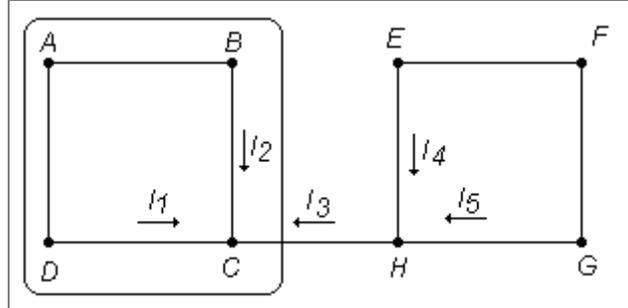
Usamos las corrientes de rama y la curva gaussiana definidas en la Figura 2-4. Aplicamos KCL en a la curva haciendo que la suma de corrientes que entran sea cero:

$$(-I_1) + (-I_2) = 0$$

Por lo tanto:

$$I_1 + I_2 = 0$$

De la parte (b) tenemos que $I_1 + I_2 + I_3 = 0$, de manera que $I_3 = 0$, lo que demuestra que la corriente en la rama CH es cero.

**Figura 2-5**

Ahora seleccionamos la curva gaussiana de la Figura 2-5 y calculamos KCL:

$$I_3 = 0$$

Parte d)

Si el elemento es una resistencia R tenemos por ley de Ohm:

$$V_{CH} = I_{CH} R = (-I_3)R = (0)R = 0$$

Si el elemento es una fuente de voltaje $+V_o$ - (potencial más alto en C que en H) tenemos:

$$V_{CH} = V_C - V_H = V_o$$

Si el elemento es un corto tenemos que el potencial en C y en H es el mismo y por tanto la caída de voltaje es cero:

$$V_{CH} = V_C - V_H = 0$$

Si el elemento es una fuente de corriente I_o podríamos tener una violación a KCL, ya que hemos demostrado que $I_3 = 0$.

Ejemplo 2-3. Aplicación numérica de KVL.

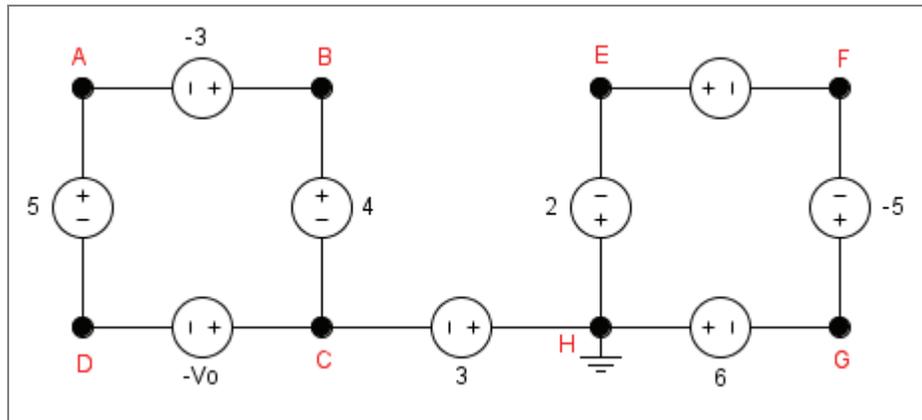


Figura 2-6

Para el circuito de la Figura 2-6 usar KVL para calcular V_{CD} , V_o , V_{DH} y V_{BE} .

Solución

En el camino cerrado DABCD conocemos todas las caídas de voltaje menos la de C a D que es la que queremos encontrar, de manera que se puede aplicar la primera forma de KVL:

$$\begin{aligned} V_{DA} + V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} &= 0 \\ (-5V) + (-[-3V]) + (4V) + V_{CD} &= 0 \\ 2V + V_{CD} &= 0 \\ V_{CD} &= -2V \\ V_{DC} &= 2V \end{aligned}$$

Para calcular V_o partimos del valor de V_{CD} :

$$\begin{aligned} V_{CD} = -2V &= V_C - V_D = -V_o \\ V_o &= 2V \end{aligned}$$

Para calcular V_{DH} aplicamos la forma tres de KVL en el camino no cerrado DCH:

$$V_{DH} = V_{DC} + V_{CH} = (2V) + (-3V) = -1V$$

Ejemplo 2-4. KVL.

Para el circuito de la Figura 2-7 encontrar las caídas de voltaje y , w y z .

Solución

Vamos a aplicar KVL en los caminos cerrados BEFGCB para encontrar y ; luego ACDGFA para encontrar w y ABEFA para encontrar z .

$$\begin{aligned}
 2 + y - 1 - 2 + 3 &= 0 & w + 2 + 2 + 1 + 3 &= 0 & z + 2 + y + 3 &= 0 \\
 y &= 3 - 5 & w &= -8 & z + 2 + (-2) + 3 &= 0 \\
 y &= -2 & & & z &= -3
 \end{aligned}$$

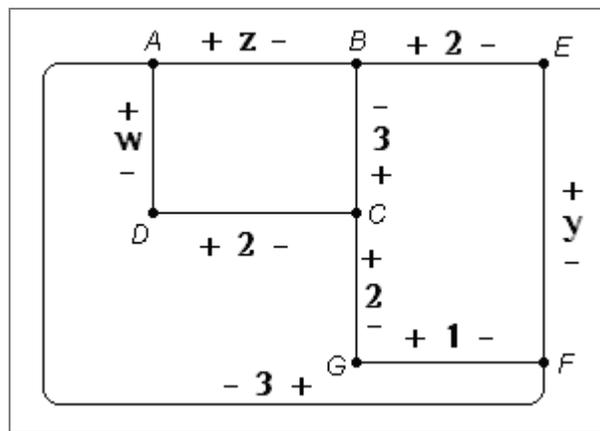


Figura 2-7

Ejemplo 2-5. Aplicación de KCL en cálculo de voltaje de un nodo.

Para el circuito de la Figura 2-8 calcular el voltaje de nodo del nodo B usando KCL.

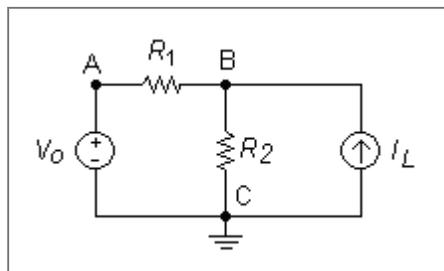


Figura 2-8

Solución

Se definen las corrientes que entran al nodo B como se muestra en la siguiente figura y luego se aplica KCL:

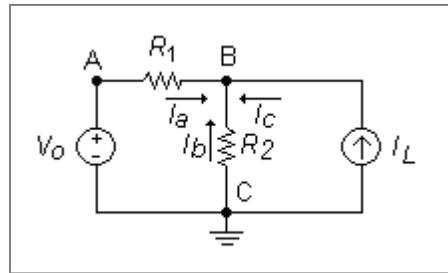


Figura 2-9

$$I_a + I_b + I_c = 0$$

Dado que el nodo C es la tierra o referencia su voltaje es cero:

$$V_C = 0$$

Por lo tanto el voltaje del nodo A es V_O .

La corriente I_c es igual I_L .

Ahora se calculan las corrientes I_a e I_b usando la ley de Ohm:

$$I_a = \frac{V_O - V_B}{R_1}; \quad I_b = \frac{0 - V_B}{R_2}$$

De manera que la ecuación de KCL queda:

$$\frac{V_O - V_B}{R_1} + \frac{0 - V_B}{R_2} + I_L = 0$$

Despejando V_B tenemos:

$$V_B = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) V_O + \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) I_L$$

Ejemplo 2-6. KCL, KVL.

Para el circuito de la Figura 2-10 encontrar:

- I_3, I_4, I_6 si se sabe que $I_1 = 1, I_2 = 1$ e $I_5 = 3$.
- I_1, I_3, I_4, I_6 si se sabe que $I_2 = 1$ e $I_5 = 1$.
- V_x, V_y y V_z si $V_r = -2, V_s = 3$ y $V_z = -2$.

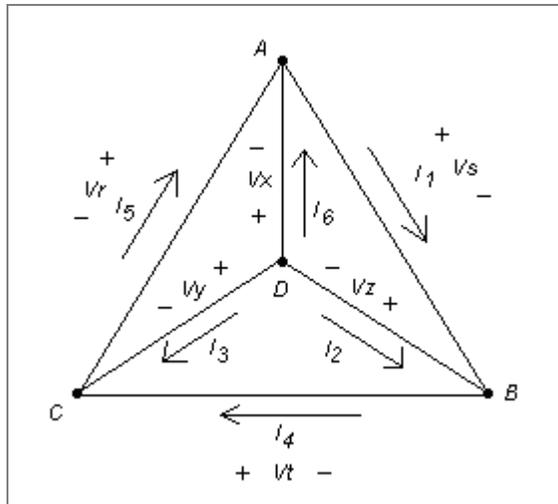


Figura 2-10

Solución

Parte a)

<p>KCL en nodo B:</p> $I_1 + I_2 - I_4 = 0$ $1 + 1 - I_4 = 0$ $\boxed{I_4 = 2}$	<p>KCL en nodo C:</p> $I_3 + I_4 - I_5 = 0$ $I_3 + 2 - 3 = 0$ $\boxed{I_3 = 1}$
<p>KCL en nodo D:</p> $I_2 + I_3 + I_6 = 0$ $1 + 1 + I_6 = 0$ $\boxed{I_6 = -2}$	<p>Como prueba podemos hacer el nodo A:</p> <p>KCL en nodo A:</p> $I_1 - I_5 - I_6 = 0$ $1 - 3 - (-2) = 0$ $\boxed{0 = 0}$

Parte b)

<p>KCL en nodo A:</p> $I_5 + I_6 - I_1 = 0$ $I_6 - I_1 = -1$	<p>KCL en nodo B:</p> $I_1 + I_2 - I_4 = 0$ $I_1 - I_4 = -1$
--	--

<p>KCL en nodo C:</p> $I_3 + I_4 - I_5 = 0$ $I_3 + I_4 = 1$	<p>KCL en nodo D:</p> $I_2 + I_3 + I_6 = 0$ $I_3 + I_6 = -1$
---	--

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

El cual tiene como solución:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Parte c)

<p>KVL en malla ABDA:</p> $V_{AB} + V_{BD} + V_{DA} = 0$ $V_s + V_z + V_x = 0$ $3 + (-2) + V_x = 0$ $\boxed{V_x = -1}$	<p>KVL en malla ADCA:</p> $V_{AD} + V_{DC} + V_{CA} = 0$ $-V_x + V_y - V_r = 0$ $-(-1) + V_y - (-2) = 0$ $\boxed{V_y = -3}$
<p>KVL en malla BCDB:</p> $V_{BC} + V_{CD} + V_{DB} = 0$ $-V_t - V_y - V_z = 0$ $-V_t - (-3) - (-2) = 0$ $\boxed{V_t = 5}$	<p>Como prueba podemos hacer la malla ABCA:</p> $V_{AB} + V_{BC} + V_{CA} = 0$ $-V_s - V_t - V_r = 0$ $3 - (5) - (-2) = 0$ $\boxed{0 = 0}$

2.6. RESISTENCIA EQUIVALENTE Y DIVISORES

2.6.1. RESISTENCIA EN SERIE Y DIVISOR DE VOLTAJE

La figura 1.a muestra un circuito de una fuente de voltaje V_x conectada a tres resistencias en serie. Por la ley de Ohm las caídas de voltaje en cada resistencia R_1 , R_2 y R_3 son V_1 , V_2 y V_3 respectivamente.

De acuerdo a KVL y a la ley de Ohm tenemos:

$$V_x = V_1 + V_2 + V_3 = R_1 I_x + R_2 I_x + R_3 I_x = (R_1 + R_2 + R_3) I_x$$

De donde

$$I_x = \frac{V_x}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Para $j = 1, 2$ y 3 se tiene:

$$V_j = R_j I_x = R_j \frac{V_x}{R_1 + R_2 + R_3} = V_x \frac{R_j}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Esta última relación se conoce como el **divisor de voltaje**.

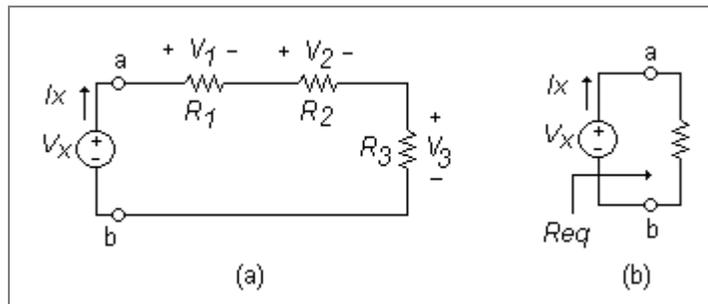


Figura 2-11

El circuito de la figura 1.b es equivalente desde el punto de vista de la fuente V_x al de la figura 1.a. La resistencia vista por la fuente se denomina resistencia equivalente y se calcula como:

$$R_{eq} = \frac{V_x}{I_x}$$

Así

$$R_{eq} = \frac{V_x}{\frac{V_x}{R_1 + R_2 + R_3}}$$

Por lo tanto

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

Lo cual indica que la resistencia equivalente de un grupo de resistencias en serie es la suma de las resistencias.

2.6.2. RESISTENCIA EN PARALELO Y DIVISOR DE CORRIENTE

La Figura 2-12 muestra un circuito de una fuente de voltaje V_X conectada a dos resistencias en paralelo.

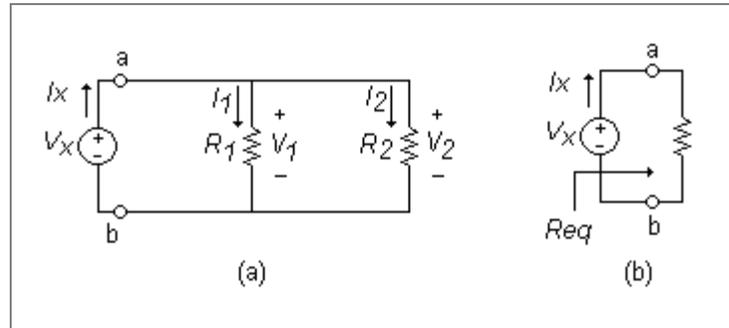


Figura 2-12

De acuerdo a KCL y a la ley de Ohm tenemos:

$$I_X = I_1 + I_2 = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2}$$

Y dado que las resistencias están en paralelo con la fuente $V_X = V_1 = V_2$:

$$I_X = \frac{V_X}{R_1} + \frac{V_X}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) V_X$$

De donde

$$\frac{I_X}{V_X} = \frac{1}{R_X} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_{eq}}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Lo cual indica que el inverso de la resistencia equivalente de un grupo de resistencias en paralelo es la suma de los inversos de cada una de las resistencias. Sabiendo que la conductancia G es $1/R$ tenemos:

$$G_{eq} = G_1 + G_2$$

Lo cual indica que la conductancia equivalente de un grupo de resistencias en paralelo es la suma de sus respectivas conductancias.

Para $j = 1$ y 2 se tiene:

$$I_j = \frac{V_X}{R_j} = \frac{I_X R_{eq}}{R_j} = \frac{I_X G_j}{G_{eq}}$$

$$I_j = I_X \frac{G_j}{G_1 + G_2}$$

Esta última relación se conoce como el **divisor de corriente**.

Ejemplo 2-7. Resistencia Equivalente.

Encontrar la resistencia equivalente R_{eq} para el circuito de la figura 3, si $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$, $R_3 = 10 \Omega$, $R_4 = 5 \Omega$.

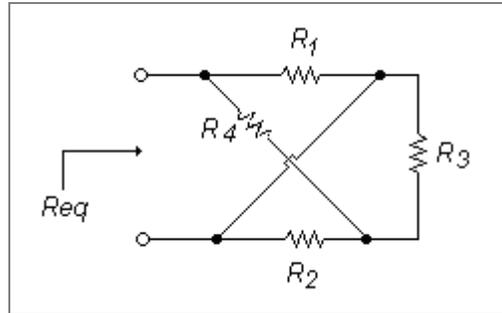


Figura 2-13

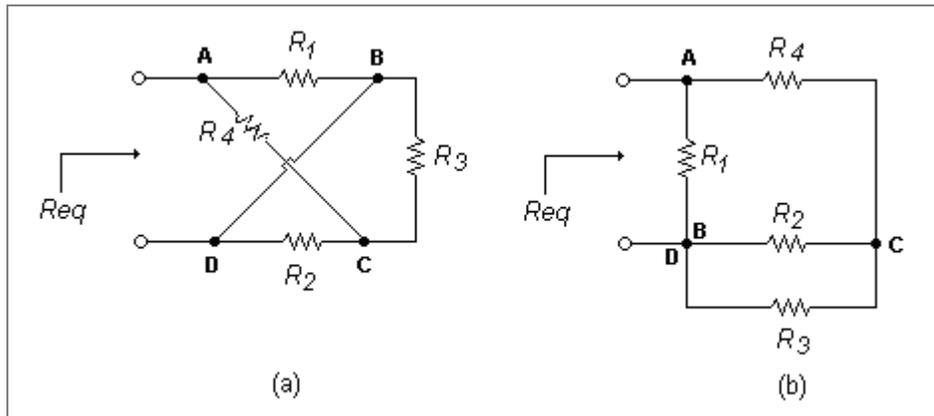
Solución

Figura 2-14

El circuito (a) es equivalente al (b) ya que los nodos B y D son uno solo. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 R_{eq} &= [(R_2 // R_3) + R_4] // R_1 \\
 &= [(10 // 10) + 5] // 20 \\
 &= [5 + 5] // 20 \\
 &= 10 // 20 \\
 &= \frac{10 \times 20}{10 + 20} \Omega = \frac{200}{30} \Omega = 6.7 \Omega
 \end{aligned}$$

Ejemplo 2-8. Resistencia equivalente y Resistencia vista por la fuente.

Para el circuito de la Figura 2-15 encontrar la resistencia equivalente vista por la fuente:

- haciendo conversión de resistencias.
- calculando $R_{eq} = V / I$.

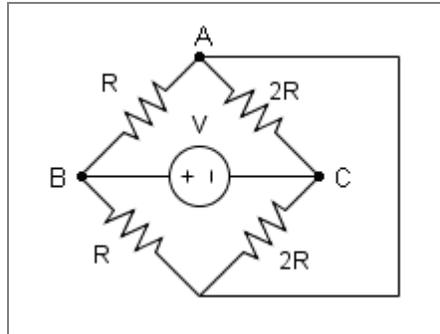


Figura 2-15

Solución**Parte a)**

El circuito mostrado en la Figura 2-16 es equivalente al de la Figura 2-15.

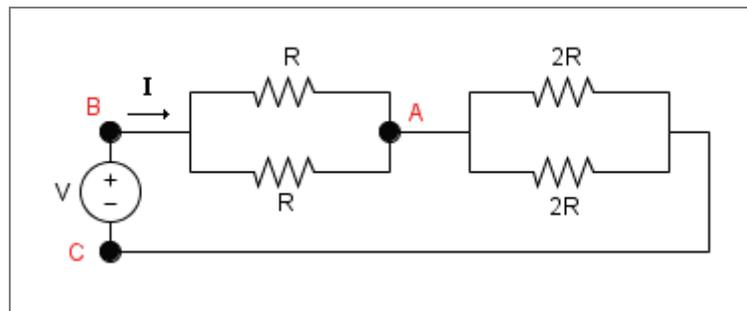


Figura 2-16

$$R_{eq} = R//R + 2R//2R = R/2 + R = 3R/2$$

Parte b)

$$R_{eq} = V/I$$

Haciendo KCL en el nodo B:

$$I = (V - V_A) / R + (V - V_A) / R = 2(V - V_A) / R$$

Haciendo KCL en el nodo A:

$$(V - V_A) / R + (V - V_A) / R + (0 - V_A) / 2R + (0 - V_A) / 2R = 0$$

$$2(V - V_A) / R - V_A / R = 0$$

$$V_A = 2V/3$$

$$I = 2(V - V_A) / R = 2(V - (2V/3)) / R = 2V/3R$$

$$R_{eq} = V/I = V / (2V/3R) = 3R/2$$

2.7. CONVERSIÓN DELTA – ESTRELLA (Δ -Y)

Algunas conexiones entre elementos no se encuentran ni en serie ni en paralelo, de manera que es más difícil encontrar su equivalente. Este es el caso de las conexiones delta-estrella como la mostrada en la siguiente figura.

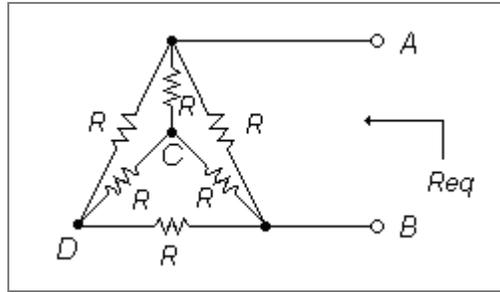


Figura 2-17

Para encontrar la resistencia equivalente se puede usar KVL o KCL, pero en algunos casos resulta más sencillo hacer la conversión delta-estrella que se muestra a continuación.

La idea del procedimiento es reemplazar un circuito en configuración estrella como el de la figura 5.a por uno que de un resultado equivalente para los nodos ABC como el mostrado en la figura 5.b que es una conexión en delta. Otra posibilidad es pasar del circuito en delta la equivalente en estrella. Para esto se aplican las relaciones presentadas a continuación:

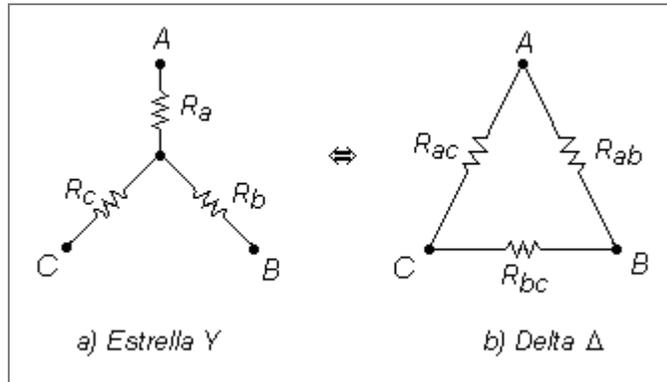


Figura 2-18

Tabla 2-1. Conversiones Delta-Estrella. Caso general.

Conversión Delta a Estrella	Conversión Estrella a Delta
$R_a = \frac{R_{ab} R_{ac}}{R_\delta}$	$R_{ab} = \frac{R_\lambda}{R_c}$
$R_b = \frac{R_{bc} R_{ab}}{R_\delta}$	$R_{ac} = \frac{R_\lambda}{R_b}$
$R_c = \frac{R_{ac} R_{bc}}{R_\delta}$	$R_{bc} = \frac{R_\lambda}{R_a}$
$R_\delta = R_{ab} + R_{ac} + R_{bc}$	$R_\lambda = R_a R_b + R_a R_c + R_b R_c$
a)	b)

En el caso de que las tres resistencias sean iguales reemplazando en las fórmulas de la Tabla 2-1. tenemos como resultado los valores de la Tabla 2-2.:

Tabla 2-2. Conversiones Delta-Estrella. Resistencias iguales.

Conversión Delta a Estrella	Conversión Estrella a Delta
$R_{ab} = R_{ac} = R_{bc} = R_{\Delta}$ $R_{\delta} = R_{ab} + R_{ac} + R_{bc} = 3R_{\Delta}$ $R_a = R_b = R_c = \frac{R_{\Delta}R_{\Delta}}{3R_{\Delta}} = \frac{R_{\Delta}}{3} = R_Y$ $\frac{R_{\Delta}}{3} = R_Y$	$R_a = R_b = R_c = R_Y$ $R_{\lambda} = R_Y R_Y + R_Y R_Y + R_Y R_Y = 3R_Y^2$ $R_{ab} = R_{ac} = R_{bc} = \frac{3R_Y^2}{R_Y} = 3R_Y = R_{\Delta}$ $3R_Y = R_{\Delta}$
a)	b)

Como se puede ver para resistencia iguales la conversión entre delta y estrella es muy sencilla:

$$3R_Y = R_{\Delta}$$

Este es un resultado muy útil que será utilizado frecuentemente en los circuitos trifásicos con carga balanceada.

Ejemplo 2-9. Resistencia Equivalente delta-estrella.

Para el siguiente circuito encontrar la resistencia equivalente R_{eq} entre los nodos A y B, si todas las resistencias valen R , usando:

- KVL o KCL.
- Conversión delta-estrella.

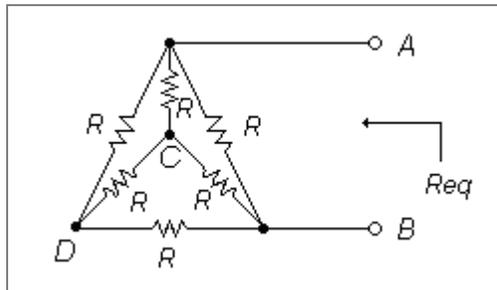
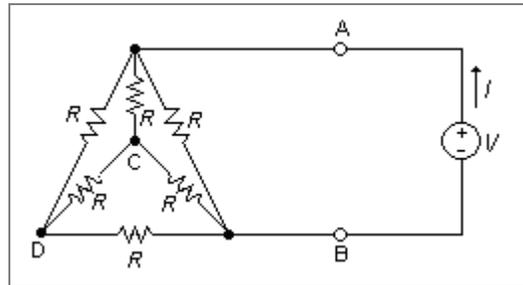


Figura 2-19

Solución**Parte a)****Figura 2-20****Nodos**

Nodo B:	Tierra: $V_b = 0$
Nodo A:	$V_a = V$
Nodo C:	KCL: $\frac{V_a - V_c}{R} + \frac{V_d - V_c}{R} + \frac{V_b - V_c}{R} = 0$ $\frac{V - V_c}{R} + \frac{V_d - V_c}{R} + \frac{-V_c}{R} = 0$ $V_c = \frac{V + V_d}{3} \quad (1)$
Nodo D:	KCL: $\frac{V_a - V_d}{R} + \frac{V_c - V_d}{R} + \frac{V_b - V_d}{R} = 0$ $\frac{V - V_d}{R} + \frac{V_c - V_d}{R} + \frac{-V_d}{R} = 0$ $V_d = \frac{V + V_c}{3} \quad (2)$

Reemplazando (1) en (2) se obtiene:

$$V_d = \frac{V + V_c}{3} = \frac{V + \frac{V + V_d}{3}}{3} = \frac{4V + V_d}{9}$$

$$9V_d = 4V + V_d$$

$$8V_d = 4V$$

$$\boxed{V_d = \frac{V}{2}}$$

$$V_c = \frac{V + \frac{V}{2}}{3} = \frac{3V}{6} = \frac{V}{2}$$

$$\boxed{V_d = V_c = \frac{V}{2}}$$

En el nodo A se puede plantear la siguiente ecuación:

$$I = \frac{V_a - V_d}{R} + \frac{V_a - V_c}{R} + \frac{V_a - V_b}{R}$$

$$IR = V - \frac{V}{2} + V - \frac{V}{2} + V$$

$$IR = 2V$$

$$\frac{V}{I} = \frac{R}{2}$$

$$\boxed{R_{eq} = \frac{V}{I} = \frac{R}{2}}$$

Parte b)

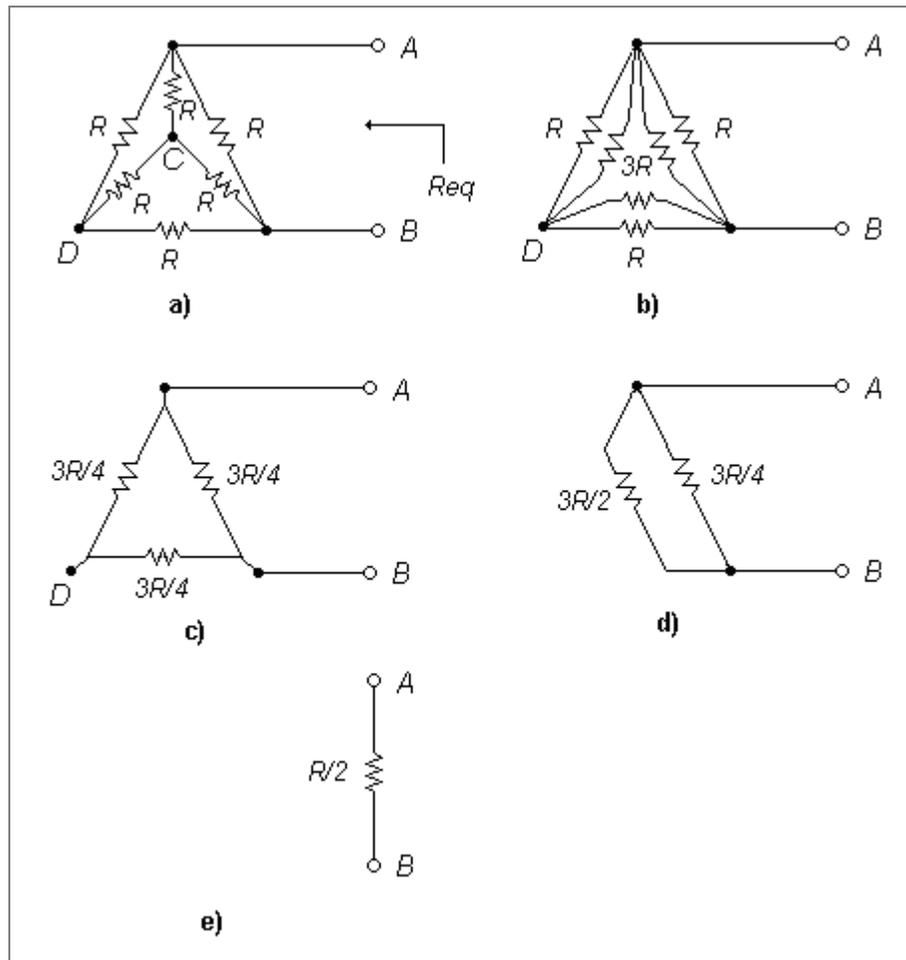


Figura 2-21

Partimos del circuito (a) donde todas las resistencias valen R . En (b) convertimos las resistencias internas que están en estrella a delta, de manera que las nuevas resistencias valen $3R$. Luego en (c) hacemos el paralelo de las resistencias externas con las internas ($R/3R$) = $3R/4$. En (d) sumamos en serie las resistencias entre AD y DB teniendo $3R/2$. Finalmente en e) hacemos el paralelo entre $3R/2$ y $3R/4$ teniendo un equivalente final de $R/2$, igual que lo encontrado en la solución de la parte (a).

2.8. SIMULACIONES

2.8.1. KCL – LEY DE CORRIENTES DE KIRCHHOFF

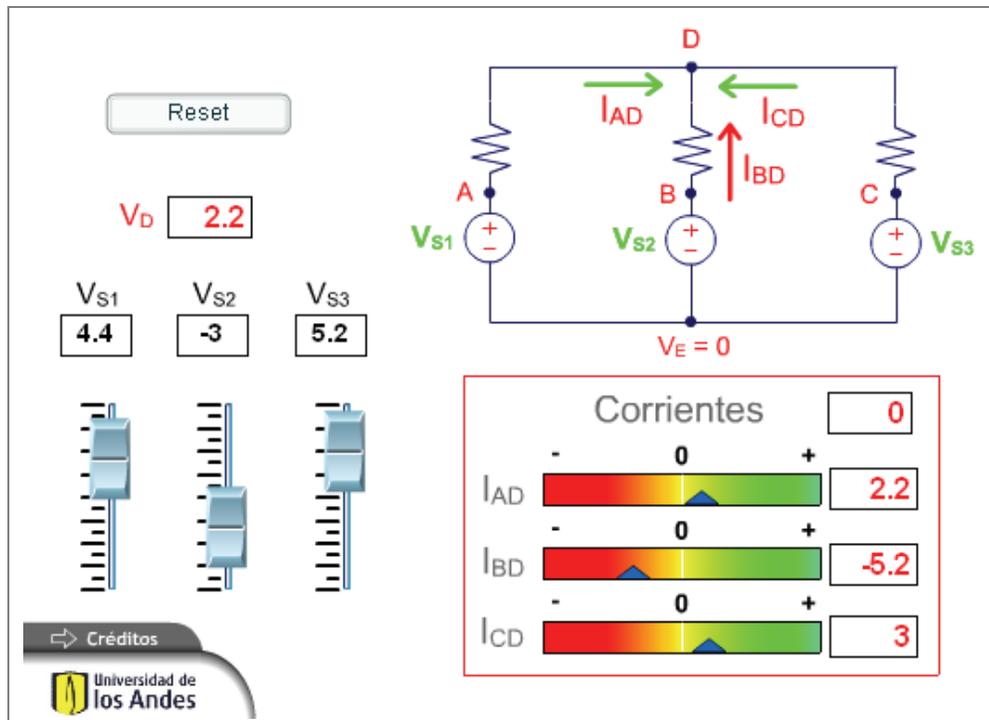


Figura 2-22

Descripción

Esta simulación pretende mostrar la Ley de Corrientes de Kirchhoff, a partir de la observación de las corrientes que entran a un nodo luego de variar los voltajes de las fuentes. El estudiante podrá ver como cambia la dirección de la corriente real y como las corrientes toman valores positivos a negativos con respecto a la dirección definida inicialmente como positiva y como la suma de tales corrientes siempre es cero.

Uso educativo

Esta simulación se presenta como un complemento a la clase presencial, para estudiantes de primeros semestres de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Mecánica. Una vez los estudiantes manejan los conceptos de nodo, voltaje, corriente y leyes de Kirchhoff, interactúan con el recurso estableciendo los valores de los voltajes de las fuentes, para luego visualizar las direcciones reales del flujo de corriente en el circuito y el voltaje que adquiere el nodo analizado. Se pueden plantear ejercicios en los que el estudiante deba comparar la simulación ante diferentes valores de voltajes, con el fin de comprobar lo enunciado en la Ley de Corrientes de Kirchhoff.

2.8.2. KVL – LEY DE VOLTAJES DE KIRCHHOFF

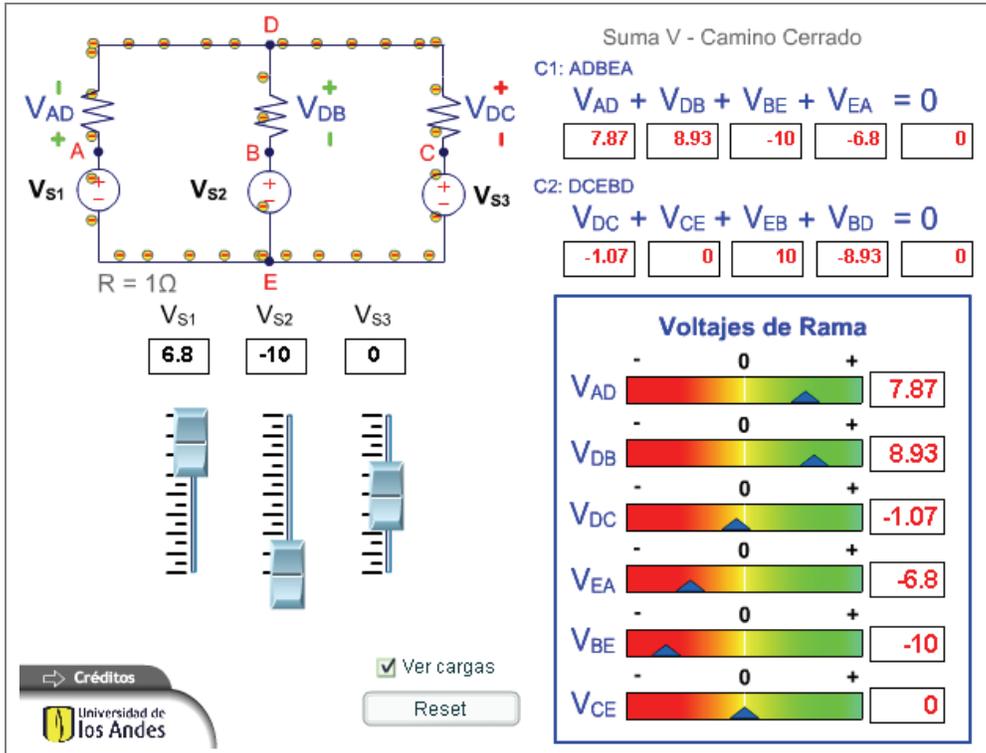


Figura 2-23

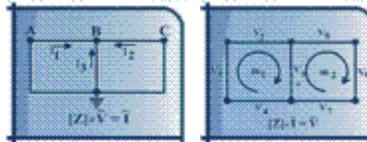
Descripción

Esta simulación pretende mostrar la Ley de Voltajes de Kirchhoff. A partir de la observación de todos los voltajes de rama se puede comprobar que la suma de caídas de voltaje en un camino cerrado es igual a cero, independientemente de los valores que tomen las fuentes y de que los voltajes de rama tomen valores positivos o negativos.

Uso educativo

Esta simulación se presenta como un complemento a la clase presencial, para estudiantes de primeros semestres de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Mecánica. Una vez los estudiantes manejan los conceptos de camino cerrado o lazo, caída de voltaje, voltaje de rama y KVL, interactúan con el recurso estableciendo los valores de los voltajes en un circuito para luego visualizar el valor de los voltajes en las ramas. Finalmente, como aplicación de la Ley de voltajes de Kirchhoff, el estudiante puede ver la suma de las caídas de voltaje en los caminos cerrados definidos es igual a cero.

3. ANÁLISIS POR NODOS Y MALLAS



3.1. INTRODUCCIÓN

Conocer para cada una de las ramas de un circuito sus voltajes de rama y sus corrientes de rama permite realizar todos los cálculos requeridos en el circuito. Una manera de calcular estos valores es la aplicación de las leyes de Kirchhoff, la ley de Ohm y el principio de conservación de potencia.

En el circuito de la Figura 3-1 tenemos siete ramas y seis nodos. Por tanto tendremos catorce variables: siete voltajes de rama y siete corrientes de rama. Si una de las variables de las ramas es conocida, por ejemplo si la rama AD corresponde a una fuente de voltaje conocida y las demás son resistencias conocidas, tendríamos trece incógnitas. De manera que debemos escribir trece ecuaciones. Para obtenerlas podemos hacer: dos de KVL para los dos caminos cerrados ABCDA y BEHCB, seis de KCL para los seis nodos, seis de la ley de Ohm para las seis ramas (resistencias) y una para la conservación de potencia. Esto nos da un total de 21 ecuaciones. Entre todas estas posibilidades, ¿cuáles seleccionar para atener un conjunto de trece ecuaciones linealmente independientes con trece incógnitas?

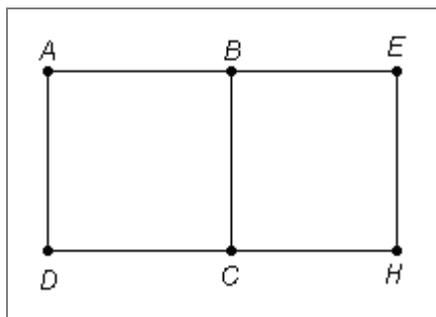


Figura 3-1

Los métodos de análisis de nodos y mallas son herramientas que permiten la aplicación organizada y sistemática de las leyes de Kirchhoff (KVL o KCL) para resolver problemas complejos con un número de incógnitas y ecuaciones linealmente independientes muy reducido.

En el método de análisis de nodos nos interesa conocer los voltajes de nodo para cada nodo del circuito. En el método de análisis de mallas nos interesa conocer las corrientes de malla para cada malla del circuito. A partir de estas variables

calculadas (voltaje de nodos o corrientes de malla) se pueden calcular todos los voltajes de rama y todas las corrientes de rama: los voltajes de rama se calculan como la diferencia entre los voltajes de nodos de los dos nodos de la rama; las corrientes de rama como la suma algebraica de las corrientes de lazo que pasan por la rama.

En el ejemplo de la Figura 3-1, por el método de análisis de nodos, tendríamos seis incógnitas (seis nodos), los cuales se convierten en cinco si uno de los nodos es el de referencia. Por el método de lazos con tan solo dos incógnitas (corrientes de las dos mallas) y dos ecuaciones sería suficiente.

Es importante anotar que con ninguno de los dos métodos tenemos el total de las variables directamente, pero se pueden calcular fácilmente a partir de ellas utilizando KVL y KCL.

3.2. ANÁLISIS POR NODOS

En el análisis por nodos se parte de la aplicación de KCL a cada nodo del circuito para encontrar al final todos los voltajes de nodo del circuito. Para que el sistema de ecuaciones sea consistente debe haber una ecuación por cada nodo. Así el número de incógnitas (voltajes de nodo) es igual al número de ecuaciones (una por nodo).

De acuerdo al tipo de circuito y la forma en que se seleccione el nodo de referencia se pueden tener distintas posibilidades de conexión de las fuentes:

- Fuentes de corriente independientes
- Fuentes de corriente controladas
- Fuentes de voltaje independientes a tierra
- Fuentes de voltaje independientes flotantes
- Fuentes de voltaje controladas a tierra
- Fuentes de voltaje controladas flotantes

Según lo anterior hay varias maneras de resolver un circuito por el método de nodos.

El método que llamaremos *general* aplica a los casos de circuitos con fuentes de corriente independientes y fuentes de voltaje independientes a tierra. Este método NO aplica a los circuitos que tienen:

1. fuentes flotantes de voltaje (se usa el método de supernodos)
2. fuentes controladas de corriente o voltaje (se deben escribir las ecuaciones de dependencia de la variable controlada y controladora)

Si el circuito solo tiene fuentes de corriente independientes entonces se aplica el método general por el sistema llamado de *inspección*.

3.3. ANÁLISIS POR MALLAS

En el análisis de mallas se parte de la aplicación de KVL a un conjunto mínimo de lazos para encontrar al final todas las corrientes de lazo. A partir de las corrientes de lazo es posible encontrar todas las corrientes de rama. El número de lazos que se pueden plantear en un circuito puede ser muy grande, pero lo importante es que el sistema de ecuaciones represente un conjunto mínimo de lazos independientes.

Este conjunto mínimo es cualquiera en el cual todos los elementos (ramas) hayan sido tenidos en cuenta en al menos una malla. Las otras posibles mallas serán entonces redundantes. Aquí también el número de incógnitas (corrientes de lazo) debe ser igual al número de ecuaciones (una por malla del conjunto mínimo).

De acuerdo al tipo de circuito y la forma en que se seleccionen las mallas se pueden tener distintas posibilidades de conexión de las fuentes:

- Fuentes de corriente controladas
- Fuentes de voltaje independientes
- Fuentes de voltaje controladas
- Fuentes de corriente independientes no compartidas por varias mallas
- Fuentes de corriente independientes compartidas por varias mallas

Según lo anterior hay varias maneras de resolver un circuito por el método de mallas.

El método que llamaremos *general* aplica a los casos de circuitos con fuentes de voltaje independientes y fuentes de corriente independientes no compartidas por varias mallas. Este método NO aplica a los circuitos que tienen:

1. Fuentes de corriente independientes compartidas por varias mallas (se usa el método de supermalla)
2. fuentes controladas de corriente o voltaje (se deben escribir las ecuaciones de dependencia de la variable controlada y controladora)

Si el circuito solo tiene fuentes de voltaje independientes entonces se aplica el método general por el sistema llamado de *inspección*.

El número mínimo de lazos independientes que hay que definir para tener un sistema de ecuaciones linealmente independientes que se deben tener está dado por la siguiente relación:

$$\# \text{ Lazos independiente} = \# \text{ ramas} - \# \text{ nodos} + 1$$

Para que un conjunto de lazos sea independiente se requiere que en cada uno de ellos exista al menos un elemento que haga parte de los otros lazos.

Ejemplo 3-1. Identificación de Lazos y Mallas.

- a. Para el circuito de la Figura 3-2:
- b. Identificar los nodos y las ramas.
- c. Dibujar o identificar todos los lazos diferentes posibles.
- d. Dibujar o identificar todas las mallas.
- e. Dibujar o identificar un conjunto de lazos independientes que sea diferente al conjunto de mallas.

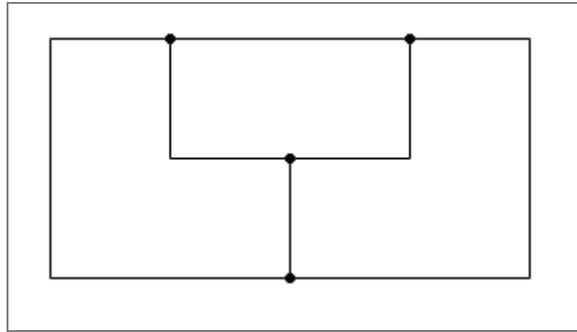


Figura 3-2

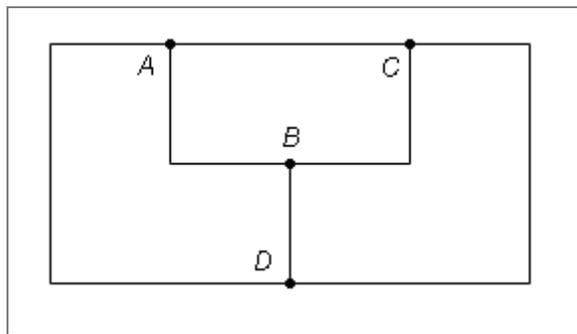
Solución

Figura 3-3

Parte a)

Este circuito tiene cuatro nodos que hemos denominado en la Figura 3-3 A, B, C y D. Nótese que los quiebres de las líneas no constituyen necesariamente nodos, pues no siempre hay unión de dos o más ramas.

Tenemos seis ramas: AD, AB, AC, BC, CD y BD.

Parte b)

Los lazos son los caminos cerrados del circuito. En este caso serían: ABDA, ABCA, CBDB, ACDA, ACBDA, CABDC, ADCBA.

Parte c)

El número de mallas es igual al de lazos independientes:

$$\# \text{ mallas} = \# \text{ lazos independientes} = \# \text{ ramas} - \# \text{ nodos} + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$$

Estas mallas son los lazos que no contienen otros lazos a su interior: ABDA, ABCA y CBDB.

Parte d)

Para tener un conjunto de lazos independientes se requiere que al menos una rama de cada lazo no pertenezca a los otros lazos que conformarán los lazos independientes. Como nos piden un conjunto de lazos independientes ya sabemos que deben ser tres (como el número de mallas). Podemos comenzar por seleccionar un lazo cualquiera y luego ir buscando otros que sean independientes.

Vamos a seleccionar el lazo inicial ABDA. Como no hemos adicionado ningún otro lazo al conjunto es evidente que este es independiente.

Ahora seleccionamos el segundo lazo independiente haciendo que una de sus ramas no esté en el primer lazo ABDA. Un candidato puede ser ABCA ya que la rama BC no está en el primer lazo.

Ahora hay que seleccionar un tercer lazo que tenga una rama que no esté en los dos primeros. El lazo exterior ACDA tiene la rama CD que no está en los dos lazos anteriores, de manera que así tenemos el conjunto deseado de tres lazos independientes.

Evidentemente este método para encontrar los lazos independientes es más complejo que el de la mallas.

Ejemplo 3-2. Análisis por Mallas.

Encontrar un sistema de ecuaciones de mallas para el siguiente circuito.

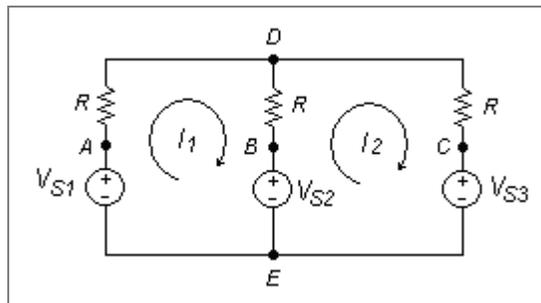


Figura 3-4

Solución

Malla 1:

$$\begin{aligned}
 V_{EA} + V_{AD} + V_{DB} + V_{BE} &= 0 \\
 -V_{S1} + R \cdot I_{AD} + R \cdot I_{DB} + V_{S2} &= 0 \\
 -V_{S1} + R \cdot (I_1) + R \cdot (I_1 - I_2) + V_{S2} &= 0 \\
 -V_{S1} + I_1 \cdot (2R) + I_2 \cdot (-R) + V_{S2} &= 0 \\
 \boxed{(2R) \cdot I_1 + (-R) \cdot I_2 = V_{S1} - V_{S2}}
 \end{aligned}$$

Malla 2:

$$\begin{aligned}
 V_{EB} + V_{BD} + V_{DC} + V_{CE} &= 0 \\
 -V_{S2} + R \cdot I_{BD} + R \cdot I_{DC} + V_{S3} &= 0 \\
 -V_{S2} + R \cdot (-I_1 + I_2) + R \cdot (I_2) + V_{S3} &= 0 \\
 -V_{S2} + I_1 \cdot (-R) + I_2 \cdot (2R) + V_{S3} &= 0 \\
 \boxed{(-R) \cdot I_1 + (2R) \cdot I_2 = V_{S2} - V_{S3}}
 \end{aligned}$$

Ecuación Matricial:

$$(2R) \cdot I_1 + (-R) \cdot I_2 = V_{S1} - V_{S2}$$

$$(-R) \cdot I_1 + (2R) \cdot I_2 = V_{S2} - V_{S3}$$

$$\begin{bmatrix} 2R & -R \\ -R & 2R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{S1} - V_{S2} \\ V_{S2} - V_{S3} \end{bmatrix}$$

Solución Ecuación Matricial:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2R & -R \\ -R & 2R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_{S1} - V_{S2} \\ V_{S2} - V_{S3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{(4 \cdot R^2 - R^2)} \begin{bmatrix} 2R & R \\ R & 2R \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} V_{S1} - V_{S2} \\ V_{S2} - V_{S3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{3R} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} V_{S1} - V_{S2} \\ V_{S2} - V_{S3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{3R} \right) \begin{bmatrix} 2V_{S1} - V_{S2} - V_{S3} \\ V_{S1} + V_{S2} - 2V_{S3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2V_{S1} - V_{S2} - V_{S3})/3R \\ (V_{S1} + V_{S2} - 2V_{S3})/3R \end{bmatrix}$$

$$V_{ED} = V_{EA} + V_{AD} = V_E - V_D$$

$$V_D = -V_{AD} - V_{EA}$$

$$V_D = -(R \cdot I_{AD}) - (-V_{S1})$$

$$V_D = -R \cdot I_1 + V_{S1}$$

$$V_D = -R \cdot [(2V_{S1} - V_{S2} - V_{S3})/3R] + V_{S1}$$

$$V_D = -[(2V_{S1} - V_{S2} - V_{S3})/3] + V_{S1}$$

$$\boxed{V_D = (V_{S1} + V_{S2} + V_{S3})/3}$$

Ejemplo 3-3. Análisis por Mallas.

Encontrar el sistema de ecuaciones de mallas para el siguiente circuito.

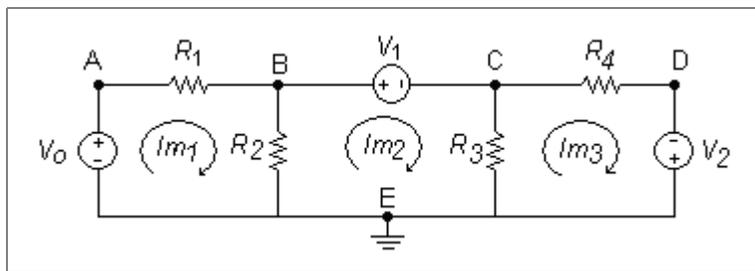


Figura 3-5

Solución

Malla 1:

$$\begin{aligned}
 V_{EA} + V_{AB} + V_{BE} &= 0 \\
 -V_0 + R_1 \cdot I_{AB} + R_2 \cdot I_{BE} &= 0 \\
 -V_0 + R_1 \cdot (I_{M1}) + R_2 \cdot (I_{M1} - I_{M2}) &= 0 \\
 -V_0 + I_{M1}(R_1 + R_2) + I_{M2}(-R_2) &= 0 \\
 I_{M1}(R_1 + R_2) + I_{M2}(-R_2) &= V_0
 \end{aligned}$$

Malla 2:

$$\begin{aligned}
 V_{EB} + V_{BC} + V_{CE} &= 0 \\
 R_2 \cdot I_{EB} + V_1 + R_3 \cdot I_{CE} &= 0 \\
 R_2 \cdot (I_{M2} - I_{M1}) + V_1 + R_3 \cdot (I_{M2} - I_{M3}) &= 0 \\
 I_{M1}(-R_2) + I_{M2}(R_2 + R_3) + I_{M3}(-R_3) &= -V_1
 \end{aligned}$$

Malla 3:

$$\begin{aligned}
 V_{EC} + V_{CD} + V_{DE} &= 0 \\
 R_3 \cdot I_{EC} + R_4 \cdot I_{CD} - V_2 &= 0 \\
 R_3 \cdot (I_{M3} - I_{M2}) + R_4 \cdot (I_{M3}) - V_2 &= 0 \\
 I_{M2}(-R_3) + I_{M3}(R_3 + R_4) &= V_2
 \end{aligned}$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 & -R_3 \\ 0 & -R_3 & R_3 + R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 \\ -V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3-4. Análisis por Lazos, Mallas (supermalla) y Variable Auxiliar.

Para el circuito de la Figura 3-6 encontrar un sistema de ecuaciones y calcular la corriente I_{M1} por los siguientes métodos:

- Para la figura (a) hacerlo usando las dos mallas y la variable auxiliar V_x .
- Para la figura (b) hacerlo usando las **corrientes de malla** y la supermalla indicadas.
- Para la figura (c) usar las **corrientes de lazo** indicadas.

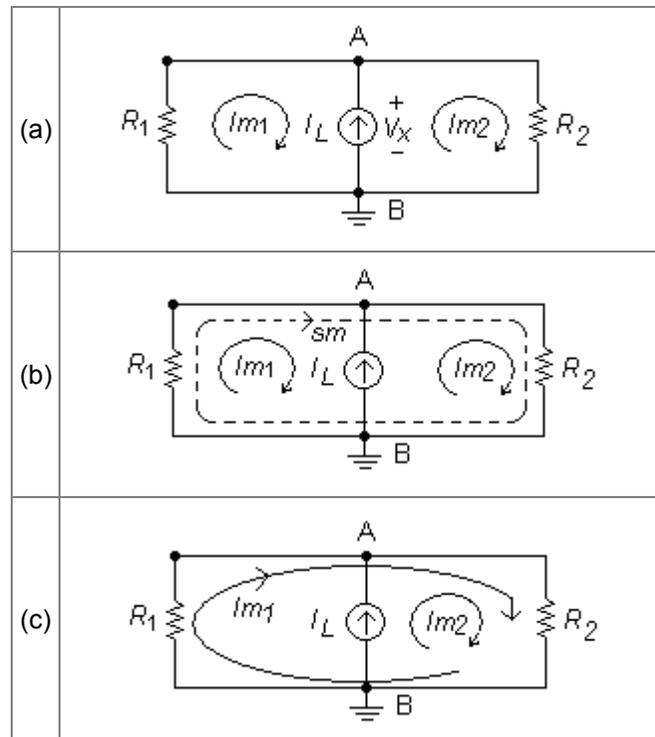


Figura 3-6

Solución**Parte a)**

Se define una variable auxiliar de voltaje V_x en la fuente de corriente compartida por las dos mallas y se plantean las siguientes ecuaciones:

Restricción:

$$I_L = I_{m2} - I_{m1}$$

Malla 1:

$$I_{m1}R_1 + V_x = 0$$

Malla 2:

$$-V_x + I_{m2}R_2 = 0$$

$$V_x = I_{m2}R_2$$

Reemplazando V_x en la malla 1 tenemos:

$$I_{m1}R_1 + I_{m2}R_2 = 0$$

Esta ecuación más la de la restricción en forma matricial será:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ R_1 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_L \\ 0 \end{bmatrix}$$

Parte b)

Se tienen dos ecuaciones: una de la restricción de corriente en la fuente y otra calculando KVL para el camino definido por la supermalla pero usando las corrientes de malla definidas.

Restricción:

$$I_L = I_{m2} - I_{m1}$$

Supermalla:

$$I_{m1}R_1 + I_{m2}R_2 = 0$$

Forma matricial:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ R_1 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_L \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ahora podemos calcular I_{m1} así:

$$I_{M1} = \frac{\begin{vmatrix} I_L & 1 \\ 0 & R_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ R_1 & R_2 \end{vmatrix}} = \frac{-I_L R_2}{R_1 + R_2}$$

$$I_{M1} = \frac{-I_L R_2}{R_1 + R_2}$$

Parte c)

Malla 1:

$$\begin{aligned} I_{m1}R_1 + (I_{m2} + I_{m1})R_2 &= 0 \\ I_{m1}(R_1 + R_2) + I_{m2}R_2 &= 0 \end{aligned}$$

Malla 2:

$$I_{m2} = I_L$$

Forma matricial:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & R_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_L \end{bmatrix}$$

Ahora podemos calcular I_{M1} así:

$$I_{M1} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & R_2 \\ I_L & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_2 & R_2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-I_S R_L}{R_1 + R_2}$$

$$I_{M1} = \frac{-I_L R_2}{R_1 + R_2}$$

Nótese que en los tres casos la corriente I_{M1} vale lo mismo y corresponde a la corriente por R_1 . Sin embargo en el caso (c) la corriente por R_2 corresponde a la suma de dos corrientes de lazo ($I_{M1} + I_{M2}$), mientras que en (a) y (b) corresponde directamente a la corriente de malla que pasa por ella (I_{M2}).

Ejemplo 3-5. Análisis por Nodos.

Encontrar un sistema de ecuaciones de nodos para el circuito mostrado en la siguiente figura.

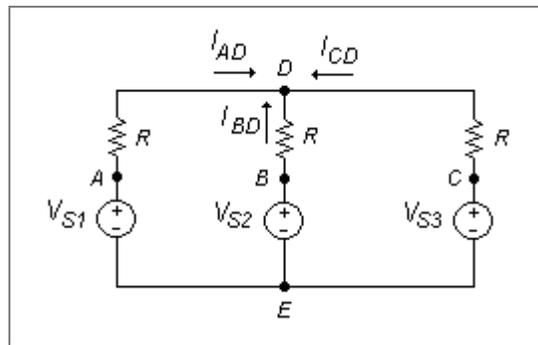


Figura 3-7

Solución

Como se verá los nodos A, B, C y E no requieren la aplicación de KCL y sus valores se calculan directamente. De manera que solo hay que escribir una ecuación de nodos para el nodo D.

Nodo E:

Tomamos como referencia el nodo E: $V_E = 0$

Nodo A:

$$V_{S1} = V_{AE} = V_A - V_E = V_A$$

Nodo B:

$$V_{S2} = V_{BE} = V_B - V_E = V_B$$

Nodo C:

$$V_{S2} = V_{CE} = V_C - V_E = V_C$$

Nodo D:

$$I_{AD} + I_{BD} + I_{CD} = 0$$

$$\frac{V_{AD}}{R} + \frac{V_{BD}}{R} + \frac{V_{CD}}{R} = 0$$

$$V_{AD} + V_{BD} + V_{CD} = 0$$

$$(V_A - V_D) + (V_B - V_D) + (V_C - V_D) = 0$$

$$V_A + V_B + V_C - 3V_D = 0$$

$$3V_D = V_A + V_B + V_C$$

$$V_D = \frac{V_A + V_B + V_C}{3}$$

Ejemplo 3-6. Análisis por Nodos – Fuentes de Voltaje a Tierra.

Encontrar el sistema de ecuaciones de nodos para el circuito de la Figura 3-8.

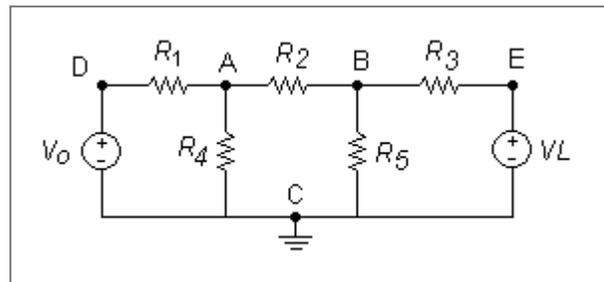


Figura 3-8

Solución

Dado que la referencia es el nodo C y que las fuentes de voltaje están a tierra, solo se requiere aplicar KCL a los nodos A y B.

Nodo C:

Se toma como referencia $V_C = 0$

Nodo D:

$$V_0 = V_{DC} = V_D - V_C = V_D$$

Nodo E:

$$V_E = V_L$$

Nodo A: (corrientes que salen igual a cero)

$$\begin{aligned}
 I_{AD} + I_{AC} + I_{AB} &= 0 \\
 \frac{V_{AD}}{R_1} + \frac{V_{AC}}{R_4} + \frac{V_{AB}}{R_2} &= 0 \\
 \frac{V_A - V_D}{R_1} + \frac{V_A - V_C}{R_4} + \frac{V_A - V_B}{R_2} &= 0 \\
 V_A \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right) - \frac{V_B}{R_2} - \frac{V_D}{R_1} - \frac{V_C}{R_4} &= 0 \\
 V_A \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2} \right) + V_B \left(\frac{-1}{R_2} \right) &= \frac{V_0}{R_1}
 \end{aligned}$$

Nodo B: (corrientes que salen igual a cero)

$$\begin{aligned}
 I_{BA} + I_{BC} + I_{BE} &= 0 \\
 V_A \left(-\frac{1}{R_2} \right) + V_B \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \right) &= \frac{V_L}{R_3}
 \end{aligned}$$

En forma matricial tenemos:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right) & -1/R_2 \\ -1/R_2 & \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0/R_1 \\ V_L/R_3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3-7. Análisis por Nodos – Fuentes de Voltaje a Tierra y Fuentes de Corriente.

Encontrar el sistema de ecuaciones de nodos para el circuito de la Figura 3-9.

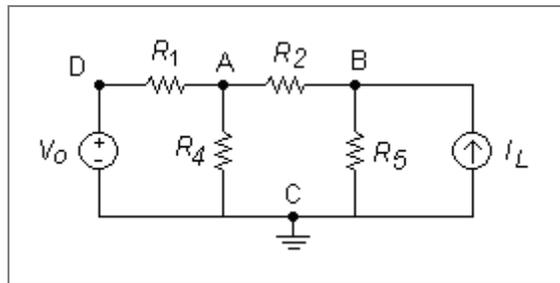


Figura 3-9

Solución

Nodo C:

Se toma como referencia $V_C = 0$

Nodo D:

$$V_0 = V_D$$

En este caso solo los nodos A y B requieren aplicar KCL.

Nodo A: (corrientes que salen igual a cero)

$$\begin{aligned}
 I_{AD} + I_{AC} + I_{AB} &= 0 \\
 \frac{V_{AD}}{R_1} + \frac{V_{AC}}{R_4} + \frac{V_{AB}}{R_2} &= 0 \\
 \frac{(V_A - V_D)}{R_1} + \frac{(V_A - V_C)}{R_4} + \frac{(V_A - V_B)}{R_2} &= 0 \\
 V_A \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{V_B}{R_2} - \frac{V_D}{R_1} - \frac{V_C}{R_4} &= 0 \\
 V_A \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right) + V_B \left(\frac{-1}{R_2} \right) &= \frac{V_0}{R_1}
 \end{aligned}$$

Nodo B: (corrientes que salen igual a cero)

$$\begin{aligned}
 I_{AB} + I_{BC} + (-I_L) &= 0 \\
 \frac{V_B - V_A}{R_2} + \frac{V_B - V_C}{R_5} - I_L &= 0 \\
 V_A \left(\frac{-1}{R_2} \right) + V_B \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} \right) &= I_L
 \end{aligned}$$

En forma matricial tenemos:

$$\begin{bmatrix} (1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_4) & -1/R_2 \\ -1/R_2 & (1/R_2 + 1/R_5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0/R_1 \\ I_L \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3-8. Análisis por Nodos – Fuentes de Corriente a Tierra o Flotantes.

Encontrar el sistema de ecuaciones de nodos para el circuito de la Figura 3-10.

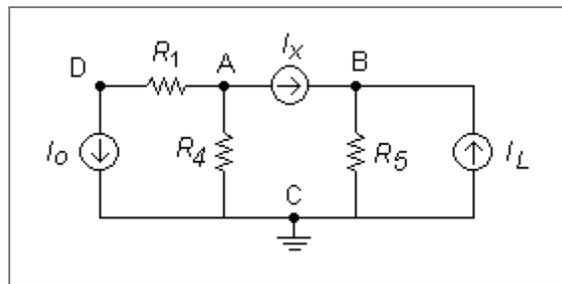


Figura 3-10

Solución

En este caso solo los nodos A, B y D requieren aplicar KCL.

Nodo C: Se toma como referencia $V_C = 0$

Nodo A: (corrientes que salen igual a cero)

$$\begin{aligned}
 I_{AD} + I_{AC} + I_{AB} &= 0 \\
 \frac{V_{AD}}{R_1} + \frac{V_{AC}}{R_4} + I_X &= 0 \\
 \frac{V_A - V_D}{R_1} + \frac{V_A - V_C}{R_4} + I_X &= 0 \\
 \frac{V_A - V_D}{R_1} + \frac{V_A}{R_4} + I_X &= 0 \\
 V_A \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} \right) + V_D \left(\frac{-1}{R_1} \right) &= -I_X
 \end{aligned}$$

Nodo B: (corrientes que salen igual a cero)

$$\begin{aligned}
 I_{BA} + I_{BC1} + I_{BC2} &= 0 \\
 -I_X + \frac{V_{BC}}{R_5} - I_L &= 0 \\
 \frac{V_B - V_C}{R_5} &= I_X + I_L \\
 \frac{V_B}{R_5} &= I_X + I_L
 \end{aligned}$$

Nodo D: (corrientes que salen igual a cero)

$$\begin{aligned}
 I_{DC} + I_{DA} &= 0 \\
 I_0 + \frac{V_D - V_A}{R_1} &= 0 \\
 V_A \left(\frac{-1}{R_1} \right) + V_D \left(\frac{1}{R_1} \right) &= -I_0
 \end{aligned}$$

En forma matricial:

$$\boxed{
 \begin{bmatrix}
 1/R_1 + 1/R_4 & 0 & -1/R_1 \\
 0 & 1/R_5 & 0 \\
 -1/R_1 & 0 & 1/R_1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 V_A \\
 V_B \\
 V_D
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 -I_X \\
 I_X + I_L \\
 -I_0
 \end{bmatrix}
 }$$

Ejemplo 3-9. Análisis por Nodos – Fuentes de Voltaje Flotantes.

Encontrar el sistema de ecuaciones de nodos para el siguiente circuito.

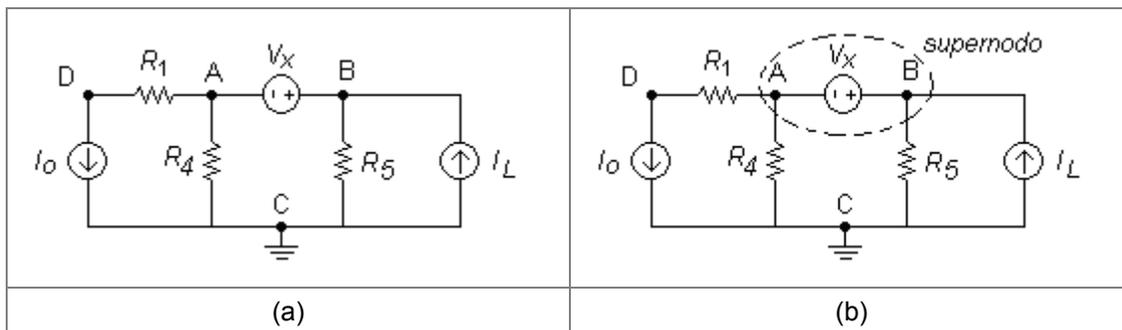


Figura 3-11

Solución

En este caso se tienen cuatro nodos, de manera que al seleccionar el nodo C como referencia el sistema se reduce a tres nodos: A, B y D. Para el nodo D se escribe la ecuación correspondiente a KCL de la manera tradicional. Sin embargo para los nodos A y B no se puede hacer lo mismo, de manera que tenemos tres incógnitas y una ecuación.

Para encontrar dos ecuaciones adicionales se procede a escribir la ecuación de KCL del supernodo (corrientes que entran en la curva gaussiana mostrada) en función de los voltajes de nodo de los nodos A, B y D. La tercera ecuación resulta de la restricción que impone el supernodo: la caída de voltaje en la fuente corresponde a la diferencia de potencial entre los dos nodos A y B.

Nodo D: (corrientes que salen igual a cero)

$$I_{DC} + I_{DA} = 0$$

$$I_0 + \frac{V_D - V_A}{R_1} = 0$$

$$V_A \left(\frac{1}{R_1} \right) + V_D \left(\frac{-1}{R_1} \right) = I_0$$

KCL en el supernodo: (corrientes que salen igual a cero)

$$I_{AD} + I_{AC} + I_{BC} - I_L = 0$$

$$\frac{V_A - V_D}{R_1} + \frac{V_A - V_C}{R_4} + \frac{V_B - V_C}{R_5} - I_L = 0$$

$$\frac{V_A - V_D}{R_1} + \frac{V_A}{R_4} + \frac{V_B}{R_5} = I_L$$

$$V_A \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} \right) + V_B \left(\frac{1}{R_5} \right) + V_D \left(\frac{-1}{R_1} \right) = I_L$$

Restricción en el supernodo:

$$V_A - V_B = -V_X$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1/R1 & 0 & -1/R1 \\ 1/R1+1/R4 & 1/R5 & -1/R1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_O \\ I_L \\ -V_X \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3-10. Análisis por Nodos – Supernodos con fuente controlada.

Plantear las ecuaciones de nodos para el circuito de la Figura 3-12.

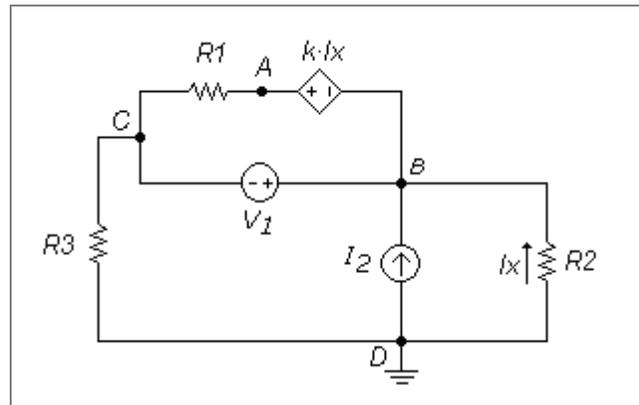


Figura 3-12

Solución

Dado que el nodo D es tierra y que las fuentes de voltaje (independiente y controlada) tienen una conexión directa a ese nodo las dos fuentes de voltaje son flotantes. Por tanto es necesario plantear un supernodo.

Como muestra la siguiente figura un supernodo que tome las dos fuentes al tiempo puede servir.

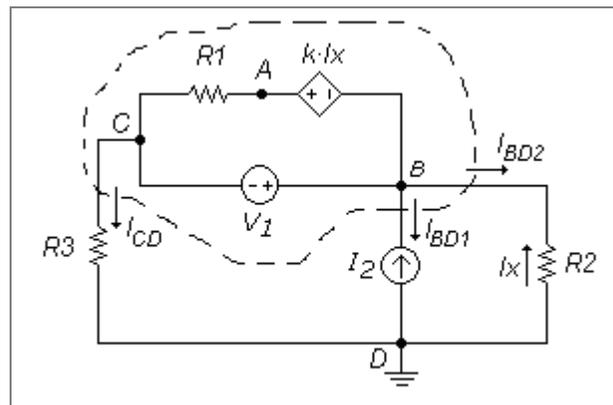


Figura 3-13

Nodo D:

$$V_D = 0$$

KCL en el supernodo: (corrientes que salen igual a cero)

$$\begin{aligned}
 I_{CD} + I_{BD1} + I_{BD2} &= 0 \\
 \frac{V_C - V_D}{R_3} - I_2 + \frac{V_B - V_D}{R_2} &= 0 \\
 \frac{V_C}{R_3} - I_2 + \frac{V_B}{R_2} &= 0 \\
 V_B \left(\frac{1}{R_2} \right) + V_C \left(\frac{1}{R_3} \right) &= I_2
 \end{aligned}$$

Restricciones:

1)

$$I_X = -V_B / R_2$$

2)

$$\begin{aligned}
 V_A - V_B &= kI_X = -k \frac{V_B}{R_2} \\
 V_A - V_B + k \frac{V_B}{R_2} &= 0 \\
 V_A + V_B \left(\frac{k}{R_2} - 1 \right) &= 0
 \end{aligned}$$

3)

$$V_B - V_C = V_1$$

Poniendo en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/R_2 & 1/R_3 \\ 1 & (k/R_2 - 1) & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 \\ 0 \\ V_1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3-11. Análisis por Nodos y Mallas.

Plantear las ecuaciones en forma matricial para el circuito de la Figura 3-14 por los siguientes métodos:

- Análisis de mallas.
- Análisis de nodos.

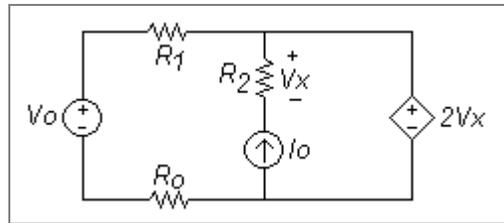


Figura 3-14

Solución

Parte a)

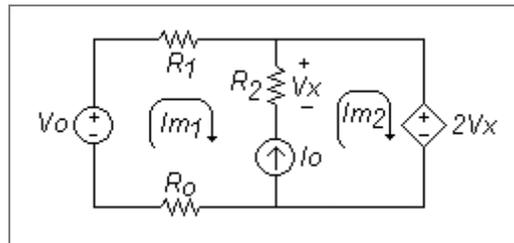


Figura 3-15

En este circuito tenemos dos mallas posibles, de manera que debemos tener un sistema de ecuaciones de 2×2 .

Vamos a utilizar las dos mallas mostradas en la Figura 3-15 con sus respectivas corrientes de malla. Dado que las dos mallas tienen una fuente de corriente compartida debemos tener una restricción en esta fuente y hacer una supermalla (camino cerrado externo del circuito).

Por otra parte, dado que hay una fuente controlada se debe calcular primero la variable controladora en términos de las variables del sistema (corrientes de malla).

Restricción en la fuente compartida:

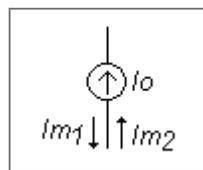


Figura 3-16

$$I_0 = I_{m2} - I_{m1}$$

Calculo de variable controladora V_x en R_2 :

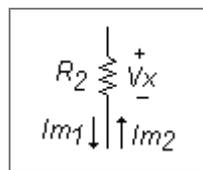


Figura 3-17

Teniendo en cuenta la convención pasiva de signos la ley de Ohm en R_2 será:

$$V_X = R_2 [I_{m1} - I_{m2}] = 0$$

KVL en la Supermalla:

$$-V_0 + R_1 I_{m1} + 2V_X + R_0 I_{m1} = 0$$

$$-V_0 + R_1 I_{m1} + 2(R_2 [I_{m1} - I_{m2}]) + R_0 I_{m1} = 0$$

Poniendo la restricción y la supermalla en forma matricial tenemos:

$$\begin{bmatrix} R_0 + R_1 + 2R_2 & -2R_2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 \\ I_0 \end{bmatrix}$$

Parte b)

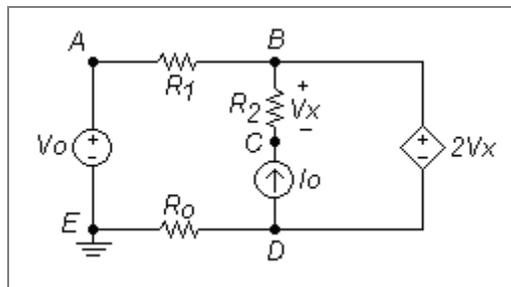


Figura 3-18

En este circuito tenemos cinco nodos, los cuales se muestran en la Figura 3-18. Seleccionando el nodo E como referencia ($V_E = 0$) se conoce el nodo A ya que la fuente V_0 estaría a tierra: ($V_A = V_0$). De manera que de los cinco nodos nos quedan tres por calcular (sistema de 3×3).

La fuente de voltaje controlada será una fuente flotante y se calcula con KVL en un supernodo y genera una restricción.

Nuevamente se debe calcular la variable controladora V_x pero esta vez en función de los voltajes de nodos que la definen en R_2 .

Calculo de variable controladora V_x en R_2 :

$$V_X = V_B - V_C$$

Restricción en la fuente flotante:

$$V_B - V_D = 2V_X$$

$$V_B - V_D = 2(V_B - V_C)$$

$$-V_B + 2V_C - V_D = 0$$

KVL en nodo C:

$$\frac{V_B - V_C}{R_2} + I_0 = 0$$

$$V_B - V_C + I_0 R_2 = 0$$

$$V_B - V_C = -I_0 R_2$$

Supernodo:

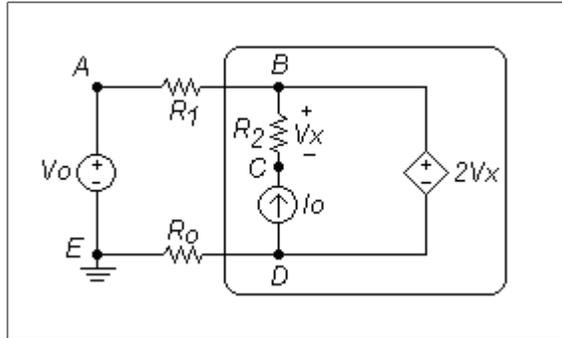


Figura 3-19

$$\frac{V_0 - V_B}{R_1} + \frac{0 - V_D}{R_0} = 0$$

$$-\frac{V_B}{R_1} - \frac{V_D}{R_0} = -\frac{V_0}{R_1}$$

En forma matricial tenemos:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & 0 & -\frac{1}{R_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_B \\ V_C \\ V_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -I_0 R_2 \\ -\frac{V_0}{R_1} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3-12. Análisis por Nodos y Mallas.

Plantear las ecuaciones de nodos y mallas para el circuito de la Figura 3-20 por los siguientes métodos:

- Análisis de nodos.
- Análisis de mallas.

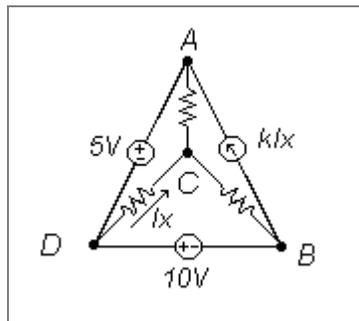


Figura 3-20

Solución

Definimos los nodos y mallas que vamos a utilizar en la Figura 3-21:

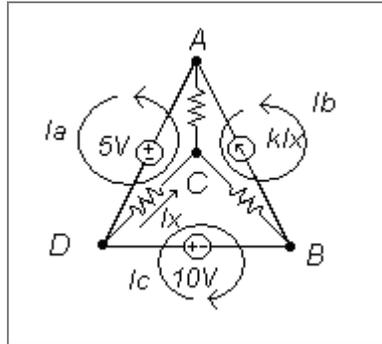


Figura 3-21

Parte a)

Nodo D:	Tierra: $V_d = 0$
Nodo A:	$V_a = 5V$
Nodo B:	$V_b = -10V$
Nodo C:	KLC: $\frac{V_a - V_c}{R} + \frac{V_d - V_c}{R} + \frac{V_b - V_c}{R} = 0$ $\frac{5 - V_c}{R} + \frac{0 - V_c}{R} + \frac{-10 - V_c}{R} = 0$ $V_c = -\frac{5}{3}$

Parte b)

Malla a:	$R(I_a + I_c) + R(I_a - I_b) + 5 = 0$ $2RI_a - RI_b + RI_c = -5$
----------	--

Malla b:	$I_b = kI_x$ $I_x = I_a + I_c$ $I_b = kI_a + kI_c$ $kI_a - I_b + kI_c = 0$
Malla c:	$RI_x + R(I_c + I_b) - 10 = 0$ $R(I_a + I_c) + R(I_c + I_b) = 10$ $RI_a + RI_b + 2RI_c = 10$

A partir de las ecuaciones de mallas se obtiene la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} 2R & -R & R \\ k & -1 & k \\ R & R & 2R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3-13. Análisis por Nodos y Mallas.

Para el circuito de la Figura 3-22:

- Seleccionar un nodo de referencia y plantear los valores o ecuaciones para los demás nodos para poder describir completamente el sistema. Resolver las ecuaciones resultantes.
- Plantear un sistema de ecuaciones de malla que permita describir el sistema. Resolver las ecuaciones.
- Plantear un sistema de ecuaciones de corrientes de lazo de manera que pase una sola corriente de lazo por la fuente de corriente.

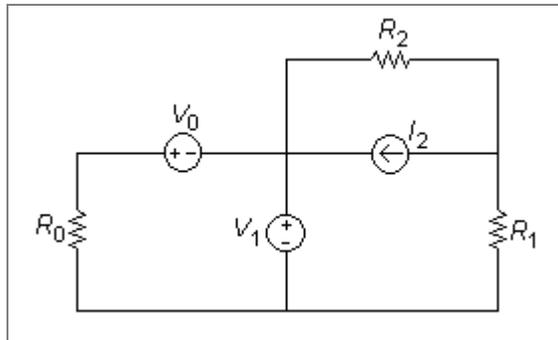


Figura 3-22

Solución

Parte a)

En la Figura 3-23 se muestran los nodos empleados, se elige como nodo de referencia el nodo B.

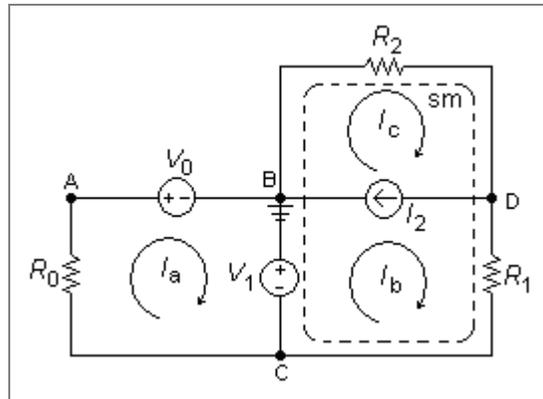


Figura 3-23

Ecuaciones de nodos:

Nodo B:	Tierra: $V_b = 0$
Nodo A:	$V_a = V_0$
Nodo C:	$V_c = -V_1$
Nodo D:	<p>KLC:</p> $I_2 + \frac{V_d - V_b}{R_2} + \frac{V_d - V_c}{R_1} = 0$ $I_2 + V_d \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) - \frac{V_c}{R_1} = 0$ $V_d \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right) = -I_2 + \frac{V_c}{R_1}$ $V_d \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right) = -\frac{R_1 I_2 + V_1}{R_1}$ $V_d = -\left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) \left(\frac{R_1 I_2 + V_1}{R_1} \right)$ $V_d = -\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) (R_1 I_2 + V_1)$

Parte b)

En la Figura 3-23 se muestran las mallas a utilizar para resolver el sistema.

Ecuaciones de mallas:

Malla a:	$R_0 I_a + V_0 + V_1 = 0$ $I_a = -\frac{V_0 + V_1}{R_0}$
Restricción:	$I_c - I_b = I_2$
Supermalla:	$-V_1 + R_2 I_c + R_1 I_b = 0$ $R_2 I_c + R_1 I_b = V_1$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & R_1 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{V_0 + V_1}{R_0} \\ I_2 \\ V_1 \end{bmatrix}$$

Parte c)

En la siguiente figura se muestran las mallas a utilizar para resolver el sistema. Aquí I_c es la única corriente de lazo que pasa por la fuente de corriente.

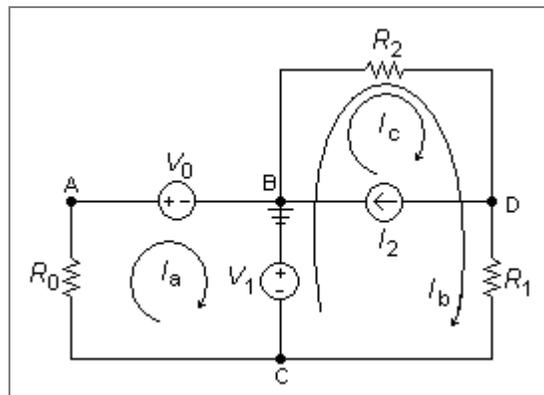


Figura 3-24

Ecuaciones de mallas:

Malla a:	$R_0 I_a + V_0 + V_1 = 0$ $I_a = -\frac{V_0 + V_1}{R_0}$
----------	--

Malla c:	$I_c = I_2$
Malla b:	$-V_1 + R_2(I_b + I_c) + R_1 I_b = 0$ $-V_1 + R_2(I_b + I_2) + R_1 I_b = 0$ $-V_1 + I_b(R_1 + R_2) + R_2 I_2 = 0$ $I_b(R_1 + R_2) = V_1 - R_2 I_2$ $I_b = \frac{V_1 - R_2 I_2}{R_1 + R_2}$

Ejemplo 3-14. Análisis por Mallas.

Para el circuito de la Figura 3-25 encontrar un sistema matricial de mallas de la forma:

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

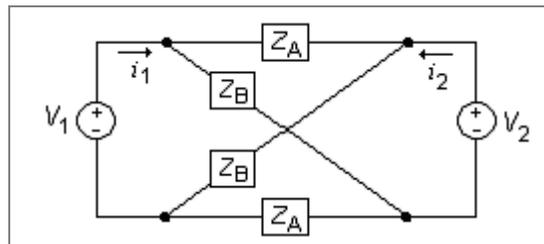


Figura 3-25

Solución

Las corrientes empleadas para plantear las ecuaciones de mallas se presentan en la Figura 3-26

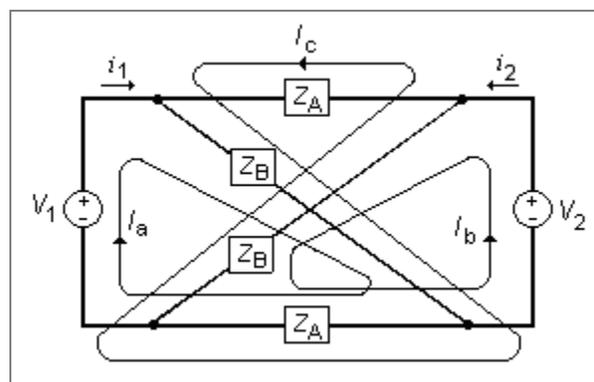


Figura 3-26

Ecuaciones de mallas:

$$I_a = I_1$$

$$I_b = I_2$$

Malla a:	$-V_1 + Z_B(I_a + I_c) + Z_A(I_a - I_b + I_c) = 0$ $I_a(Z_A + Z_B) + I_b(-Z_A) + I_c(Z_A + Z_B) = V_1 \quad (1)$
Malla b:	$-V_2 + Z_B(I_b - I_c) + Z_A(I_b - I_a - I_c) = 0$ $I_a(-Z_A) + I_b(Z_A + Z_B) + I_c(-Z_A - Z_B) = V_2 \quad (2)$
Malla c:	$Z_A I_c + Z_B(I_c + I_a) + Z_A(I_c + I_a - I_b) + Z_B(I_c - I_b) = 0$ $I_a(Z_A + Z_B) + I_b(-Z_A - Z_B) + I_c(Z_A + Z_B + Z_A + Z_B) = 0$ $I_a(Z_A + Z_B) - I_b(Z_A + Z_B) + 2I_c(Z_A + Z_B) = 0$ $I_a - I_b + 2I_c = 0$ $I_c = \frac{I_b - I_a}{2} \quad (3)$

Reemplazando (3) en (1)

$$I_a(Z_A + Z_B) + I_b(-Z_A) + \frac{I_b - I_a}{2}(Z_A + Z_B) = V_1$$

$$I_a\left(Z_A + Z_B - \frac{Z_A}{2} - \frac{Z_B}{2}\right) + I_b\left(-Z_A + \frac{Z_A}{2} + \frac{Z_B}{2}\right) = V_1$$

$$I_a\left(\frac{Z_A + Z_B}{2}\right) + I_b\left(\frac{Z_B - Z_A}{2}\right) = V_1 \quad (4)$$

Reemplazando (3) en (2)

$$I_a(-Z_A) + I_b(Z_A + Z_B) + \frac{I_b - I_a}{2}(-Z_A - Z_B) = V_2$$

$$I_a\left(-Z_A + \frac{Z_A}{2} + \frac{Z_B}{2}\right) + I_b\left(Z_A + Z_B - \frac{Z_A}{2} - \frac{Z_B}{2}\right) = V_2$$

$$I_a\left(\frac{Z_B - Z_A}{2}\right) + I_b\left(\frac{Z_A + Z_B}{2}\right) = V_2 \quad (5)$$

Con las ecuaciones (4) y (5) se obtiene el siguiente sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(Z_A + Z_B) & \frac{1}{2}(Z_B - Z_A) \\ \frac{1}{2}(Z_B - Z_A) & \frac{1}{2}(Z_A + Z_B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

3.4. SIMULACIONES

3.4.1. ANÁLISIS POR NODOS

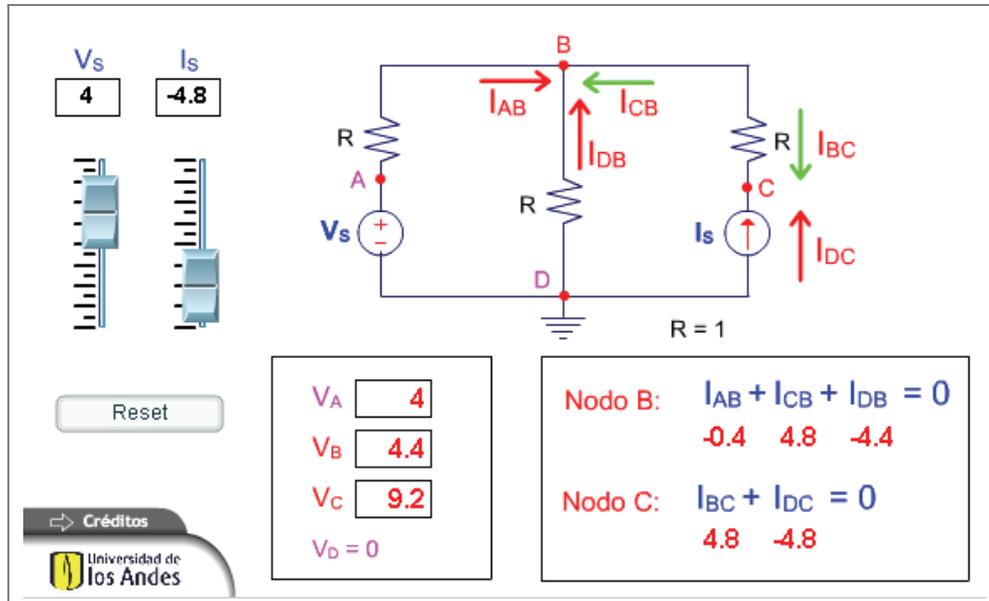


Figura 3-27

Descripción

Esta simulación ilustra el método de análisis de circuitos por el método de nodos, basado en la aplicación de la Ley de Corrientes de Kirchhoff, para llegar a encontrar los voltajes de nodo. El estudiante podrá ver como cambia la dirección de la corriente real y como las corrientes toman valores positivos a negativos con respecto a la dirección definida inicialmente como positiva y como la suma de tales corrientes siempre es cero. Podrá comprobar también que las corrientes en las resistencias se pueden calcular a partir de los voltajes de los nodos.

Uso educativo

Esta simulación se presenta como un complemento a la clase presencial, para estudiantes de primeros semestres de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Mecánica. Una vez los estudiantes manejan los conceptos de nodo, voltaje, corriente y leyes de Kirchhoff, interactúan con el recurso estableciendo los valores de los voltajes y corrientes de las fuentes, para luego visualizar las direcciones reales del flujo de corriente en el circuito y el voltaje que adquiere cada nodo analizado. Se pueden plantear ejercicios en los que el estudiante deba comparar la simulación ante diferentes valores de voltajes, con el fin de comprobar lo enunciado en la Ley de Corrientes de Kirchhoff.

3.4.2. ANÁLISIS POR MALLAS

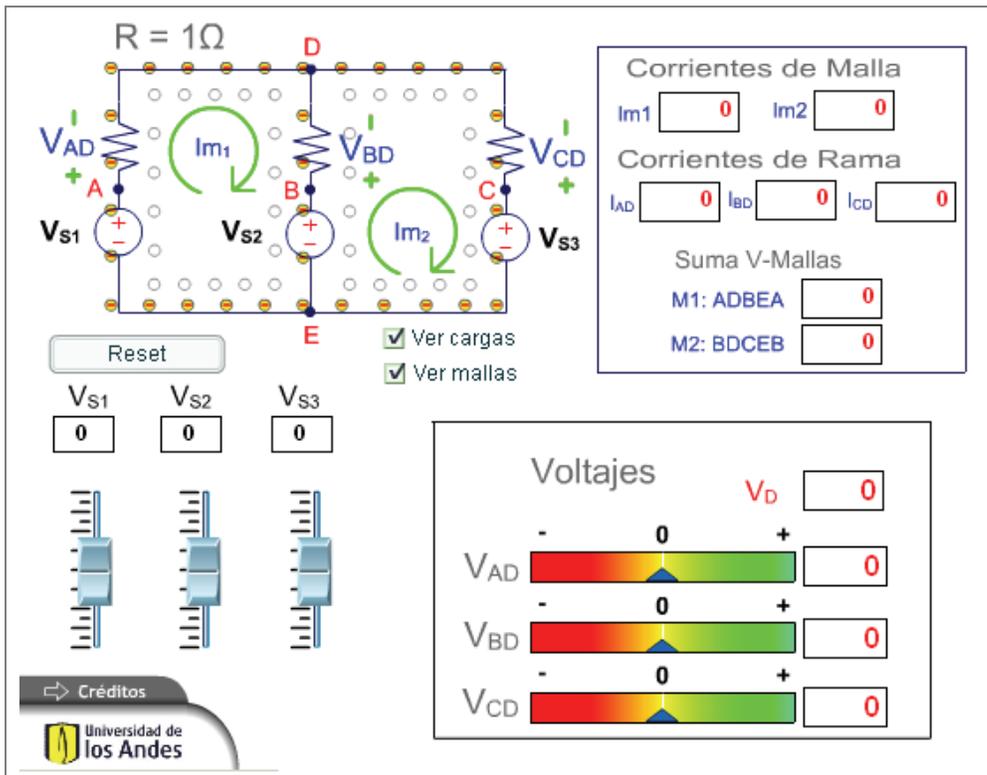


Figura 3-28

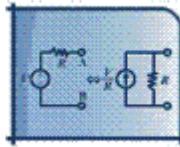
Descripción

Esta simulación pretende mostrar la relación entre corriente de rama y corrientes de malla. A partir de la observación de las corrientes de malla podrá deducir las corrientes de rama y ver cuándo toman estas corrientes valores positivos o negativos. Adicionalmente puede observar como para una malla la suma de caídas de voltaje siempre vale cero. Un análisis de KVL para las dos mallas permite explicar el método de análisis por mallas.

Uso educativo

Esta simulación se presenta como un complemento a la clase presencial, para estudiantes de primeros semestres de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Mecánica. Una vez los estudiantes manejan los conceptos de malla, voltaje, corriente de rama y corriente de malla y KVL, interactúan con el recurso estableciendo los valores de los voltajes en un circuito para luego visualizar el valor de las corrientes en las mallas y ramas. Finalmente, como aplicación de la Ley de Voltajes de Kirchhoff, el estudiante puede ver el valor total de las corrientes en las mallas que componen el circuito. Como un ejercicio que acompaña la simulación, se puede proponer al estudiante realizar manualmente el ejercicio resolviendo las ecuaciones de las mallas y la ecuación matricial resultante, para finalmente comparar su resultado con la simulación.

4. LINEALIDAD SUPERPOSICIÓN Y TRANSFORMACIÓN DE FUENTES



4.1. INTRODUCCIÓN

Existen otros métodos de análisis de circuitos adicionales a los de análisis de nodos y mallas anteriormente presentados. Uno de los métodos que veremos en este capítulo es el resultado del hecho de que tenemos circuitos lineales y por tanto se aplican las leyes de linealidad como son la superposición y la proporcionalidad. El otro método se basa en la posibilidad de transformar fuentes de corriente y voltaje entre ellas.

La ventaja de estas técnicas radica en que en los cálculos manuales las ecuaciones de nodos y mallas pueden dar sistemas matriciales complejos de resolver a mano, mientras que los métodos de esta sección permiten hacerlo de manera sencilla (para algunos casos).

4.2. TEOREMA DE LINEALIDAD

Para cualquier circuito resistivo lineal, cualquier señal de salida de voltaje o corriente, denominada y , puede ser expresada como una combinación lineal de las fuentes independientes del circuito:

$$y = a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_mu_m$$

en donde $u_1 \dots u_m$ son las fuentes de voltaje o corriente y $a_1 \dots a_m$ son coeficientes de proporcionalidad con las dimensiones adecuadas.

Recordemos de lo estudiado en el capítulo de nodos y mallas que un circuito puede ser representado por un sistema matricial de la forma:

$$[M] \begin{bmatrix} z_0 \\ z_k \\ z_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_k \\ f_m \end{bmatrix}$$

en donde la matriz M es una combinación de los elementos resistivos del circuito y de las constantes de las fuentes controladas, la cual depende de la topología del circuito; el vector z son las variables de estado que queremos encontrar (voltajes de nodos o corrientes de mallas) y el vector f son combinaciones lineales de las fuentes independientes de voltaje o corriente ($u_1 \dots u_m$). Si M es una matriz invertible entonces tenemos:

$$\begin{bmatrix} z_0 \\ z_k \\ z_m \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_k \\ f_m \end{bmatrix}$$

de manera que cualquier señal de voltaje o corriente del sistema es una combinación lineal de las fuentes independientes de voltaje o corriente. Si una de estas variables z_k corresponde a la variable y del teorema, se muestra como puede ser expresado como:

$$y = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_m u_m$$

4.2.1. SUPERPOSICIÓN Y PROPORCIONALIDAD

Esta técnica se basa en el teorema de linealidad del circuito y en el hecho de poder representar una fuente de voltaje a cero como un corto circuito y una fuente de corriente a cero como un circuito abierto.

Si en la ecuación $y = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_m u_m$ apagamos todas las fuentes menos una a la vez tenemos que la señal y producida únicamente por la fuente u_k , que llamaremos y_k , es:

$$y_k = a_k u_k$$

y por lo tanto la señal total será:

$$y = \sum_{k=1}^m y_k = \sum_{k=1}^m a_k u_k$$

Esto nos muestra que es posible calcular la respuesta del circuito para cada fuente (apagando las demás) y luego sumar el resultado proporcionado por cada fuente.

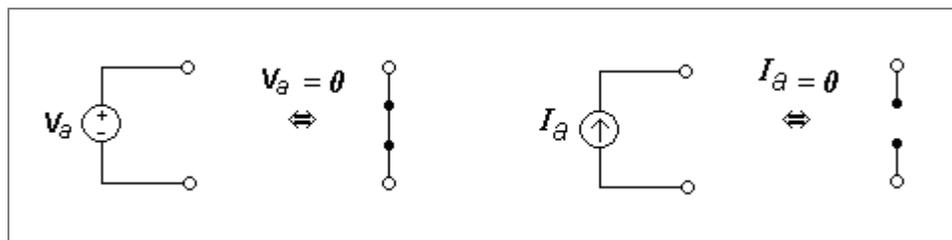


Figura 4-1

Para esto se procede representar todas las fuentes menos una a cero (las de voltaje como un corto circuito y las de como un circuito abierto) y calcular la señal para el circuito resultante. Es evidente que al cambiar las fuentes la topología del circuito cambia cada vez que calcule para cada fuente k .

Ejemplo 4-1. Voltaje de nodo como combinación lineal.

Para el siguiente circuito el voltaje de nodo del nodo B representa la variable de salida y del sistema lineal de la forma general $y = a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_mu_m$.

- Encontrar el valor de V_B .
- Encontrar los valores de $u_1 \dots u_m$ y de $a_1 \dots a_m$.

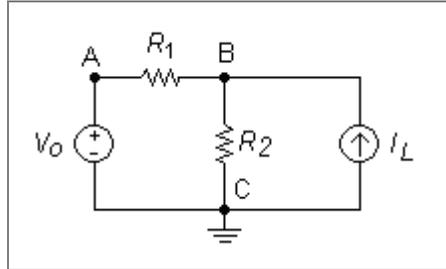


Figura 4-2

Solución

Parte a)

En el capítulo de las Leyes de Kirchoff se calculó el voltaje V_B para este circuito usando KCL con el siguiente resultado:

$$V_B = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) V_O + \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) I_L$$

Parte b)

Dado que la variable de salida y en este caso es V_B por comparación entre la ecuación anterior y $y = a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_mu_m$ se tiene:

$$\begin{aligned} y &= V_B \\ u_1 &= V_O \\ u_2 &= I_L \\ a_1 &= \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \\ a_2 &= \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) \end{aligned}$$

Ejemplo 4-2. Superposición.

Para el circuito de la Figura 4-3(a) calcular V_B usando superposición.

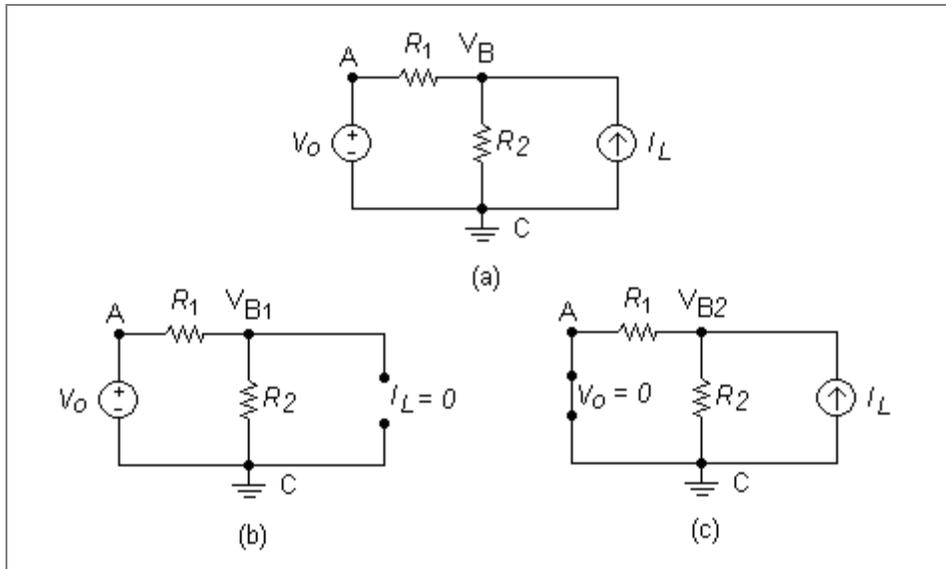


Figura 4-3

Solución

Para calcular V_B se procede a dejar una sola fuente y ver su influencia en el nodo B, esto para cada una de las fuentes. Primero lo hacemos dejando prendida la fuente de voltaje y luego la fuente de corriente:

a) Dejando la fuente de voltaje V_O y apagando todas las demás (en este caso solo hay una que apagar, pero si hubiera más se apagarían las demás) tenemos una nueva topología mostrada en la figura (b), en la cual por divisor de voltaje tenemos:

$$V_{B1} = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) V_O$$

b) Dejando la fuente de corriente I_L y apagando las demás fuentes, y dado que ahora en la nueva topología R_1 y R_2 están en paralelo, tenemos:

$$V_{B2} = \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) I_L$$

Por el teorema de superposición el valor de V_B será:

$$V_B = V_{B1} + V_{B2}$$

$$V_B = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) V_O + \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) I_L$$

4.3. TRANSFORMACIÓN DE FUENTES

Las fuentes de voltaje (fuente ideal con resistencia serie) conectadas en serie se pueden reemplazar por una fuente de voltaje equivalente (fuente ideal equivalente

con resistencia serie equivalente) correspondiente a la suma algebraica de las fuentes ideales y a la suma de las resistencias en serie.

Similamente para las fuentes de corriente (fuente ideal con resistencia paralelo) conectadas en paralelo se pueden reemplazar por una fuente de corriente equivalente (fuente ideal equivalente con resistencia paralelo equivalente) correspondiente a la suma algebraica de las fuentes ideales y a la resistencia paralelo equivalente.

Ejemplo 4-3. Transformación de fuentes de voltaje.

Para el circuito de la Figura 4-4(a) encontrar una fuente equivalente de voltaje a la izquierda de los nodos a y b, como se muestra en la Figura 4-4 (b).

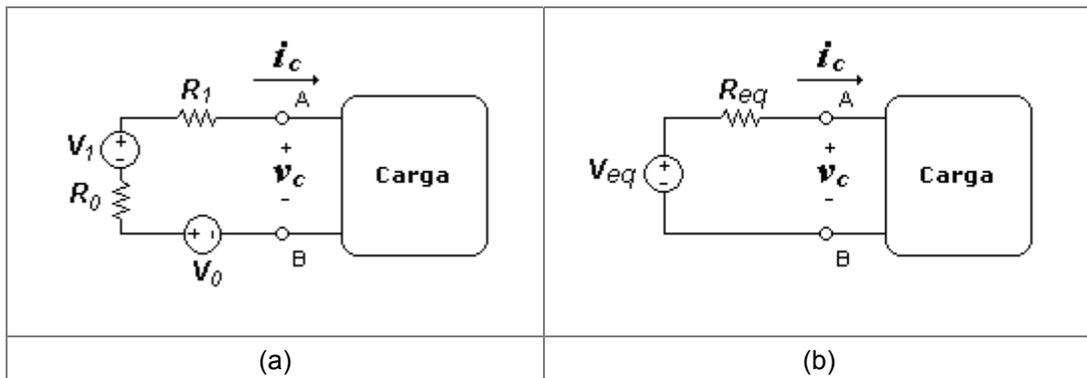


Figura 4-4

Solución

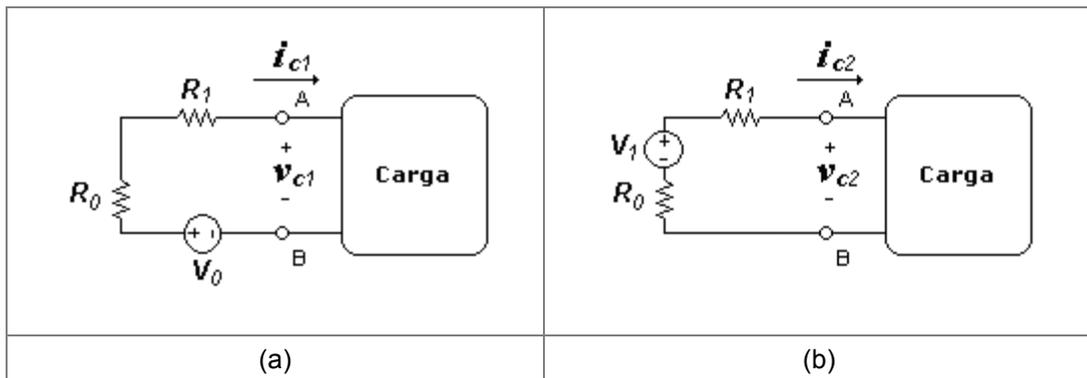


Figura 4-5

Usando superposición podemos ver el efecto de cada fuente sobre la carga, de forma tal que podamos calcular el voltaje y la corriente sobre la carga como el aporte de cada fuente.

Aplicando KVL en el circuito de la Figura 4-5(a) tenemos:

$$-v_0 + i_{c1}(R_0 + R_1) + v_{c1} = 0$$

Aplicando KVL en el circuito de la Figura 4-5 (b) tenemos:

$$-v_1 + i_{c2}(R_0 + R_1) + v_{c2} = 0$$

Sumandos estas dos ecuaciones tenemos:

$$-(v_1 + v_2) + (i_{c1} + i_{c2})(R_0 + R_1) + (v_{c1} + v_{c2}) = 0$$

Por superposición tenemos que $v_c = v_{c1} + v_{c2}$ y que $i_c = i_{c1} + i_{c2}$, de manera que al reemplazarlo en la ecuación anterior tenemos:

$$-(v_1 + v_2) + i_c(R_0 + R_1) + v_c = 0$$

La ecuación del circuito de la Figura 4-4 (b) que corresponde a la fuente equivalente es:

$$-v_{eq} + i_c(R_{eq}) + v_c = 0$$

Lo que nos lleva a concluir por comparación que el voltaje y la resistencia equivalente son:

$$v_{eq} = v_1 + v_2$$

$$R_{eq} = R_0 + R_1$$

4.4. TEOREMA DE TRANSFORMACIÓN ENTRE FUENTES DE VOLTAJE Y CORRIENTE

Un circuito de dos terminales consistente de una resistencia finita R , diferente de cero, en serie con una fuente de voltaje independiente V_a es equivalente a un circuito de dos terminales consistente en la misma resistencia R en paralelo con una fuente de corriente independiente de valor $I_b = V_a/R$.

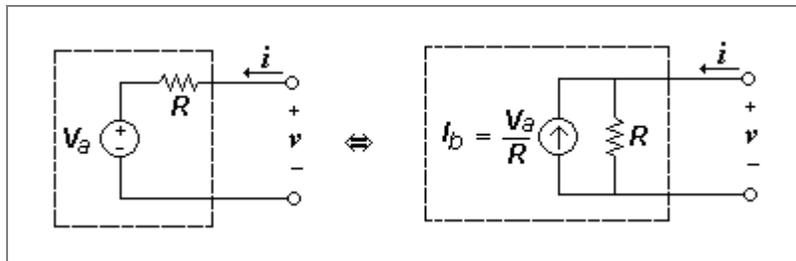


Figura 4-6

Se puede ver que esto es válido al hacer las ecuaciones de mallas y nodos y verificar que en cada caso es igual a: $v = Ri + V_a$

Otra manera de verlo:

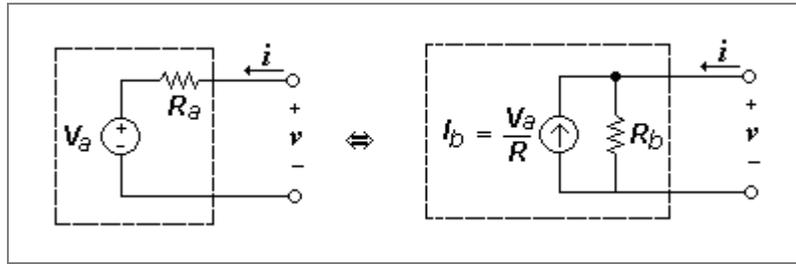


Figura 4-7

Haciendo la malla para el circuito de la fuente de voltaje tenemos:	Haciendo el nodo para el circuito de la fuente de corriente tenemos:
$-V_a - iR_a + v = 0$ $i = \frac{v - V_a}{R_a}$	$I_b + i - \frac{v}{R_b} = 0$
Reemplazando i :	$I_b + \frac{v - V_a}{R_a} - \frac{v}{R_b} = 0$
	$I_b - \frac{V_a}{R_a} + v \left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b} \right) = 0$
El término $I_b - \frac{V_a}{R_a}$ es independiente de la carga, mientras que v puede variar de acuerdo a lo que se conecte a los terminales de salida, de manera que el término $v \left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b} \right)$ debe ser cero, lo cual ocurre si:	$R_a = R_b = R$
Así tenemos:	$I_b - \frac{V_a}{R} = 0$ $\boxed{I_b = \frac{V_a}{R}} \text{ con } \boxed{R_a = R_b = R}$

En el caso de fuentes dependientes o controladas el teorema sigue siendo válido a condición de que la variable controladora (voltaje o corriente) no se modifique con la transformación de fuentes.

Ejemplo 4-4. Transformación de fuentes de voltaje y corriente.

Para el circuito Figura 4-8(a) calcular V_B usando la transformación de fuentes propuestas en las figuras (b) y (c).

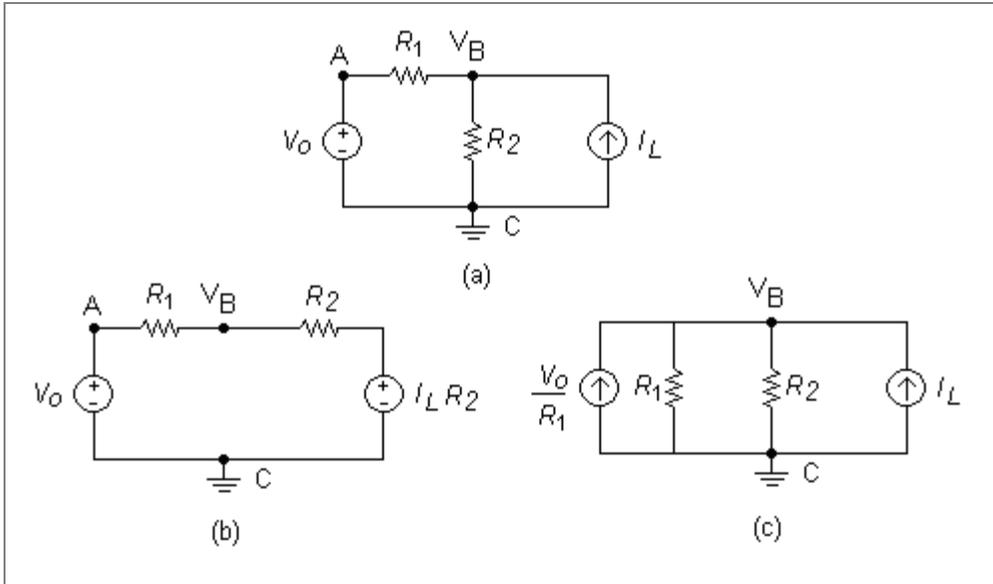


Figura 4-8

Solución

En la figura (b) se convirtió la fuente de corriente en una de voltaje, lo cual facilita el cálculo de mallas, mientras que en la figura (c) se convirtió la fuente de voltaje en una de corriente, lo cual facilita el cálculo por nodos.

Nota: en la figura (c) el nodo A ya no existe.

Método figura (b):

KVL para esta malla nos queda como sigue:

$$\begin{aligned}
 V_{CA} + V_{AB} + V_{BC} &= 0 \\
 -V_O + I_1 R_1 + I_1 R_2 + (I_L R_2) &= 0 \\
 I_1 &= \frac{V_O - I_L R_2}{R_1 + R_2} \\
 V_B = V_O - I_1 R_1 &= V_O - \left(\frac{V_O - I_L R_2}{R_1 + R_2} \right) R_1 \\
 V_B &= \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) V_O + \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) I_L
 \end{aligned}$$

Que corresponde al mismo resultado calculado anteriormente por el método de superposición.

Método figura (c):

KCL para el nodo B nos queda como sigue:

$$\frac{V_O}{R_1} + I_L = \frac{V_B}{R_1} + \frac{V_B}{R_2} = V_B \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = V_B \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right)$$

$$V_B = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) V_O + \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) I_L$$

Como se puede apreciar en este caso el cálculo es aún más sencillo.

Ejemplo 4-5. Transformación de fuentes de voltaje y corriente.

Para el circuito Figura 4-9(a) calcular V_A usando la transformación de fuentes para tener un circuito de un asola malla.

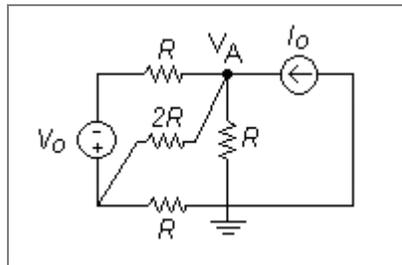


Figura 4-9

Solución

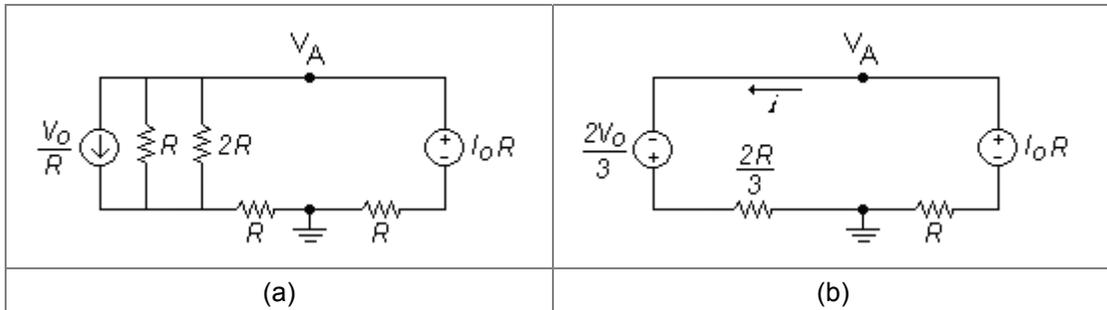


Figura 4-10

Como el voltaje V_A es un voltaje de nodo, respecto a la tierra, es muy importante no perder la tierra al final de las transformaciones. La Figura 4-16(a) muestra la primera transformación de la fuente de voltaje en fuente de corriente por un lado, y la fuente de corriente en fuente de voltaje para ir formando la malla. En la Figura 4-16(b) se calcula el paralelo de las resistencias la lado de la fuente de corriente y luego se convierte en fuente de voltaje para concluir con una sola malla.

Nótese que en la Figura 4-16(a) las dos resistencias inferiores no se han sumado en serie, pues si se hiciera esto se perdería la tierra.

Ahora calculamos la corriente de la malla y luego el voltaje en el nodo A.

$$-\frac{2V_O}{3} + i \left(\frac{2R}{3} + R + R \right) - R I_O = 0$$

$$i\left(\frac{8R}{3}\right) = \frac{2V_o}{3} + RI_o$$

$$i = \frac{V_o}{4R} + \frac{3I_o}{8}$$

$$V_A = I_oR + R \cdot i = I_oR + R\left(\frac{V_o}{4R} + \frac{3I_o}{8}\right)$$

$$V_A = \frac{V_o}{4} + \frac{11RI_o}{8}$$

Ejemplo 4-6. Transformación de fuentes de voltaje y corriente.

Encontrar el voltaje en el nodo A por los siguientes métodos:

- Por transformación de fuentes, para convertir el circuito de cuatro nodos en uno de un solo nodo.
- Por superposición.

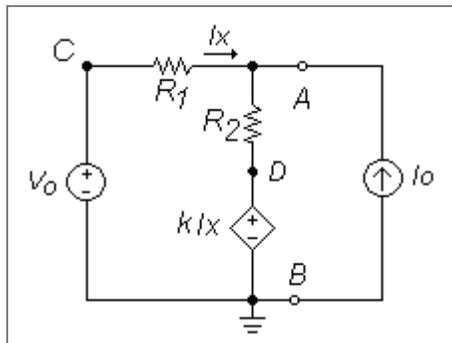


Figura 4-11

Solución

Parte a)

Transformamos la fuente de voltaje V_o en fuente de corriente teniendo cuidado de no perder la variable controladora I_x , la cual representa la corriente que entra al nodo A desde dicha fuente.

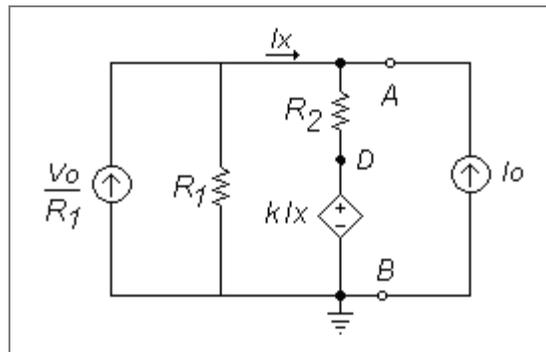


Figura 4-12

Luego convertimos en fuente de corriente la fuente controlada:

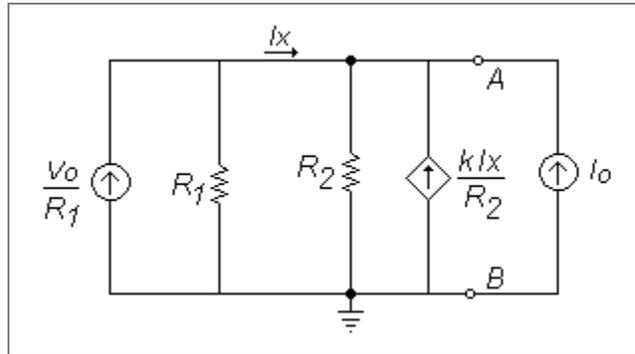


Figura 4-13

$$I_x = \left(\frac{V_o}{R_1} - \frac{V_A}{R_1} \right)$$

KCL en Nodo A:

$$I_x + \left(\frac{-V_A}{R_2} \right) + \frac{k \cdot I_x}{R_2} + I_o = 0$$

$$I_o + I_x \left(\frac{R_2 + k}{R_2} \right) = \frac{V_A}{R_2}$$

$$I_o + \left(\frac{V_o}{R_1} - \frac{V_A}{R_1} \right) \left(\frac{R_2 + k}{R_2} \right) = \frac{V_A}{R_2}$$

$$I_o + V_o \left(\frac{R_2 + k}{R_1 R_2} \right) = \frac{V_A}{R_2} + V_A \left(\frac{R_2 + k}{R_1 R_2} \right) = V_A \left(\frac{R_1 + R_2 + k}{R_1 R_2} \right)$$

$$V_A = \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + k} \right) \left(I_o + V_o \left(\frac{R_2 + k}{R_1 R_2} \right) \right)$$

$$V_A = \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + k} \right) I_o + \left(\frac{R_2 + k}{R_1 + R_2 + k} \right) V_o$$

Parte b)

Por superposición primero dejamos prendida la fuente de voltaje V_o , apagando las demás, y calculamos V_A' .

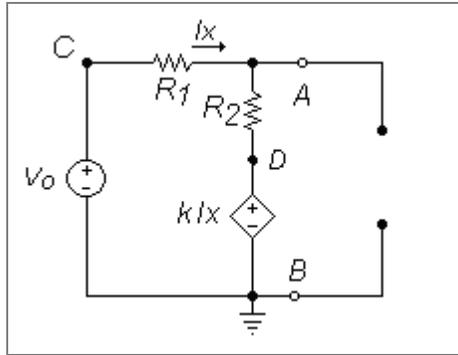


Figura 4-14

Hacemos la malla:

$$-V_o + I_x(R_1 + R_2) + k \cdot I_x = 0$$

$$I_x = \frac{V_o}{R_1 + R_2 + k}$$

$$V_A' = V_o - R_1 I_x = V_o - R_1 \left(\frac{V_o}{R_1 + R_2 + k} \right) = \left(\frac{R_2 + k}{R_1 + R_2 + k} \right) V_o$$

Luego dejamos prendida la fuente de corriente I_o , apagando las demás, y calculamos V_A'' .

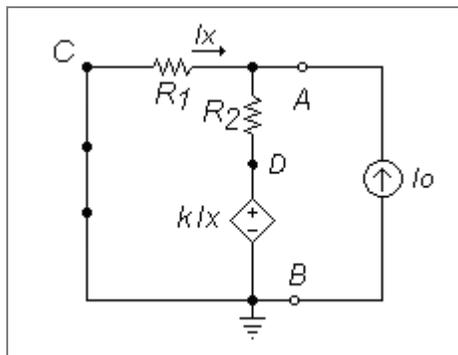


Figura 4-15

Hacemos el nodo A:

$$I_x = \frac{-V_A''}{R_1}$$

$$I_x + \frac{k \cdot I_x - V_A''}{R_2} + I_o = 0$$

$$\frac{-V_A''}{R_1} - \frac{V_A''}{R_1} \cdot \frac{k}{R_2} - \frac{V_A''}{R_2} + I_o = 0$$

$$V_A'' \left(\frac{1}{R_1} + \frac{k}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2} \right) = I_o$$

$$V_A'' \left(\frac{R_1 + R_2 + k}{R_1 R_2} \right) = I_o$$

$$V_A'' = \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + k} \right) I_o$$

Finalmente superponemos las dos respuestas:

$$V_A = V_A' + V_A''$$

$$V_A = \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + k} \right) I_o + \left(\frac{R_2 + k}{R_1 + R_2 + k} \right) V_o$$

Ejemplo 4-7. Transformación de fuentes con fuente controlada.

Para el circuito de la Figura 4-16:

- a. Convertir las fuentes de voltaje en fuentes de corriente.
- b. Encontrar una fuente equivalente de voltaje entre a y b.

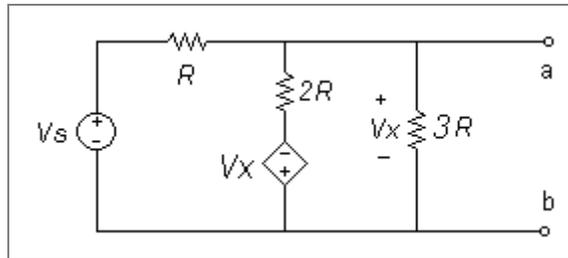


Figura 4-16

Solución

Parte a)

Primero convertimos a fuentes de corriente cada fuente de voltaje con su respectiva resistencia, teniendo en cuenta el sentido de la fuente de corriente y sin perder la variable controladora (que aquí esta definida con la caída de voltaje entre los nodos a y b):

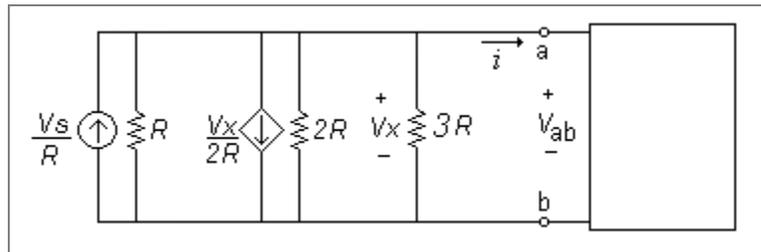


Figura 4-17

Luego hace el paralelo de las tres resistencias:

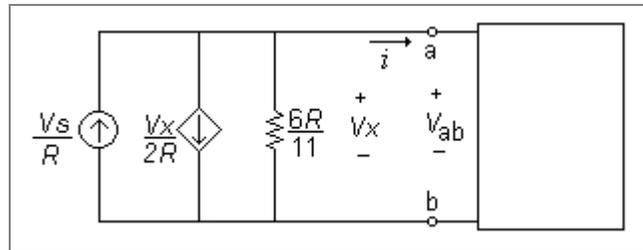


Figura 4-18

Parte b)

Queremos llegar a un modelo de fuente de voltaje en serie con resistencia como en la Figura 4-19. Eso implica que la relación entre V_{ab} e i de este circuito debe ser la misma que la del circuito de la Figura 4-18.

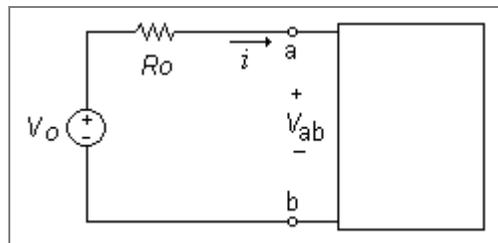


Figura 4-19

Para este circuito aplicando KVL tenemos: $V_{ab} = V_o - i \cdot R_o$.

Para el circuito de la Figura 4-18 aplicando KCL en el nodo a tenemos:

$$V_s/R - V_{ab}/2R - i - V_{ab}/(6R/11) = 0$$

Despejando V_{ab} :

$$V_{ab} = 3V_s/7 - i (3R/7)$$

Por tanto por comparación tenemos $V_o = 3V_s/7$ y $R_o = 3R/7$.

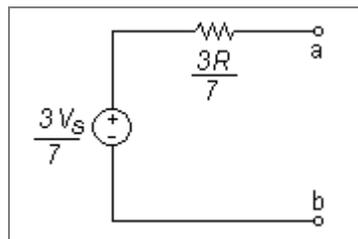


Figura 4-20

4.5. SIMULACIONES

4.5.1. SUPERPOSICIÓN DE FUENTE DC Y AC.

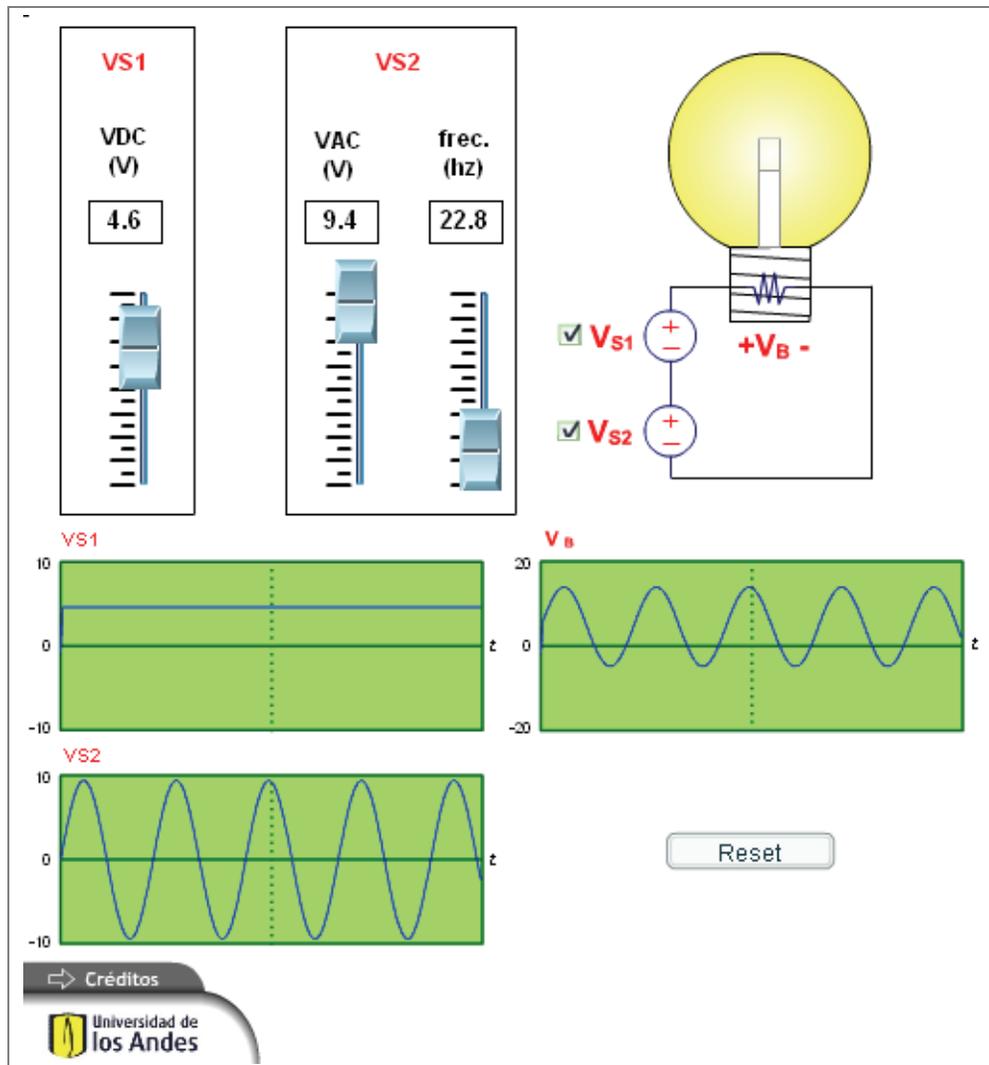


Figura 4-21

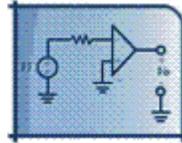
Descripción

Esta simulación permite mostrar los conceptos de superposición y homogeneidad en los circuitos lineales a través de la aplicación al circuito de varias fuentes y observando sus efectos en él y como esto es válido para fuentes DC y AC superpuestas.

Uso educativo

Esta simulación se presenta como un complemento a la clase presencial, para estudiantes de primeros semestres de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Mecánica. Una vez los estudiantes manejan los conceptos de linealidad, superposición, transformación de fuentes, los estudiantes interactúan con el recurso prendiendo y apagando cada una de las fuentes y estableciendo sus valores para observar los efectos que se producen en cada caso y así comprender el concepto de linealidad.

5. AMPLIFICADOR OPERACIONAL



5.1. INTRODUCCIÓN

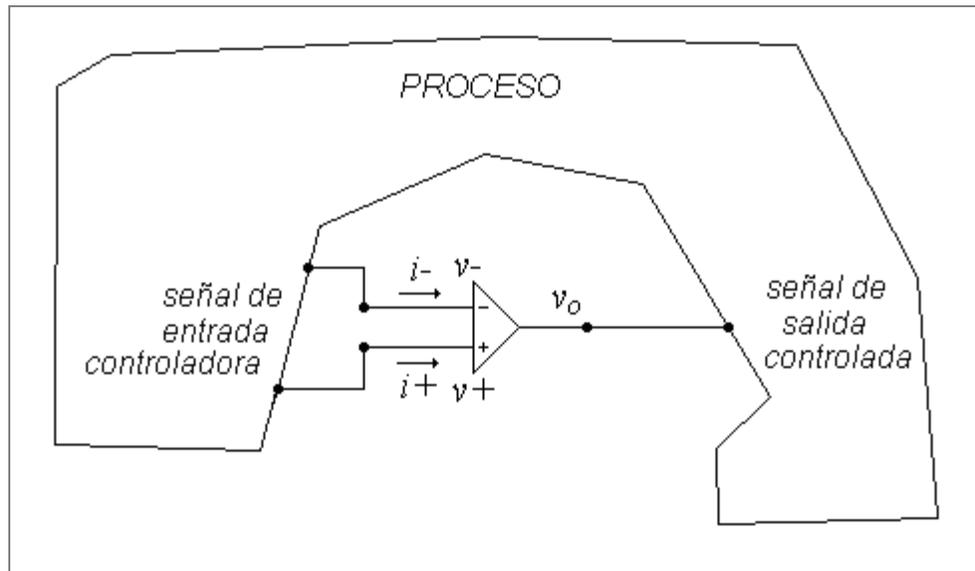


Figura 5-1

En la actualidad la mayoría de procesos en la industria o en nuestros hogares están controlados por dispositivos electrónicos. Estos procesos se controlan por medio de circuitos analógicos o digitales, o combinaciones de ambos. En cualquier caso es usual tener una o varias señales de entrada medidas en alguna parte del circuito - señales controladoras - que se usan para calcular el valor de una señal de salida o señal controlada:

$$\text{señal de salida} = \text{función de control}(\text{señales de entrada})$$

Los amplificadores operacionales permiten implementar la función de control realizando diversas operaciones matemáticas, como sumas, restas, multiplicaciones, derivadas e integrales. De allí su nombre de *amplificadores operacionales*.

La Figura 5-1 muestra la idea del uso del amplificador conectado a un circuito cualquiera en el cual se tiene una *señal* de entrada que permitirá realizar el *control*

de una señal de salida. La señal de entrada está dada por los voltajes de los terminales llamados inversor y no inversor, v^- y v^+ respectivamente. La señal de salida está dada por el voltaje v_o . El amplificador operacional suele ser denominado OPAM, por sus siglas en inglés.

5.2. MODELO “REAL” DEL AMPLIFICADOR

La Figura 5-2 muestra un modelo “real” del amplificador operacional conectado a un circuito en el cual la señal de entrada alimenta una resistencia de entrada R_{in} , la cual representa la resistencia de entrada del instrumento de medición de la señal de entrada v_d . Esta señal de entrada $v_d = (v^+ - v^-)$ se convierte en la variable controladora de una fuente controlada que determina el voltaje a la salida, que toma el valor de $A(v^+ - v^-)$, donde A es la ganancia del amplificador, también llamada *ganancia de lazo abierto*. Esta fuente controlada alimenta la carga conectada en el terminal de salida v_o y dado que hay una resistencia de salida R_o (que representa la resistencia interna de la fuente) se produce allí una caída de voltaje.

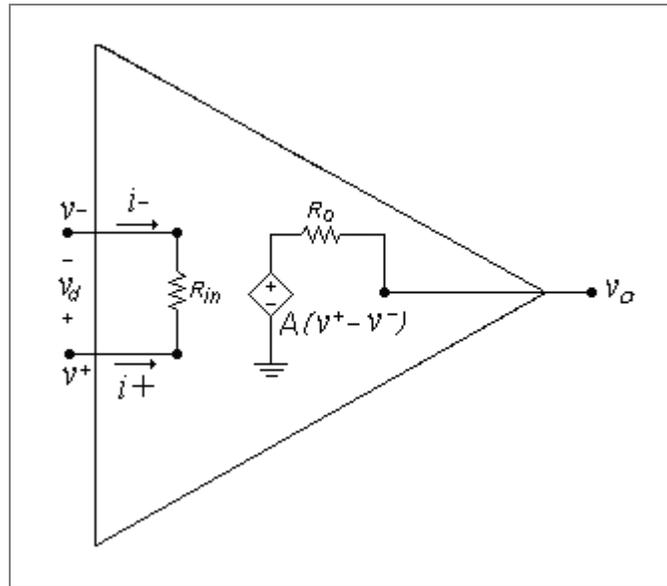


Figura 5-2

5.3. MODELO DE RESISTENCIAS IDEALES DEL AMPLIFICADOR

El modelo de resistencias ideales del amplificador asume que no hay pérdidas resistivas de energía ni en la entrada ni en la salida del amplificador. Esto implica adicionalmente que no se altera la corriente en el circuito al que se conecta ($i^- = 0$). Para esto se requiere que la resistencia de entrada R_{in} sea lo más grande posible, llegando a ser infinita (circuito abierto), de manera que no haya corriente entrando o saliendo por los terminales v^+ y v^- . De esta manera el voltaje de la señal de entrada no se ve afectado por la medición de la misma, como ocurre cuando la R_{in} es finita. Igualmente para que no haya pérdidas de energía en la salida del amplificador por disipación en la resistencia de salida R_o se requiere que esta resistencia sea cero, de manera que $v_o = A(v^+ - v^-)$, independiente de la corriente que solicite la carga conectada a la salida del amplificador.

Resumiendo, para modelo de resistencias ideales del amplificador se tiene:

$$R_{in} = \infty \Rightarrow \text{Circuito Abierto en los terminales de entrada} \Rightarrow i^+ = i^- = 0$$

$$R_o = 0 \Rightarrow \text{Corto Circuito en la resistencia de salida} \Rightarrow v_o = A(v^+ - v^-)$$

Estas características del amplificador ideal se muestran en la Figura 5-3.

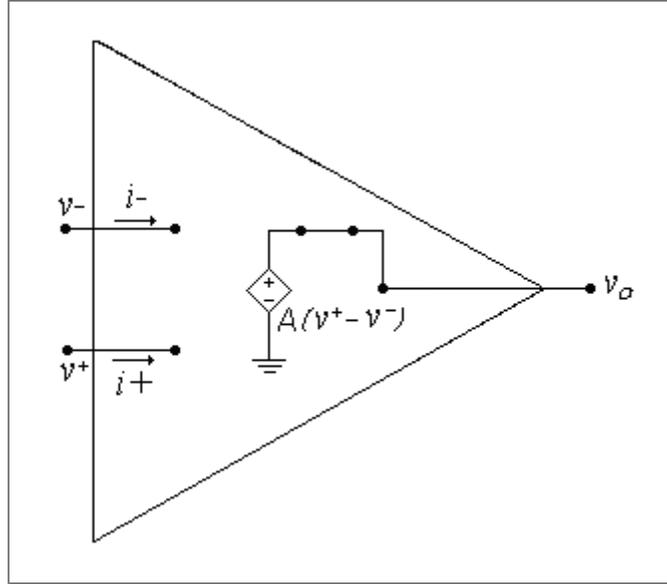


Figura 5-3

Este amplificador ideal puede tener algunas variantes, debidas al valor que tenga la ganancia A y la existencia o no de un voltaje de saturación que se explican a continuación.

Nota: en algunos textos se indica que el amplificador ideal tiene ganancia A infinita. Aquí vamos a separar los dos casos (A finita e infinita), manteniendo las condiciones sobre las resistencias ideales de entrada y salida.

5.4. MODELO IDEAL DEL AMPLIFICADOR – MODELO DE CORTO CIRCUITO VIRTUAL

El modelo de resistencias ideales del amplificador presentado en la Figura 5-3 puede tener una ganancia A de valor finito o infinito. Aquí infinito quiere decir tan exageradamente grande que se comporta como infinito. Esto es útil pues simplifica mucho los cálculos y al comparar con los valores obtenidos con ganancias A finitas muy grandes los resultados son casi idénticos. De hay la utilidad de este modelo, que puede tener o no saturación.

El valor de v_o siempre tiene un valor finito en la salida y dado que $v_o = A(v^+ - v^-)$ se requiere que si A tiende a ser muy grande, $(v^+ - v^-)$ tienda a ser muy pequeño para mantener en voltaje de salida v_o en un valor estable.

Así en el límite:

$$A \rightarrow \infty \Rightarrow (v^+ - v^-) \rightarrow 0 \Rightarrow v^+ = v^-$$

Otra manera de verlo es la siguiente: Para que en una configuración dada el valor de v_o se mantenga estable, el amplificador ajustará la corriente de salida para que el voltaje de salida se mantenga estable, para lo cual requiere por un lado que haya una realimentación (medida) de la señal de salida en la entrada y por otro lado que $(v^+ - v^-)$ sea muy pequeño, para lo cual al circuito hace que el voltaje en los terminales v^+ y v^- se igual. Como el voltaje en los dos terminales será el mismo se dice que están en corto circuito virtual, y si uno de ellos, por ejemplo el no inversor está conectado a tierra $v^+ = 0V$ y por tanto el terminal inversor tendrá un voltaje $v^- = 0V$. En este caso se dice que el terminal inversor del amplificador tiene una *tierra virtual* (ya que $v^- = 0V$).

En resumen el Modelo Ideal del Amplificador es entonces un caso particular del modelo de resistencias ideales, en el cual se tiene:

$$R_{in} = \infty \Rightarrow i^+ = i^- = 0$$

$$R_o = 0 \\ A \rightarrow \infty \Rightarrow v^+ = v^-$$

Estos resultados se muestran en la Figura 5-4.

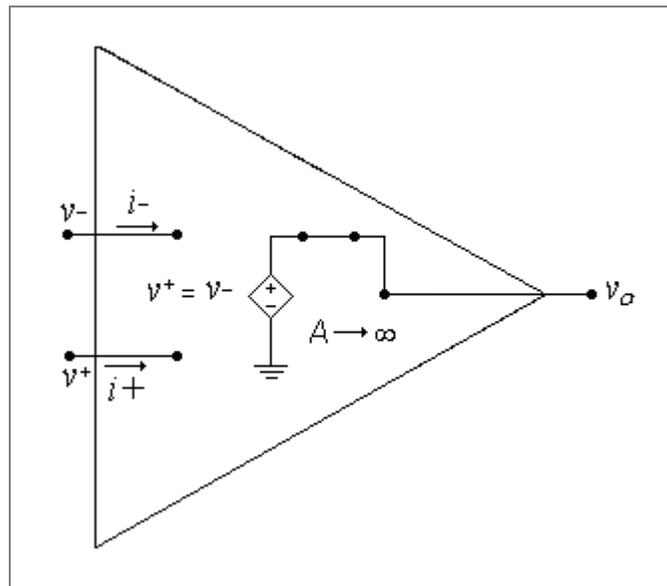


Figura 5-4

5.5. MÉTODO DE CÁLCULO CON AMPLIFICADOR IDEAL CON GANANCIA A INFINITA

El hecho de que $v^+ = v^-$ y de que $i^+ = i^- = 0$ fija las restricciones para el cálculo del circuito. Se escribe las ecuaciones de nodos para los terminales de entrada en función de los voltajes de entrada y el voltaje de salida teniendo en cuenta que no hay corriente entrando en dichos terminales y dado que $v^+ = v^-$ se igualan los voltajes de los terminales de entrada y de allí se tienen las ecuaciones necesarias para calcular el voltaje de salida en función de las señales de entrada y de la topología del circuito.

5.6. CONFIGURACIONES DE LAZO CERRADO DEL AMPLIFICADOR

Ya se ha mencionado el concepto ganancia de lazo abierto A . Ahora introducimos el concepto de ganancia de lazo cerrado, la cual corresponde a la relación entre la señal de salida y la señal de entrada del amplificador, al cual se le han realizado unas conexiones adicionales que permitirán realizar funciones muy específicas al circuito que incorpora al amplificador: inversiones, sumas, restas, etc. En estas configuraciones el amplificador siempre tendrá una realimentación negativa, por lo cual se dice que el lazo está cerrado. Para ilustrar este concepto lo mejor es analizar los distintos ejemplos que se presentan a continuación.

Las configuraciones más conocidas son: Inversor, No-inversor, Sumador, Restador, Seguidor o aislador.

Existe otro tipo de configuración que realiza una tarea muy especial conocida como Comparador, pero esta no corresponde a una configuración de lazo cerrado ya que no tienen realimentación

Ejemplo 5-1. Amplificador Ideal en configuración Inversor.

Para el circuito de la Figura 5-5, con amplificador ideal, encontrar:

- la señal de salida en función de las señales de entrada.
- la ganancia de lazo cerrado.

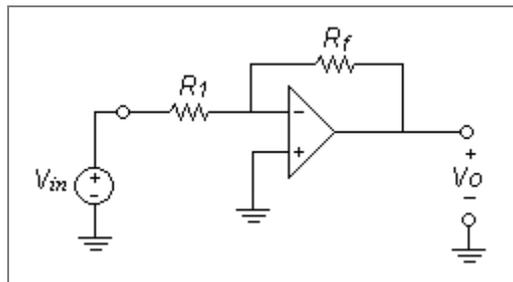


Figura 5-5

Solución

Parte a)

Sabiendo que el amplificador es ideal tenemos $v^+ = v^-$, y dado que el terminal no inversor está conectado a tierra tenemos:

$$v^+ = 0 = v^-$$

Ahora hacemos KCL en el terminal inversor, recordando que por ser un modelo ideal i^- es cero:

$$\frac{v_{in} - v^-}{R_1} + \frac{v_0 - v^-}{R_f} = 0$$

$$\frac{v_{in}}{R_1} + \frac{v_0}{R_f} = 0$$

$$v_0 = -\frac{R_f}{R_1} v_{in}$$

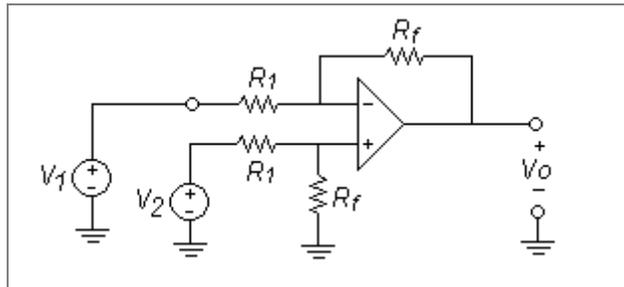
Parte b)

La relación entre la señal de salida y la señal de entrada nos da la ganancia de lazo cerrado:

$$\frac{v_0}{v_{in}} = -\frac{R_f}{R_1}$$

Ejemplo 5-2. Amplificador Ideal en configuración Restador.

Para el siguiente circuito con amplificador ideal encontrar la señal de salida en función de las señales de entrada. ¿Existe ganancia de lazo cerrado?

**Figura 5-6****Solución**

Sabiendo que el amplificador es ideal tenemos $v^+ = v^-$ procedemos a encontrar primero el valor de v^+ . Dado que no entra corriente por el terminal no inversor podemos aplicar el divisor de voltaje para calcular fácilmente el valor de v^+ :

$$v^+ = \left(\frac{R_f}{R_1 + R_f} \right) v_2 = v^-$$

Ahora hacemos KCL en el terminal inversor, recordando que por ser un modelo ideal i^- es cero:

$$\frac{v_1 - v^-}{R_1} + \frac{v_0 - v^-}{R_f} = 0$$

$$\frac{v_1 - v^+}{R_1} + \frac{v_0 - v^+}{R_f} = 0$$

Reemplazando el valor de v^+ y despejando V_0 tenemos:

$$v_0 = \frac{R_f}{R_1} (v_2 - v_1)$$

Este resultado nos muestra que la señal de salida es igual a la diferencia de las señales de entrada. Esto representa que se está eliminando lo que es común a las dos señales. Por tal motivo esta configuración se conoce con el nombre de rechazo de modo común.

Adicionalmente la salida está siendo amplificada por una ganancia positiva $\frac{R_f}{R_1}$ que se podría considerar como la ganancia de lazo cerrado, respecto a la diferencia de las señales de entrada.

Ejemplo 5-3. Amplificador Ideal en configuración Seguidor.

Para el circuito de la Figura 5-7, con amplificador ideal, encontrar:

- La señal de salida en función de la señal de entrada.
- La ganancia del lazo cerrado.
- El origen de la corriente por la carga.

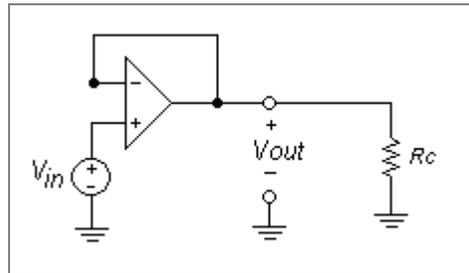


Figura 5-7

Solución

Parte a)

Sabiendo que el amplificador es ideal tenemos $v^+ = v^-$, y dado que el terminal no inversor está conectado a la fuente de entrada tenemos:

$$v^+ = v^- = v_{in}$$

Adicionalmente se tiene que $v^- = v_o$, de manera que

$$v_o = v_{in}$$

Como la señal de salida es igual a la de entrada se dice que el circuito se comporta como un seguidor de voltaje. El interés de esto se ve en la parte (c) de este ejemplo.

Parte b)

Directamente tenemos que la ganancia de lazo cerrado es:

$$\frac{V_o}{V_{in}} = 1$$

Parte c)

Como el amplificador es ideal no entra corriente por el terminal no inversor, de manera que la fuente de entrada no inyecta corriente al circuito. Lo mismo ocurre por el terminal inversor. De manera que la corriente debe venir de la salida del amplificador. Esta corriente proviene por supuesto de la alimentación del amplificador, la cual no está representada en el circuito.

Lo anterior implica que al conectar una resistencia de carga recibe el mismo voltaje de la señal de entrada, pero con una corriente que viene del amplificador y no de la fuente de entrada. Esto permite aislar la señal de entrada del circuito de la salida. Por tal motivo esta configuración también se llama aislador.

Ejemplo 5-4. Amplificador “Real” con equivalentes de Thévenin.

Encontrar V_o en el circuito de la Figura 5-8 con OPAM ideal.

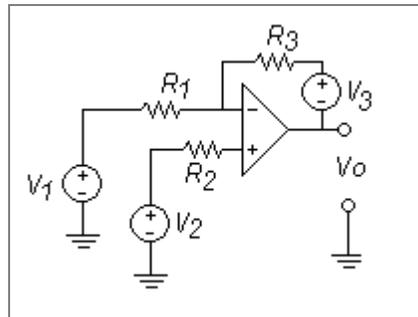


Figura 5-8

Solución

Usamos superposición para cada una de las fuentes como se indica en la siguiente Figura 5-9:

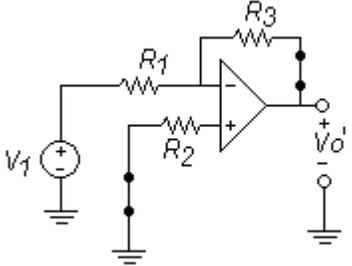
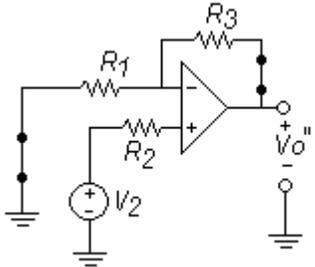
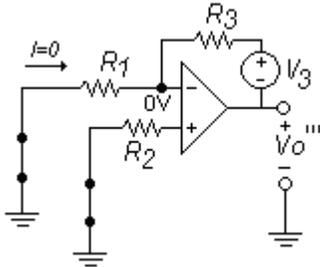
	<p><i>Inversor:</i></p> $V_{O'} = -V_1 \left(\frac{R_3}{R_1} \right)$
	<p><i>No-Inversor:</i></p> $V_{O''} = V_2 \left(1 + \frac{R_3}{R_1} \right)$
	$v^+ = v^- = 0$ $V_{O''''} = 0 - V_3 = -V_3$

Figura 5-9

Sumando las tres respuestas tenemos:

$$V_O = V_{O'} + V_{O''} + V_{O''''} = -V_1 \left(\frac{R_3}{R_1} \right) + V_2 \left(1 + \frac{R_3}{R_1} \right) - V_3$$

5.7. MODELO IDEAL DEL AMPLIFICADOR CON SATURACIÓN

Un amplificador ideal puede es capaz de suministrar en la salida cualquier valor de voltaje positivo o negativo, de acuerdo a lo previsto por las ecuaciones encontradas con el modelo ideal. El modelo ideal del amplificador presentado anteriormente asume que la fuente de voltaje controlada de la salida es ideal y que puede suministrar cualquier valor de voltaje de salida v_o , dado por la expresión $v_o = A(v^+ - v^-)$.

Sin embargo en un modelo más realista ocurre que esta fuente controlada no está en capacidad de suministrar un voltaje de salida v_o por fuera de cierto rango:

$$V_{sat-n} \geq v_o \geq V_{sat-p}$$

Donde V_{sat-n} es el voltaje de saturación negativa, que corresponde al valor mínimo que puede tomar el voltaje de salida; V_{sat-p} es voltaje de saturación positiva, que corresponde al valor máximo que puede tomar el voltaje de salida.

En este caso, cuando las condiciones del circuito hacen que $v_o = A(v^+ - v^-)$ se acerque al valor $v_o = V_{sat-p}$ y trate de aumentar, el valor de v_o será siempre V_{sat-p} . Así mismo, cuando las condiciones del circuito hacen que v_o se acerque a valores negativos cercanos a $v_o = V_{sat-n}$ y trate de ser aún menor, el valor de v_o permanecerá en V_{sat-n} .

El fenómeno descrito anteriormente es el que se denomina **Saturación**. El valor del voltaje de saturación con frecuencia es muy similar al voltaje de alimentación del amplificador y en general se asume que la saturación para los valores positivos y negativos es igual: $|V_{sat-n}| = V_{sat-p} = V_{sat}$. Este valor V_{sat} se denomina simplemente *Voltaje de Saturación*.

Otra caso muy importante que puede producir saturación en un amplificador es cuando no existe ningún tipo de realimentación o cuando la realimentación se hace por el terminal inversor – *realimentación positiva* – en vez de hacerlo por el terminal no inversor – *realimentación negativa* – (como se verá en los cursos de electrónica y que está fuera del alcance de este curso). En estos casos por definición el amplificador siempre estará saturado, independientemente de las demás condiciones del circuito.

En resumen, el OPAM estará saturado en estos tres casos:

- Si el amplificador tiene a un voltaje de salida por fuera del rango $V_{sat-n} \geq v_o \geq V_{sat-p}$
- Si no hay ningún tipo de realimentación.
- Si hay realimentación positiva pero no hay realimentación negativa.

5.8. AMPLIFICADOR CON VD NO NULO

Si V_d vale cero el comportamiento del amplificador es como se describió en la sección anterior. Sin embargo existen varios casos en los cuales V_d puede ser diferente de cero: cuando la ganancia del amplificador A es finita y cuando el amplificador se encuentra *saturado*.

5.9. MODELO IDEAL DEL AMPLIFICADOR CON GANANCIA A FINITA

Si la ganancia A del amplificador tiene un valor finito ($A \neq \infty$) ya no es válido que $v^+ = v^-$ y por tanto $(v^+ - v^-) = v_d \neq 0$. Sin embargo sigue siendo válido que $v_o = A(v^+ - v^-)$ y que $i^+ = i^- = 0$. Además del hecho de que puede haber o no fenómeno de saturación.

En este caso se debe analizar el circuito calculando v^+ y v^- en forma independiente y relacionándolos con v_o mediante la ecuación $v_o = A(v^+ - v^-)$.

Ejemplo 5-5. Amplificador de resistencias ideales en configuración Inversor.

Para el circuito de la Figura 5-10 con amplificador de resistencias ideales encontrar:

- la señal de salida en función de las señales de entrada.
- la ganancia de lazo cerrado.
- analizar el comportamiento de la ganancia de lazo cerrado cuando A tiende a infinito.
- la relación entre las ganancias de lazo cerrado para un amplificador real y el ideal, tomando como valor de A un valor típico de un amplificador comercial como el LF411 con ($R_f = 50k\Omega$, $R_1 = 25k\Omega$ y $A = 10^5$). Sacar una conclusión al respecto.

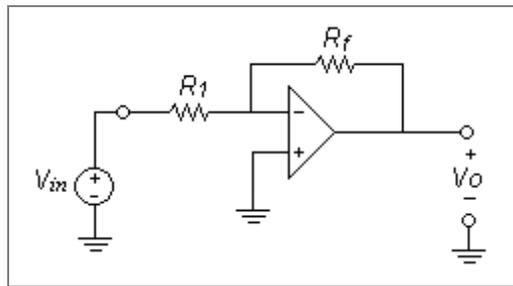


Figura 5-10

Solución**Parte a)**

Dado que el valor de A no es infinito, no se necesariamente se cumple el hecho de que $v^+ = v^-$, de manera que se debe calcular v^- a partir de la relación $v_o = A(v^+ - v^-)$, la cual es válida para la salida dado que $R_o = 0$.

Como el terminal no inversor está conectado a tierra $v^+ = 0$, de manera que $v_o = A(-v^-)$. Despejando v^- tenemos:

$$v^- = -\frac{v_o}{A}$$

Por otra parte como $R_{in} = \infty$ se sigue cumpliendo que $i^+ = i^- = 0$, de manera que al aplicar KLC en el terminal inversor tenemos:

$$\frac{v_{in} - v^-}{R_1} + \frac{v_o - v^-}{R_f} = 0$$

Reemplazando el valor calculado para v^- :

$$\frac{v_{in} - \left(-\frac{v_0}{A}\right)}{R_1} + \frac{v_0 - \left(-\frac{v_0}{A}\right)}{R_f} = 0$$

$$\frac{Av_{in} + v_0}{R_1} + \frac{Av_0 + v_0}{R_f} = 0$$

$$\frac{Av_{in}}{R_1} + v_0 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{A}{R_f} + \frac{1}{R_f} \right) = 0$$

$$\frac{v_{in}}{R_1} + v_0 \left(\frac{1}{AR_1} + \frac{1}{R_f} + \frac{1}{AR_f} \right) = 0$$

$$v_0 = -\frac{v_{in}}{R_1} \frac{1}{\left(\frac{1}{AR_1} + \frac{1}{R_f} + \frac{1}{AR_f} \right)}$$

Finalmente multiplicando por R_f tenemos la expresión buscada:

$$v_0 = -v_{in} \frac{R_f}{R_1} \frac{1}{\left(1 + \frac{R_f}{AR_1} + \frac{1}{A} \right)}$$

Parte b)

La relación entre la señal de salida y la señal de entrada nos da la ganancia de lazo cerrado:

$$\frac{v_0}{v_{in}} = -\frac{R_f}{R_1} \frac{1}{\left(1 + \frac{R_f}{AR_1} + \frac{1}{A} \right)}$$

Parte c)

Cuando A tiene a infinito, que sería como tener un amplificador ideal, el comportamiento debe ser el que hemos encontrado anteriormente cuando se desarrolló esta configuración para el amplificador ideal. Para encontrar este resultado debemos calcular el límite cuando A tiende a infinito:

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{v_0}{v_{in}} = \lim_{A \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{R_f}{R_1} \frac{1}{\left(1 + \frac{R_f}{AR_1} + \frac{1}{A} \right)} \right\}$$

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{v_0}{v_{in}} = -\frac{R_f}{R_1} \lim_{A \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\left(1 + \frac{R_f}{AR_1} + \frac{1}{A}\right)} \right\} = -\frac{R_f}{R_1} \left\{ \frac{1}{(1+0+0)} \right\} = -\frac{R_f}{R_1}$$

De manera que la ganancia de lazo cerrado cuando A tiende a infinito es la misma que en el caso del amplificador ideal del Ejemplo 5-1.

Parte d)

La relación entre las dos ganancias de lazo cerrado RG (o las dos salidas) es:

$$RG = \frac{v_{0-real}}{v_{0-ideal}} = \frac{v_{0-real}/v_{in}}{v_{0-ideal}/v_{in}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{R_f}{AR_1} + \frac{1}{A}\right)}$$

Al reemplazar los valores específicos ($R_f = 50k\Omega$, $R_1 = 25k\Omega$ y $A = 10^5$) tenemos:

$$RG = \frac{v_{0-real}}{v_{0-ideal}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{50k\Omega}{10^5 \cdot 25k\Omega} + \frac{1}{10^5}\right)} = 0.99997$$

$$v_{0-real} = 0.99997v_{0-ideal}$$

Se puede concluir que el comportamiento del amplificador con ganancia real finita (que es muy grande, sin ser infinita) es muy similar al del amplificador ideal. Esto justifica que se use frecuentemente el modelo ideal.

Ejemplo 5-6. Amplificador “Real” en configuración Inversor.

Para el circuito de la Figura 5-11 con amplificador “real” encontrar la señal de salida en función de la señal de entrada.

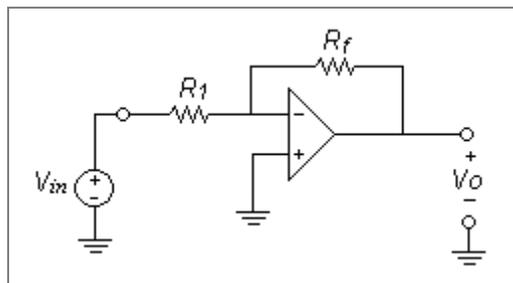


Figura 5-11

Solución

Como el modelo a utilizar es el modelo "real" utilizamos el circuito de la Figura 5-12:

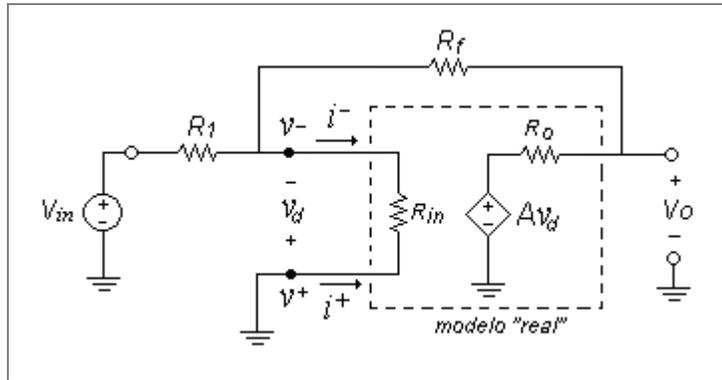


Figura 5-12

Como el terminal no inversor está conectado a tierra $v^+ = 0$. De manera que tenemos dos incógnitas: v^- y v_o . El voltaje en la fuente controlada es $Av_d = A(v^+ - v^-) = -Av^-$. Para encontrar un sistema que involucre estas dos incógnitas vamos a aplicar el método de análisis de nodos en los nodos v^- y v_o .

KCL en nodo v^- :

$$\left(\frac{v_{in} - v^-}{R_1}\right) + \left(\frac{v_o - v^-}{R_f}\right) + \left(\frac{0 - v^-}{R_{in}}\right) = 0$$

$$\left(\frac{1}{R_f}\right)v_o - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_f} + \frac{1}{R_{in}}\right)v^- = -\frac{v_{in}}{R_1}$$

KCL en nodo v_o :

$$\left(\frac{Av_d - v_o}{R_o}\right) + \left(\frac{v^- - v_o}{R_f}\right) = 0$$

$$\left(\frac{A(0 - v^-) - v_o}{R_o}\right) + \left(\frac{v^- - v_o}{R_f}\right) = 0$$

$$-\left(\frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_f}\right)v_o + \left(\frac{1}{R_f} - \frac{A}{R_o}\right)v^- = 0$$

Poniendo estas ecuaciones en forma matricial tenemos:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_f} & -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_f} + \frac{1}{R_{in}}\right) \\ -\left(\frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_f}\right) & \left(\frac{1}{R_f} - \frac{A}{R_o}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_o \\ v^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{v_{in}}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ahora calculamos v_o usando la regla de Cramer:

$$v_o = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{v_{in}}{R_1} & -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_f} + \frac{1}{R_{in}}\right) \\ 0 & \left(\frac{1}{R_f} - \frac{A}{R_o}\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_f} & -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_f} + \frac{1}{R_{in}}\right) \\ -\left(\frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_f}\right) & \left(\frac{1}{R_f} - \frac{A}{R_o}\right) \end{vmatrix}}$$

$$v_o = -v_{in} \frac{\left(\frac{1}{R_1}\right)\left(\frac{1}{R_f} - \frac{A}{R_o}\right)}{\left(\frac{1}{R_f}\right)\left(\frac{1}{R_f} - \frac{A}{R_o}\right) - \left(\frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_f}\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_f} + \frac{1}{R_{in}}\right)}$$

Luego de algunas simplificaciones llegamos a la siguiente expresión para la configuración del Inversor con modelo “real” del amplificador:

$$v_o = -v_{in} \left(\frac{R_f}{R_1}\right) \frac{1}{\left[1 + \frac{(R_f + R_o)}{(AR_f + R_o)} \left(1 + \frac{R_f}{R_1} + \frac{R_f}{R_{in}}\right)\right]}$$

Nótese que si hacemos que si hacemos que las resistencias sean ideales ($R_{in} = \infty$ y $R_o = 0$) debemos llegar a la expresión obtenida en el Ejemplo 5-5. Primero hagamos $R_o = 0$:

$$v_o|_{R_o=0} = -v_{in} \left(\frac{R_f}{R_1}\right) \frac{1}{\left[1 + \frac{(R_f + 0)}{(AR_f + 0)} \left(1 + \frac{R_f}{R_1} + \frac{R_f}{R_{in}}\right)\right]} = -v_{in} \left(\frac{R_f}{R_1}\right) \frac{1}{\left[1 + \frac{1}{A} \left(1 + \frac{R_f}{R_1} + \frac{R_f}{R_{in}}\right)\right]}$$

$$v_o|_{R_o=0} = -v_{in} \left(\frac{R_f}{R_1}\right) \frac{1}{\left[1 + \frac{1}{A} + \frac{R_f}{AR_1} + \frac{R_f}{AR_{in}}\right]}$$

Ahora calculamos el límite cuando la resistencia de entrada tiende a infinito:

$$\lim_{R_{in} \rightarrow \infty} v_o|_{R_o=0} = -v_{in} \left(\frac{R_f}{R_1}\right) \frac{1}{\left[1 + \frac{1}{A} + \frac{R_f}{AR_1} + \frac{R_f}{AR_{in}}\right]} = -v_{in} \frac{R_f}{R_1} \frac{1}{\left(1 + \frac{R_f}{AR_1} + \frac{1}{A}\right)}$$

Este último resultado corresponde exactamente a lo encontrado anteriormente cuando se usó el modelo de resistencias ideales en el Ejemplo 5-5.

5.10. REGIÓN ACTIVA Y REGIÓN DE SATURACIÓN

La saturación es un fenómeno por el cual el amplificador no puede poner en la salida un voltaje por fuera del rango de los voltajes de alimentación del propio amplificador (V_{DC+} y V_{DC-} que no hemos representado en las gráficas de los modelos) en cualquier instante de tiempo. En general el voltaje de saturación es cercano a un voltio por debajo del voltaje de alimentación. Dado que hay dos alimentaciones, positiva y negativa, existen dos voltajes de saturación: saturación positiva V_{sat+} y saturación negativa V_{sat-} . Los valores de alimentación positiva y negativa, así como los voltajes de saturación positiva y saturación negativa no necesariamente son simétricos (iguales en valor absoluto). Esto se puede apreciar en la Figura 5-13. Lo anterior implica que el voltaje de salida v_o se ve limitado o acotado por los límites que impone los voltajes de saturación positiva y negativa.

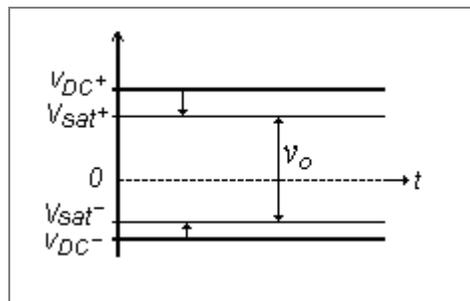


Figura 5-13

Cuando el amplificador no tiene saturación el valor de la salida v_o es el previsto por la ecuación de v_o resultante de aplicar alguno de los modelos vistos anteriormente (ideal, resistencias ideales, "real").

Si el amplificador tiene voltajes de saturación definidos (para cualquiera de los modelos) la situación es diferente: si la salida se encuentra entre el voltaje de saturación positiva y el voltaje de saturación negativa, se dice que el amplificador está operando en Región Activa, y la salida será la prevista por las ecuaciones resultantes de aplicar el modelo deseado (ideal, resistencias ideales, "real") y la configuración específica (inversor, no-inversor, seguidor, etc.). Si el voltaje de salida está fuera de este rango se dice que el amplificador está saturado y que opera en la Región de Saturación. Existen dos regiones de saturación: positiva y negativa, dependiendo si la salida toma el voltaje de saturación positivo o el voltaje de saturación negativo respectivamente.

Adicionalmente, por la manera que en que se fabrican los amplificadores (tema de cursos más avanzados) cuando no existe realimentación negativa el amplificador se satura (se podría decir que es "por definición").

5.11. MÉTODO DE CÁLCULO CON AMPLIFICADOR IDEAL CON SATURACIÓN Y REALIMENTACIÓN NEGATIVA

El método es el de prueba y error. Consiste en asumir que el circuito se encuentra con el amplificador operando en región activa y hacer los cálculos del voltaje de salida correspondientes a la configuración y modelos deseados.

Para determinar los valores de las entradas para los cuales se alcanza la saturación se hace lo siguiente:

1. Se asume que el amplificador opera en región activa (sin saturación) y se calcula v_o en función de las entradas $v_o = f(v_1, \dots, v_n)$ teniendo en cuenta la configuración y modelo específico. El valor de $f(v_1, \dots, v_n)$ será entonces el valor de la salida v_o en región activa.
2. Luego se encuentran las condiciones de las entradas v_1, \dots, v_n para las cuales se tiene saturación positiva: $f(v_1, \dots, v_n) \geq V_{sat+}$. Para estas condiciones la salida será $v_o = V_{sat+}$.
3. Luego se encuentran las condiciones de las entradas v_1, \dots, v_n para las cuales se tiene saturación negativa: $f(v_1, \dots, v_n) \leq V_{sat-}$. Para estas condiciones la salida será $v_o = V_{sat-}$.

En resumen, cuando hay saturación se tiene:

$$v_o = \begin{cases} f(v_1, \dots, v_n) & , \text{si } V_{sat-} \leq f(v_1, \dots, v_n) \leq V_{sat+} & , \text{región activa} \\ V_{sat+} & , \text{si } f(v_1, \dots, v_n) > V_{sat+} & , \text{región saturación positiva} \\ V_{sat-} & , \text{si } f(v_1, \dots, v_n) < V_{sat-} & , \text{región saturación negativa} \end{cases}$$

5.12. MÉTODO DE CÁLCULO CON AMPLIFICADOR IDEAL CON SATURACIÓN Y SIN REALIMENTACIÓN NEGATIVA

Cuando no hay realimentación negativa, el amplificador no puede controlar el voltaje de salida v_o a un valor estable y automáticamente se satura, de manera que para el caso ideal tenemos:

$$v_o = \begin{cases} V_{sat+} & , \text{si } (v_+ - v_-) = vd > 0 & , \text{región saturación positiva} \\ V_{sat-} & , \text{si } (v_+ - v_-) = vd < 0 & \text{región saturación negativa} \end{cases}$$

Ejemplo 5-7. Amplificador Ideal Comparador.

En el siguiente circuito el amplificador es ideal con voltajes de saturación positiva y negativa definidos (los cuales no se conocen directamente, pero se pueden aproximar a un voltio de los voltajes de alimentación del amplificador). Graficar la señal de entrada y la señal de salida si la señal de entrada es $v_{in}(t) = 3V + 2\text{sen}(80\pi \cdot t)V$, el voltaje de referencia es 3V, la alimentación positiva es de 6V y la alimentación negativa es de -1V.

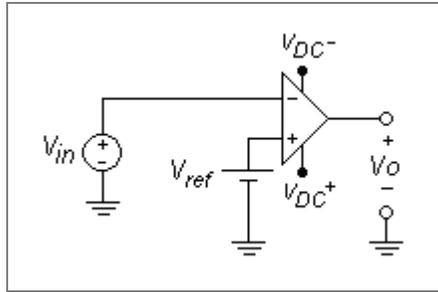


Figura 5-14

Solución

Nótese que en este caso no existe ganancia de lazo cerrado ya que no existe realimentación. De manera que el método de solución se basa en saber si el amplificador está en saturación positiva o negativa. El voltaje de salida deberá tomar entonces uno de los valores de saturación. Esto dependerá del valor de v_d . De manera que debemos conocer los voltajes de saturación y determinar para qué condiciones v_d es positivo o negativo.

Los voltajes de saturación los calculamos con buena aproximación a partir de los voltajes de alimentación:

$$V_{sat+} = V_{DC+} - 1V = 6V - 1V = 5V$$

$$V_{sat-} = V_{DC-} + 1V = -1V + 1V = 0V$$

Como se aprecia en la siguiente figura los voltajes de saturación están acotados por los voltajes de alimentación del amplificador. La señal de salida V_o será una señal binaria que tomará uno de los dos valores de saturación: 0V ó 5V. El valor de 0V se tiene cuando $v_d < 0$ (saturación negativa) y el de 5V cuando $v_d > 0$ (saturación positiva).

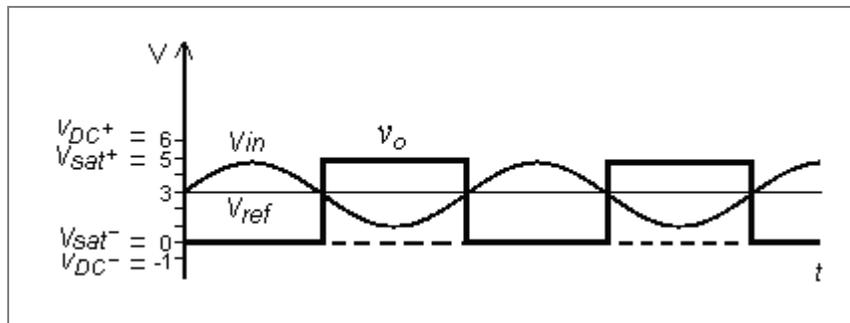


Figura 5-15

Como

$$v_d = (v^+ - v^-) = V_{ref} - V_{in} = 3V - [3V + 2\text{sen}(80\pi \cdot t)V] = -2\text{sen}(80\pi \cdot t)V$$

tenemos:

$$v_o = \begin{cases} V_{sat+} = 5V, & \text{si } -2\text{sen}(80\pi \cdot t)V > 0 \quad , \text{ región saturación positiva} \\ V_{sat-} = 0V, & \text{si } -2\text{sen}(80\pi \cdot t)V < 0 \quad \text{región saturación negativa} \end{cases}$$

Adicionalmente se podría calcular para qué valores de t se dan tales condiciones.

5.13. SIMULACIONES

5.13.1. AMPLIFICADOR OPERACIONAL

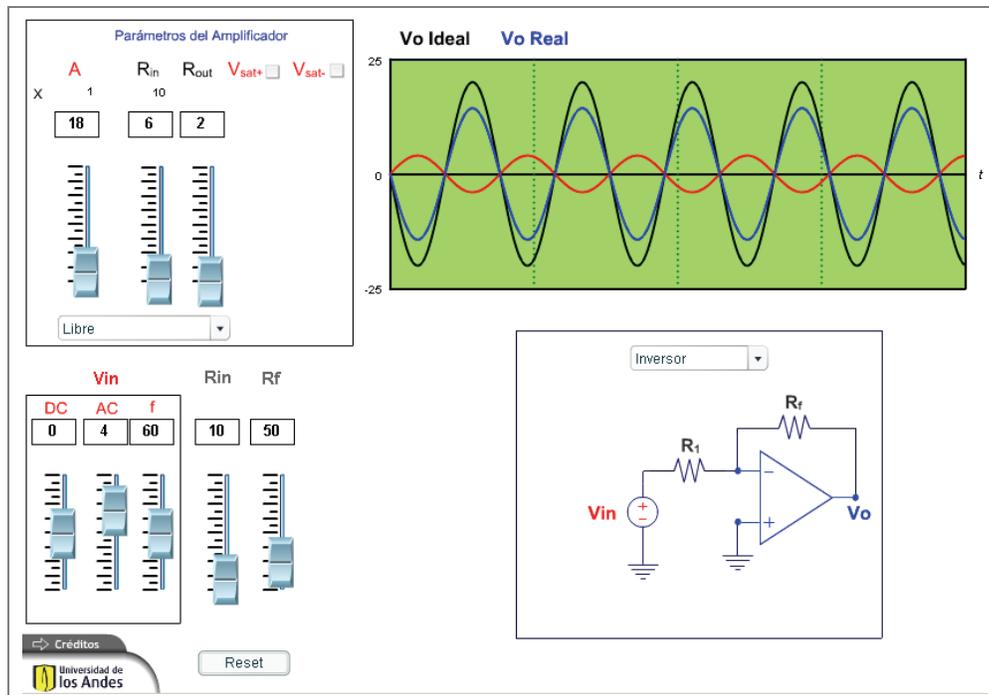


Figura 5-16

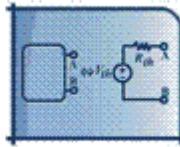
Descripción

Esta simulación muestra distintas configuraciones de amplificadores operacionales (Inversor, No Inversor, Seguidor, Sumador, Restador, Comparador) y los efectos en la señal de salida respecto a los parámetros del amplificador como son la ganancia de lazo abierto, las resistencias de entrada y salida o el voltaje de saturación.

Uso educativo

Esta simulación se presenta como un complemento a la clase presencial, para estudiantes de primeros semestres de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Mecánica. Una vez los estudiantes manejan los conceptos de fuentes controladas, resistencia de entrada, resistencia equivalente, KCL y los conceptos básicos del amplificador operacional, como su modelo ideal y real y el de saturación, podrán seleccionar distintas configuraciones (Inversor, No Inversor, Seguidor, Sumador, Restador, Comparador), varias los parámetros propios del amplificador o seleccionar un amplificador del mercado y ajustar las señales de entrada (nivel DC, amplitud AC y la frecuencia) para ver el comportamiento de la señal de salida en cada caso. Pueden comparar la señal de salida del modelo ideal contra la señal de salida del modelo real (A finito, resistencia de entrada finita y resistencia de salida no nula).

6. THÉVENIN, NORTON Y MÁXIMA TRANSFERENCIA DE POTENCIA



6.1. INTRODUCCIÓN

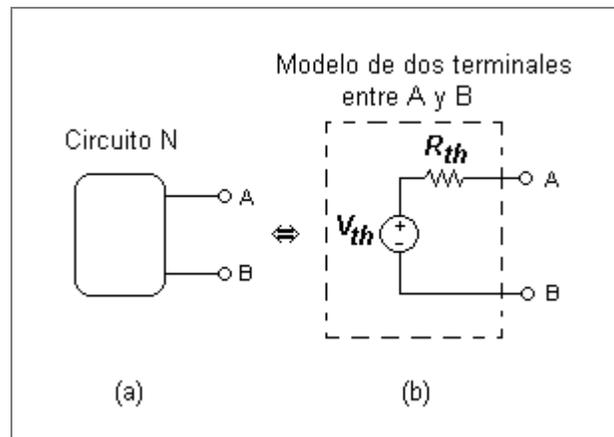


Figura 6-1

La Figura 6-1 esquematiza el concepto básico del Teorema de Thévenin: “Dado un circuito lineal cualquiera N, para un par de terminales A y B de dicho circuito, es posible encontrar un circuito equivalente formado por una fuente de voltaje ideal en serie con una resistencia, de manera tal que ese circuito de dos terminales produzca los mismos valores de voltaje y corriente en esos terminales (conectados o no a otro circuito) que el circuito original”. La fuente de voltaje tendrá un valor conocido como *Voltaje de Thévenin* V_{TH} y la resistencia tendrá un valor conocido como *Resistencia de Thévenin* R_{TH} .

Este teorema nos permite introducir un método de análisis de circuitos adicional: dividir el circuito original en componentes de dos puertos, que son equivalentes de Thévenin de una parte del circuito, los cuales se interconecten entre sí. Esto permite realizar cálculos más sencillos que con el circuito completo. Como se verá en los circuitos con inductancias o capacitancias, el análisis del comportamiento de corrientes y voltajes en circuitos de primer y segundo orden, mediante ecuaciones diferenciales, también se simplifica utilizando el equivalente de Thévenin entre los terminales de las capacitancias o inductancias, de las cuales se quieren analizar

los fenómenos transitorios, al utilizar las fórmulas encontradas para circuitos RC o RL , que están formados por una capacitancia o una inductancia en serie con una resistencia y una fuente de voltaje.

Otra utilidad, probablemente la más importante de este concepto, es que teniendo este modelo es sencillo encontrar la máxima transferencia de potencia del circuito N a otro circuito conectado a los terminales A y B .

Por lo estudiado en el capítulo de transformación de fuentes es evidente que el circuito equivalente de Thévenin se puede convertir también en circuito de dos terminales formado por una fuente de corriente en paralelo con una resistencia como se muestra en la Figura 6-2. A este modelo se le conoce como equivalente de Norton, el cual se puede calcular transformando el equivalente de Thévenin o haciendo los cálculos directos como se hace para el equivalente de Norton.

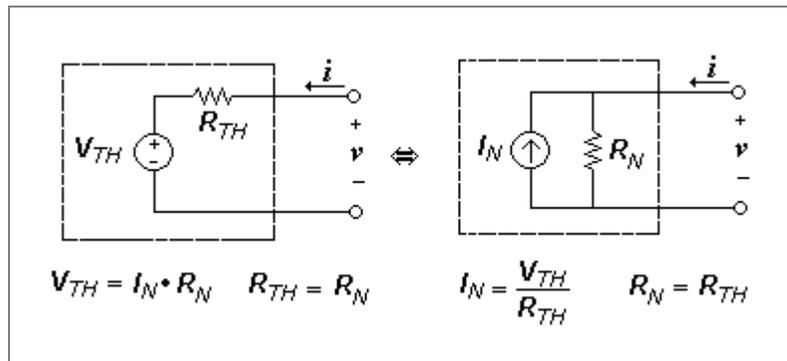


Figura 6-2

6.2. CÁLCULO DEL EQUIVALENTE DE THÉVENIN

Existen varios métodos para calcular el equivalente de Thévenin. Un método se basa en el uso de una fuente de prueba conectada entre los terminales A y B entre los cuales se desea obtener el equivalente, el cual permite obtener simultáneamente V_{TH} y R_{TH} . Otro método consiste en calcular por separado V_{TH} y R_{TH} aplicando varias técnicas. El cálculo del equivalente en estos casos implica la modificación del circuito original y el cálculo de corrientes, voltajes o resistencias equivalentes de los nuevos circuitos resultantes aplicando las técnicas tradicionales, como nodos, mallas, etc.

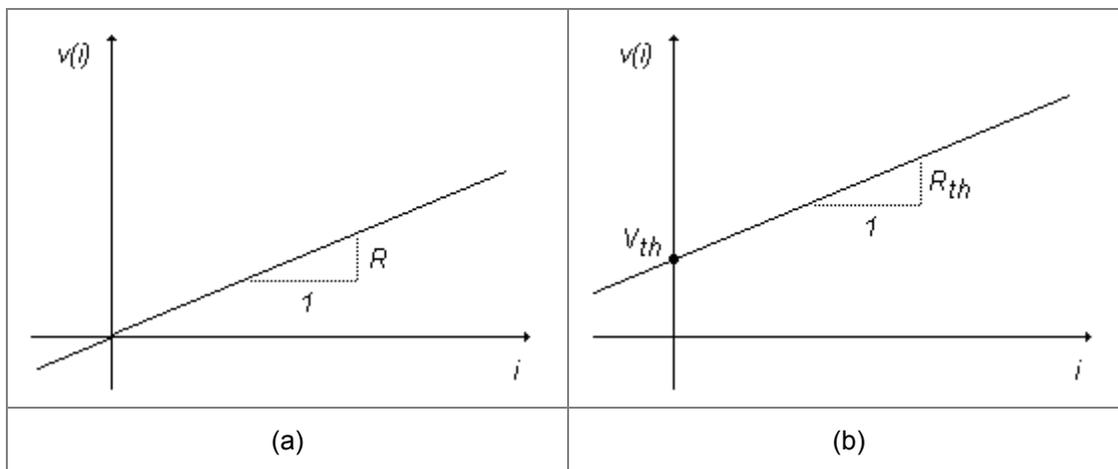


Figura 6-3

Adicionalmente a estos métodos basados en cálculos sobre los modelos de los circuitos, existe un método gráfico, de origen experimental. Hemos insistido en el hecho de que en un circuito de dos terminales nos interesa conocer la relación entre voltaje y corriente. En el caso de una resistencia, que es un elemento pasivo, por la ley de Ohm la relación entre voltaje y corriente es la resistencia R como se muestra en la Figura 6-5(a), en donde la pendiente de la recta es la resistencia. Esta recta tiene la forma $y = ax + b$. Siendo y el voltaje, x la corriente, a la resistencia R y b el cruce por el eje y (con $i=0$), que en el caso de una resistencia es cero. En el caso de un equivalente de Thévenin, formado por una fuente de voltaje y una resistencia en serie la relación entre voltaje y corriente se muestra en la Figura 6-5(b). Como el elemento es lineal la relación entre voltaje y corriente es una recta de la forma $y = ax + b$, pero en este caso por ser un elemento activo, el valor de b ya no es cero, sino que vale V_{th} . De manera que teniendo datos experimentales de voltaje contra corriente entre los dos terminales se puede encontrar el equivalente de Thévenin encontrando el cruce por el eje y y para encontrar el voltaje de Thévenin V_{TH} , y la pendiente de la recta, para conocer la resistencia de Thévenin R_{TH} . Dependiendo del circuito, el valor del voltaje de Thévenin V_{TH} puede ser positivo o negativo.

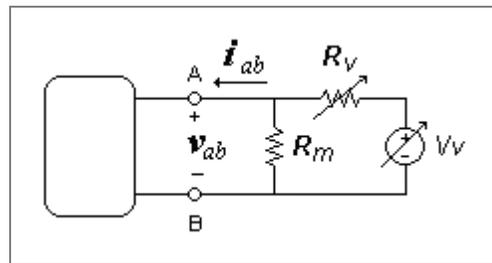


Figura 6-4

Una vez tenemos la curva V - I el método gráfico es fácil de aplicar. ¿Pero como obtener estos datos experimentalmente si no nos dan la tabla? Existen distintas formas de hacer esto. Si sabemos que el circuito tiene elementos activos podemos poner distintas resistencias (o una resistencia variable, o una década de resistencias) entre los terminales a y b y medir los valores resultantes de voltaje y corriente. Si el circuito no tiene elementos activos debemos poner una fuente de voltaje que podamos variar para obtener distintas mediciones de voltaje y corriente. Como puede ocurrir que no sepamos lo que existe al interior de un circuito dado, podemos hacer un montaje experimental que contenga una fuente de voltaje en serie con la resistencia variable. Para mejorar los cálculos es bueno tener en cuenta la resistencia interna de la fuente de voltaje, así como la resistencia interna de los equipos de medición del voltaje. Este montaje se puede apreciar en la Figura 6-6. en donde R_m representa la resistencia interna del voltímetro, R_v la resistencia variable y V_v la fuente de voltaje variable.

6.3. MÉTODO DE FUENTE DE PRUEBA

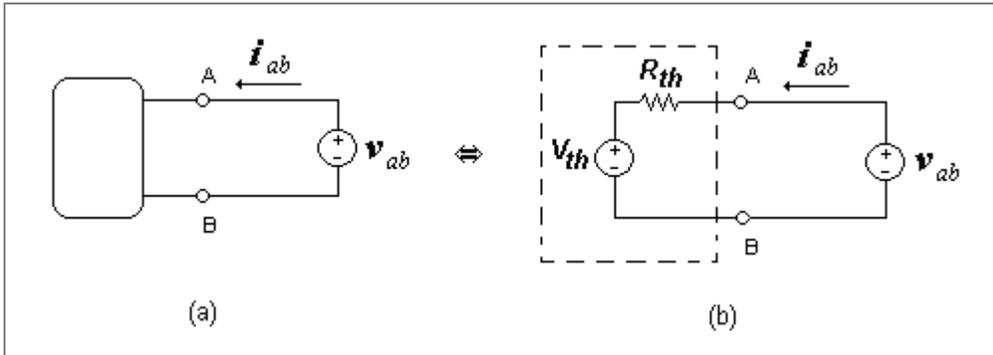


Figura 6-5

La Figura 6-5 muestra el método de la fuente de prueba en la cual al conectar la fuente de voltaje v_{ab} entre los terminales A y B de cualquiera de los dos circuitos (a) y (b) se debe producir la misma corriente i_{ab} , dado que los dos circuitos son equivalentes. De la Figura 6-5.b tenemos:

$$v_{ab} = V_{TH} + R_{TH} \cdot i_{ab}$$

Por tanto para encontrar el equivalente debemos calcular sobre el circuito original (Figura 6-5.a) v_{ab} en función de i_{ab} , de manera que nos de una expresión de la forma:

$$v_{ab} = V_x + R_x \times i_{ab}$$

y por comparación se tiene que:

$$\begin{aligned} V_{TH} &= V_x \\ R_{TH} &= R_x \end{aligned}$$

Por supuesto que el cálculo de V_x y R_x requiere la aplicación de técnicas de análisis de circuitos para encontrar la expresión deseada.

6.4. CONSECUENCIAS DEL MÉTODO DE FUENTE DE PRUEBA

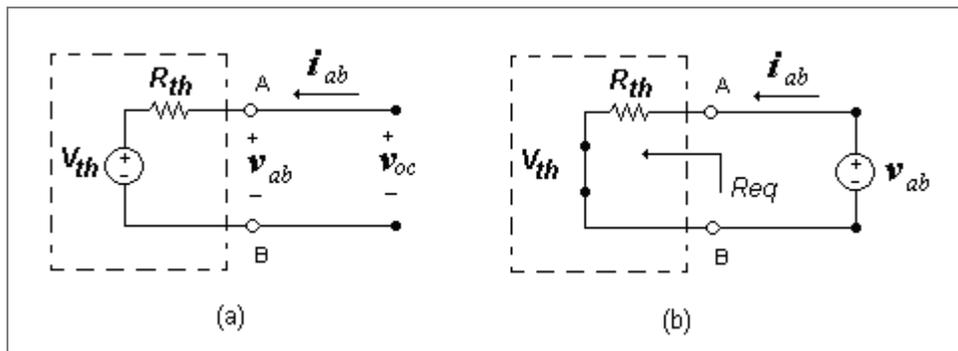


Figura 6-6

Si en la Figura 6-6.b dejamos el circuito abierto se tiene que la corriente i_{ab} es cero y por tanto la ecuación $v_{ab} = V_{TH} + R_{TH} \cdot i_{ab}$ se transforma en:

$$v_{ab}(i_{ab} = 0) = V_{TH} = v_{oc}$$

en donde v_{oc} es el voltaje de circuito abierto, como se muestra en la Figura 6-6.a.

Por otra parte, si en la figura 3.b quitamos la fuente de voltaje de Thévenin (haciendo $V_{TH} = 0$), se tiene que la ecuación $v_{ab} = V_{TH} + R_{TH} \cdot i_{ab}$ se transforma en:

$$v_{ab}(V_{TH} = 0) = R_{TH} \cdot i_{ab}$$

$$R_{TH} = \frac{v_{ab}(V_{TH} = 0)}{i_{ab}} = R_{eq}$$

de manera que la resistencia equivalente R_{eq} vista desde los terminales A y B es igual a la resistencia de Thévenin R_{TH} . Si no hay fuentes dependientes la resistencia de Thévenin es tan solo la resistencia entre A y B calculada al quitar las fuentes del circuito resistencia equivalente como se muestra en la figura 4.b:

$$R_{TH} = R_{eq} = \frac{v_{ab}}{i_{ab}}$$

6.5. MÉTODO DE VOLTAJE DE CIRCUITO ABIERTO Y RESISTENCIA EQUIVALENTE

De lo anterior se deduce el otro método para calcular el equivalente de Thévenin: calcular el voltaje de circuito abierto v_{oc} que será igual al voltaje de Thévenin y luego calcular la resistencia equivalente R_{eq} entre A y B, que será la resistencia de Thévenin R_{TH} .

Para calcular el voltaje de circuito abierto v_{oc} se dejan todas las fuentes, (independientes e dependientes) del circuito original de la figura 3.a y se calcula la caída de voltaje entre los nodos A y B en circuito abierto.

Para calcular la resistencia equivalente R_{eq} entre A y B **se apagan todas las fuentes independientes** y se analiza una de estas dos posibilidades:

Si **no hay** fuentes dependientes la resistencia equivalente R_{eq} entre A y B es el equivalente resistivo entre los terminales A y B calculada por medio de transformaciones de resistencias serie, paralelo o delta-estrella.

Si **hay** fuentes dependientes se dejan tales fuentes, se pone una fuente de prueba entre A y B, como se muestra en la figura 4.b y se calcula la resistencia equivalente

$$\text{como } R_{eq} = \frac{v_{ab}}{i_{ab}}.$$

6.6. CÁLCULO DEL EQUIVALENTE DE NORTON

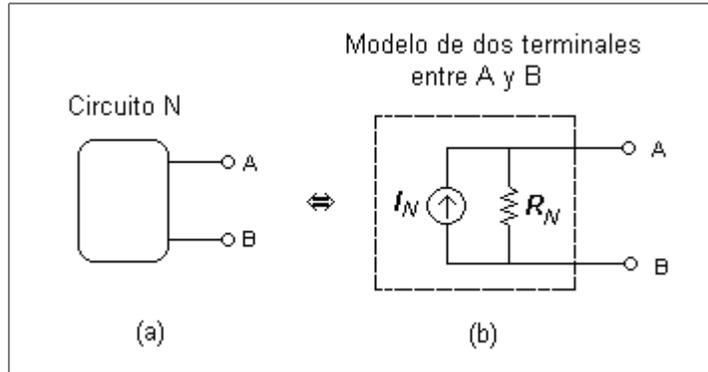


Figura 6-7

Como se explicó en la introducción el equivalente de Norton mostrado en la Figura 6-7.b se puede obtener a partir del equivalente de Thévenin aplicando transformación de fuentes Figura 6-8. Sin embargo, existen métodos similares a los del equivalente de Thévenin para encontrar el equivalente de Norton sin pasar por el equivalente de Thévenin.

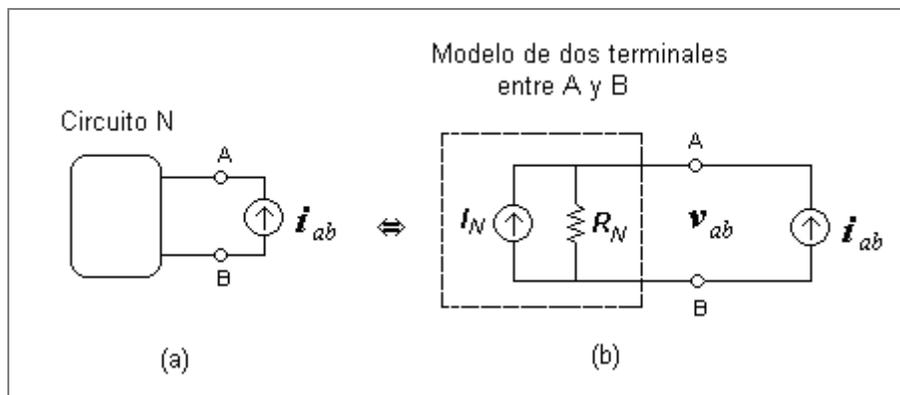


Figura 6-8

La principal manera de calcular el equivalente de Norton se muestra en la Figura 6-8.a, en la cual vemos que para la Figura 6-8.b se tiene:

$$i_{ab} = \frac{v_{ab}}{R_N} - I_N$$

de manera que como se hizo para el caso de Thévenin, al calcular en el circuito de la Figura 6-8.a i_{ab} en función de v_{ab} nos de una expresión de la forma:

$$i_{ab} = \frac{v_{ab}}{R_x} - I_x$$

y por comparación se tiene que:

$$I_N = I_x$$

$$R_N = R_x$$

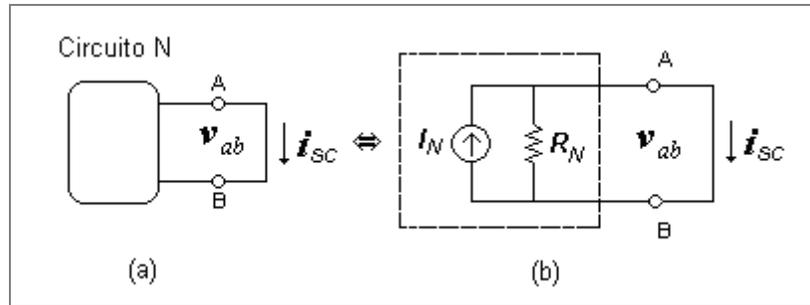


Figura 6-9

Si en el circuito original N se hace un corto circuito entre los terminales A y B como se muestra en la Figura 6-9.a, se tiene que $v_{ab} = 0$, y por lo tanto la ecuación para i_{ab} para la Figura 6-9.b se convierte en:

$$i_{ab} = -I_N$$

y la ecuación para i_{ab} para la Figura 6-8.a se convierte en:

$$i_{ab} = -I_x$$

Como I_x es la corriente entre A y B al hacer el corto circuito (Figura 6-9.a) esta corriente se denomina la corriente de corto circuito i_{sc} .

De manera que:

$$I_x = I_N = i_{sc}$$

Esto significa que para calcular el valor de la fuente de corriente del equivalente de Norton (Figura 6-9.b) se calcula la corriente de corto circuito i_{sc} , haciendo un corto entre los terminales A y B del circuito original N (Figura 6-9.a). Luego se calcula la resistencia de Norton de la misma manera que se calculó la de Thévenin: se apagan las fuentes independientes y se calcula la resistencia equivalente.

$$i_{ab} = \frac{v_{ab}}{R_N} - I_N$$

con $I_N = 0$, de manera que

$$i_{ab} = v_{ab} / R_N$$

$$R_{eq} = \frac{v_{ab}}{i_{ab}} = R_N$$

Otra relación importante que se desprende de todo lo anterior es:

$$R_{TH} = R_N = \frac{v_{oc}}{i_{sc}}$$

6.7. MÁXIMA TRANSFERENCIA DE POTENCIA

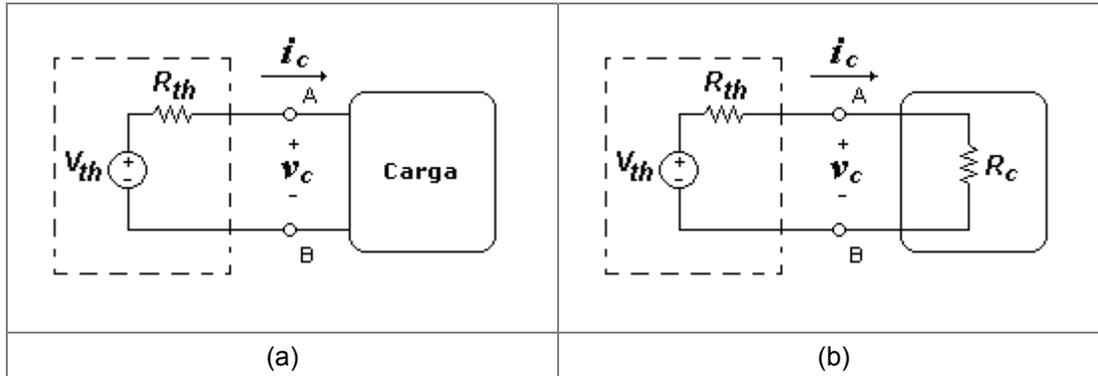


Figura 6-10

Cuando una fuente o un circuito se conectan a una carga cualquiera es deseable que tal fuente o circuito pueda transmitir la mayor cantidad de potencia a la carga que la recibe. La Figura 6-10

.a muestra un equivalente de Thévenin de un circuito cualquiera (a la izquierda de AB) conectado a una carga cualquiera. Al conectar esta carga aparece un voltaje V_c y una corriente i_c entre los nodos A y B. Para determinar las condiciones en las cuales se presenta máxima transferencia de potencia de un circuito a otro vamos a considerar dos casos: el primero en el cual solo hay una carga resistiva, y el segundo en el cual la carga puede tener elementos pasivos y activos.

6.8. MÁXIMA TRANSFERENCIA DE POTENCIA CON CARGA RESISTIVA

En el caso particular de que la carga sea una resistencia R_c (Figura 6-10

.b) tendremos:

$$V_c = V_{th} \frac{R_c}{R_{th} + R_c}$$

$$P_c(R_c) = \frac{V_c^2}{R_c} = V_{th}^2 \frac{R_c}{(R_{th} + R_c)^2}$$

La Figura 6-13 muestra la variación de la potencia absorbida por la carga P_c en función de R_c .

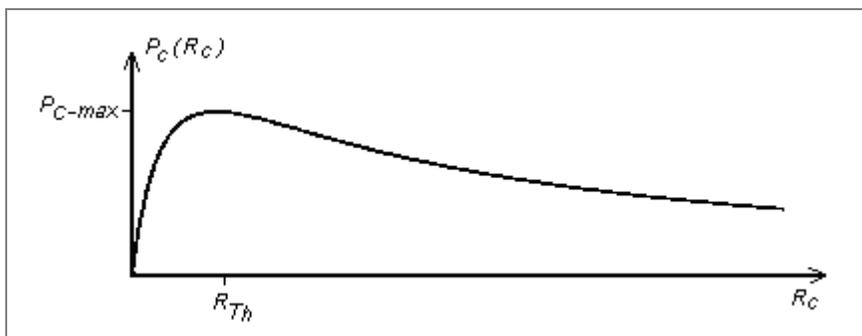


Figura 6-11

Como se puede apreciar en la gráfica la potencia absorbida –que es una función cuadrática- alcanza un máximo. Este valor máximo se calcula derivando la potencia e igualando a cero, con lo cual se encuentra que la potencia tendrá un máximo cuando:

$$\boxed{R_{th} = R_C}$$

de manera que para que haya máxima transferencia de potencia desde el circuito a la izquierda de AB (representado por su equivalente de Thévenin) se debe tener que la resistencia de la carga sea igual a la resistencia de Thévenin.

Adicionalmente, dado que estas dos resistencias son iguales, por divisor de voltaje se tiene que el voltaje máximo en V_C es $V_{C_{max}}$ es la mitad de V_{th} :

$$V_C = V_{th} \frac{R_C}{R_{th} + R_C} = V_{th} \frac{R_{th}}{R_{th} + R_{th}} = \frac{1}{2} V_{th}$$

$$\boxed{V_C = \frac{1}{2} V_{th}}$$

En este caso la potencia máxima transferida será:

$$P_{C_{-max}} = \frac{V_{C_{-max}}^2}{R_C} = \frac{\left(\frac{1}{2} V_{th}\right)^2}{R_{th}} = \frac{V_{th}^2}{4R_{th}}$$

$$\boxed{P_{C_{-max}} = \frac{V_{th}^2}{4R_{th}}}$$

6.9. MÁXIMA TRANSFERENCIA DE POTENCIA CON CARGA ARBITRARIA

Si el circuito de carga conectado es una carga arbitraria, que no es necesariamente una resistencia, la condición para máxima transferencia sigue siendo que $V_{C_{max}} = V_{th}/2$, aunque la resistencia de carga sea diferente de R_{th} . Para ver que esto es así veamos las ecuaciones del circuito de la Figura 6-10.a:

$$I_C = \frac{V_{th} - V_C}{R_{th}}$$

$$P_C = V_C I_C = V_C \left(\frac{V_{th} - V_C}{R_{th}} \right)$$

$$P_C = \frac{V_{th} \cdot V_C}{R_{th}} - \frac{V_C^2}{R_{th}}$$

$$\frac{dP_C}{dV_C} = \frac{V_{th}}{R_{th}} - 2 \frac{V_C}{R_{th}} = 0$$

De donde se tiene que:

$$\boxed{V_{C_{-max}} = V_{th} / 2}$$

De manera que si queremos que haya máxima transferencia de un circuito representado por su equivalente de thévenin a otro circuito se debe tener que el voltaje en la unión de los dos circuitos sea la mitad del voltaje de thévenin, lo cual se debe logra variando los parámetros internos del circuito arbitrario conectado (variar, los valores de las fuentes o de las resistencias por ejemplo).

La potencia máxima transferida por el circuito será:

$$I_{C-\max} = \frac{V_{th} - V_{C-\max}}{R_{th}}$$

$$P_{C-\max} = V_{C-\max} I_{C-\max} = V_{C-\max} \left(\frac{V_{th} - V_{C-\max}}{R_{th}} \right) = (V_{th} / 2) \left(\frac{V_{th} - V_{th} / 2}{R_{th}} \right)$$

$$P_{C-\max} = \frac{V_{th}^2}{4R_{th}}$$

Como se ve es el mismo valor encontrado en el caso puramente resistivo. De manera que sin importar el circuito de carga conectado, la máxima transferencia de potencia está dada exclusivamente por el equivalente de thévenin:

$$P_{C-\max} = \frac{V_{th}^2}{4R_{th}}$$

Ejemplo 6-1. Calculo del Equivalente de Thévenin por tres métodos.

Para el circuito de la Figura 6-12 calcular el equivalente de thévenin entre los nodos a y b por los siguientes métodos:

- Con fuente de prueba.
- Encontrando V_{oc} y R_t por separado.
- Encontrando V_{oc} , I_{sc} y R_t por separado (no hay que volver V_{oc} pues ya lo hizo en la parte (b)).

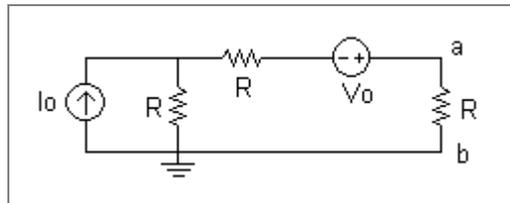
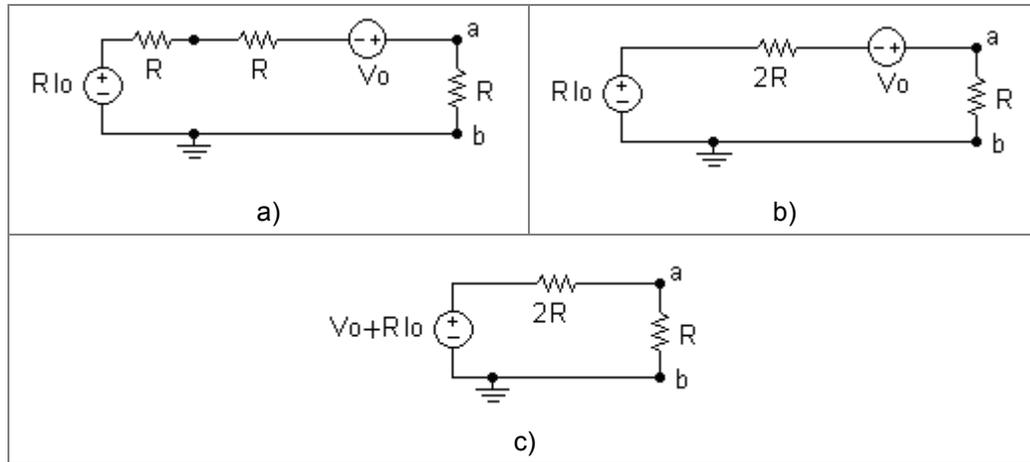


Figura 6-12

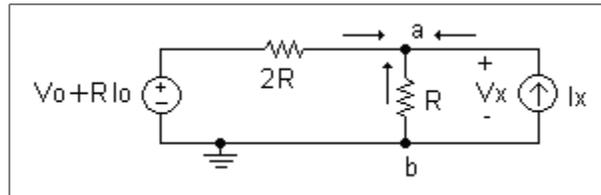
Solución

Para simplificar el circuito usamos transformación de fuentes:



Parte a)

Primero ponemos una fuente de prueba I_x y calculamos V_x en función de I_x .



Hacemos KCL en el nodo a:

$$\frac{(R I_o + V_o) - V_x}{2R} + I_x - \frac{V_x}{R} = 0$$

$$(R I_o + V_o) + 2R I_x - 3V_x = 0$$

$$V_x = \left[\frac{R I_o + V_o}{3} \right] + I_x \left[\frac{2R}{3} \right] = 0$$

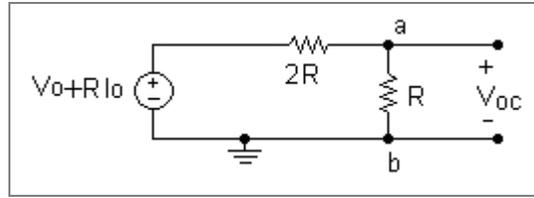
Así que

$$V_t = \left[\frac{R I_o + V_o}{3} \right]$$

$$R_t = \left[\frac{2R}{3} \right]$$

Parte b)

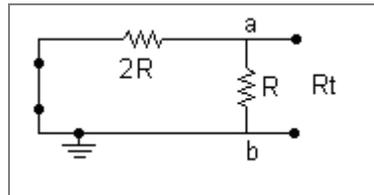
Primero calculamos el voltaje de circuito abierto V_{oc} .



Hacemos divisor de voltaje:

$$V_{oc} = \left(\frac{R}{R + 2R} \right) (RIo + Vo) = \frac{RIo + Vo}{3}$$

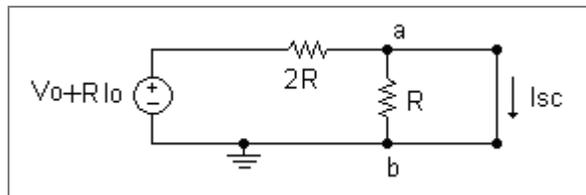
Ahora calculamos R_t apagando fuentes (por lo que no hay fuentes controladas):



$$R_t = \left[\frac{2R \cdot R}{2R + R} \right] = \frac{2R}{3}$$

Parte c)

Primero calculamos la corriente de corto circuito I_{sc} :



$$I_{sc} = \frac{RIo + Vo}{2R}$$

Ahora calculamos R_t a partir de V_{oc} (que ya se calculó) y de I_{sc} :

$$R_t = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} = \frac{\left(\frac{RIo + Vo}{3} \right)}{\left(\frac{RIo + Vo}{2R} \right)} = \frac{2R}{3}$$

Ejemplo 6-2. Equivalente de Thévenin de circuito con fuente controlada.

Para el circuito de la Figura 6-13:

- Calcular el equivalente de Thévenin a la izquierda de los nodos a y b.

- b. Si $R_L = R$, conectar entre los terminales a y b y R_L un circuito para que haya máxima transferencia de potencia por parte del circuito a la izquierda de a y b.
- c. Calcular el equivalente de Norton.

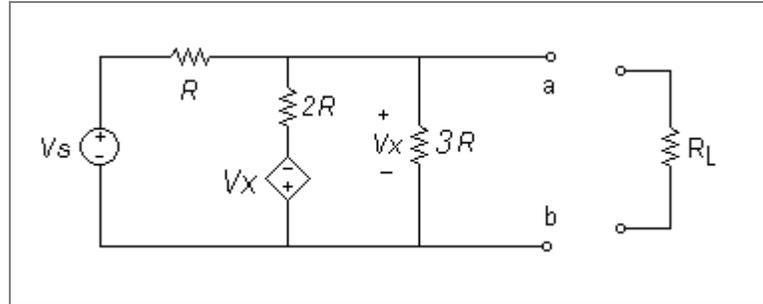


Figura 6-13

Solución**Parte a)**

Colocamos una fuente de prueba para hallar el equivalente Thévenin, en el nodo a notamos que el voltaje es $V_{ab} = V_x$

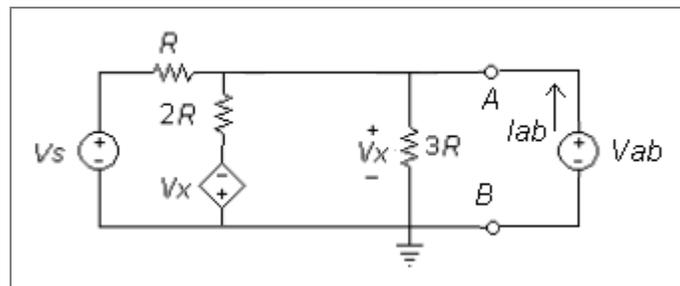


Figura 6-14

$$\left(\frac{V_s - V_x}{R}\right) + \left(\frac{-V_x - V_x}{2R}\right) + \left(\frac{0 - V_x}{3R}\right) + I_{ab} = 0$$

$$\frac{V_s}{R} - \frac{V_x}{R} * \left(1 + 1 + \frac{1}{3}\right) + I_{ab} = 0$$

$$-\frac{7V_x}{3R} = -I_{ab} - \frac{V_s}{R} \Rightarrow V_x = V_{ab} = \frac{3}{7}V_s + \frac{3}{7}R \cdot I_{ab}$$

El equivalente queda

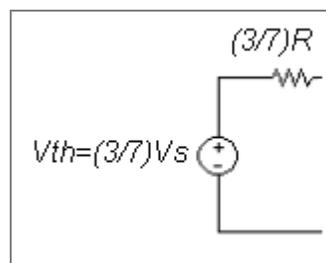
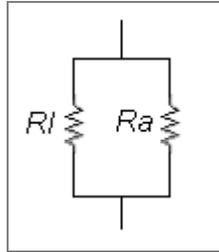


Figura 6-15

Parte b)

Para la condición de Máxima Transferencia de Potencia la resistencia de carga debe ser igual a R Thévenin por lo tanto lo que se hace es poner una resistencia en paralelo a la que ya tenemos de forma que se cumpla la condición.

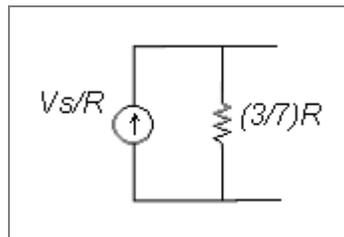
**Figura 6-16**

$$Rl \parallel Ra = \frac{3}{7}R \Rightarrow \frac{Rl * Ra}{Rl + Ra} = \frac{3}{7}R \Rightarrow \frac{R * Ra}{R + Ra} = \frac{3}{7}R \Rightarrow 7Ra = 3R + 3Ra$$

$$Ra = \frac{3}{4}R$$

Parte c)

$$I_n = \frac{V_t}{R_t} = \frac{\frac{3}{7}V_s}{\frac{3}{7}R} = \frac{V_s}{R} \quad R_t = R_n = \frac{3}{7}R$$

**Figura 6-17****Ejemplo 6-3. Equivalente de Thévenin de circuito con amplificadores.**

Para el circuito de la Figura 6-18:

- Calcular el equivalente de Thévenin a la derecha de los nodos cd.
- Conectar el circuito a la derecha de cd al de la izquierda de ab de la Figura 6-17 y calcular el valor de V_k requerido para que haya máxima transferencia de potencia al circuito de la derecha.

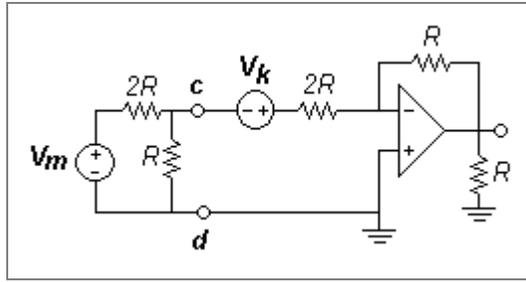


Figura 6-18

Solución

Parte a)

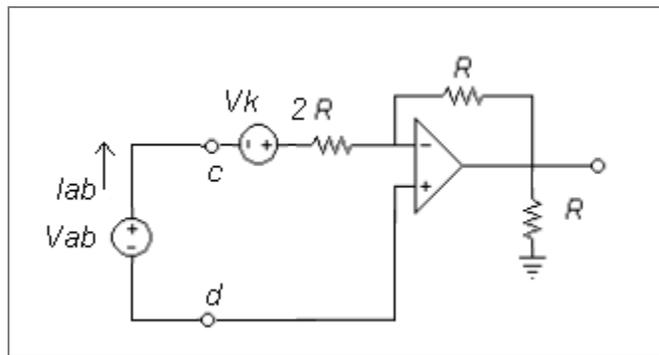


Figura 6-19

$$I_{ab} = \frac{(V_{ab} + V_k)}{2R}$$

$$V_{ab} = -V_k + 2RI_{ab}$$

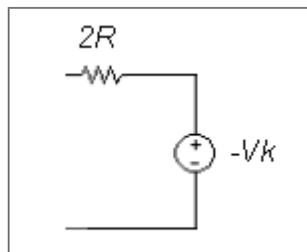


Figura 6-20

Parte b)

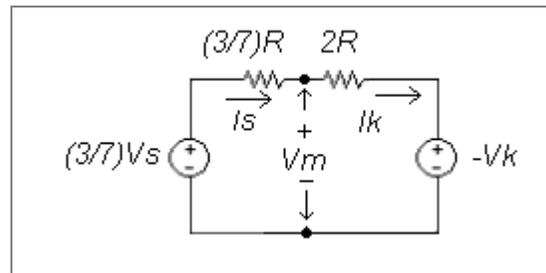


Figura 6-21

Para que halla Máxima Transferencia de Potencia, por parte del circuito de la izquierda se requiere que:

$$V_m = \frac{V_{oc}}{2} = \frac{\frac{3}{7}V_s}{2} = \frac{3}{14}V_s$$

$$I_k = \frac{V_m - (-V_k)}{2R} = \frac{V_m + V_k}{2R} = \frac{\frac{3}{14}V_s + V_k}{2R} = \frac{3V_s}{28R} + \frac{V_k}{2R}$$

$$I_s = \frac{\frac{3}{7}V_s - V_m}{\frac{3}{7}R} = \frac{\frac{3}{7}V_s - \frac{3}{14}V_s}{\frac{3}{7}R} = \frac{V_s}{R} - \frac{V_s}{2R} = \frac{V_s}{2R}$$

$$I_s = I_k$$

$$\frac{3V_s}{28R} + \frac{V_k}{2R} = \frac{V_s}{2R}$$

$$3V_s + 14V_k = 14V_s$$

$$V_k = \frac{14V_s - 3V_s}{14} = \frac{11}{14}V_s$$

Ejemplo 6-4. Thévenin con fuente controlada.

Para el circuito de la siguiente figura calcular el equivalente de Thévenin a la izquierda de los nodos a y b:

- Por el método de fuente de prueba $V_{ab}(I_{ab}) = V_{th} + R_{th} \cdot I_{ab}$.
- Por el método de V_{oc}/i_{sc} .
- Por el método de fuente de prueba V_{oc} y R_{th} (sin calcular I_{sc} -cálculo directo de R_{th}).

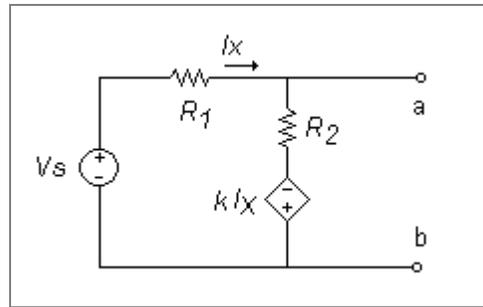


Figura 6-22

Solución

Parte a)

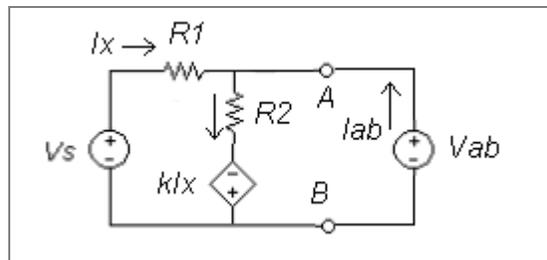


Figura 6-23

$$I_x = \frac{V_s - V_{ab}}{R_1}$$

$$I_x + I_{ab} = I_{R_2} = \frac{V_{ab} + kI_x}{R_2} \Rightarrow R_2 I_x + R_2 I_{ab} = V_{ab} + kI_x$$

$$V_{ab} = (R_2 - k)I_x + R_2 I_{ab} \Rightarrow V_{ab} = (R_2 - k) * \left(\frac{V_s - V_{ab}}{R_1} \right) + R_2 I_{ab}$$

$$\left(1 + \frac{R_2 - k}{R_1} \right) V_{ab} = \left(\frac{R_2 - k}{R_1} \right) V_s + R_2 I_{ab}$$

$$V_{ab} = \left(\frac{R_2 - k}{R_1 + R_2 - k} \right) V_s + \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2 - k} I_{ab}$$

El equivalente queda

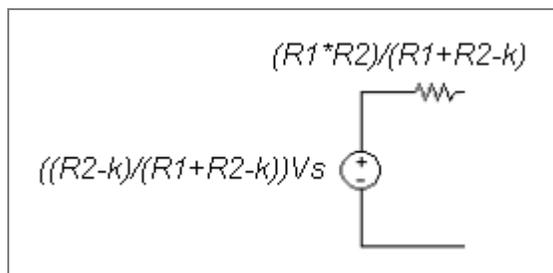
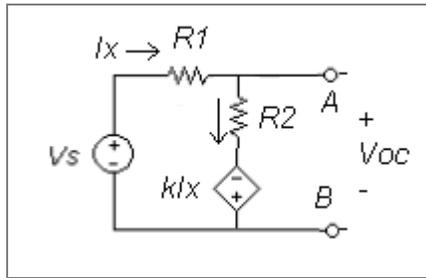


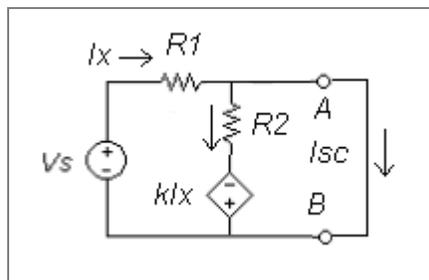
Figura 6-24

Parte b)**Figura 6-25**

$$-V_s + I_x R_1 + I_x R_2 - kI_x = 0$$

$$I_x = \frac{V_s}{R_1 + R_2 - k} \Rightarrow V_{oc} = I_x R_2 - kI_x = \left(\frac{V_s}{R_1 + R_2 - k} \right) R_2 - k \left(\frac{V_s}{R_1 + R_2 - k} \right) = (R_2 - k) \left(\frac{V_s}{R_1 + R_2 - k} \right)$$

$$V_{oc} = \left(\frac{R_2 - k}{R_1 + R_2 - k} \right) V_s$$

**Figura 6-26**

$$I_x = \frac{V_s}{R_1} \quad I_{r2} = \frac{0 + kI_x}{R_2}$$

$$I_x = I_{r2} + I_{sc} \Rightarrow I_{sc} = I_x - I_{r2} = \frac{V_s}{R_1} - \left(k \frac{I_x}{R_2} \right) = \frac{V_s}{R_1} - \frac{kV_s}{R_1 R_2}$$

$$I_{sc} = \left(\frac{R_2 - k}{R_1 R_2} \right) V_s$$

$$R_{th} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} = \frac{\left(\frac{R_2 - k}{R_1 + R_2 - k} \right) V_s}{\left(\frac{R_2 - k}{R_1 R_2} \right) V_s} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 - k}$$

Parte c)

En el anterior punto se halló V_{oc} el cual también se usa en este punto. ahora lo que hacemos es poner otra fuente de prueba y apagar la fuente V_s

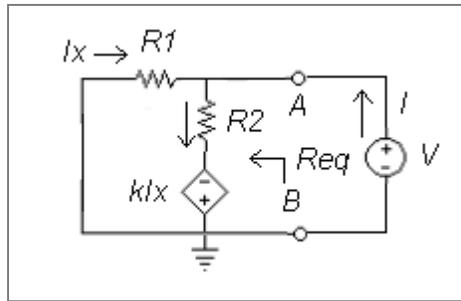


Figura 6-27

$$R_{th} = R_{eq} = \frac{V}{I} \quad I_x = \frac{0 - V}{R1} \quad I_x + I = I_{r2} = \frac{V + kI_x}{R2} = \frac{V}{R2} + \left(\frac{k}{R2} \left(\frac{-V}{R1} \right) \right)$$

$$I = \left(\frac{1}{R2} - \frac{k}{R1R2} \right) V - I_x = \left(\frac{1}{R2} - \frac{k}{R1R2} \right) V - \left(-\frac{V}{R1} \right) V = \left(\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} - \frac{k}{R1R2} \right) V$$

$$R_{th} = \frac{V}{I} = \frac{V}{\left(\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} - \frac{k}{R1R2} \right) V} = \frac{R1R2}{R1 + R2 - k}$$

Ejemplo 6-5. Equivalente de Thévenin con transformador ideal.

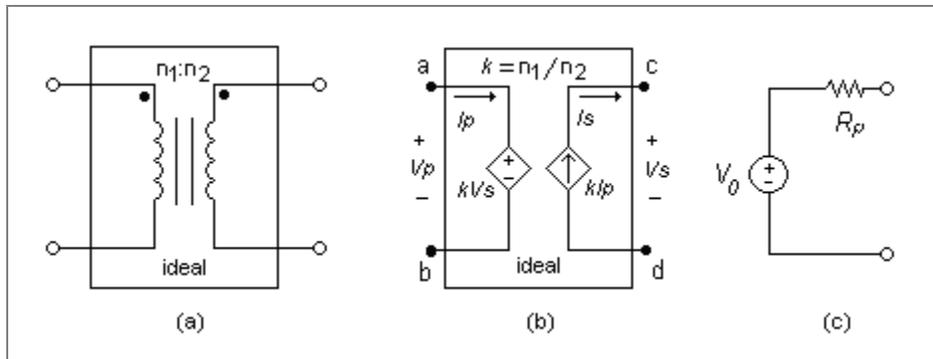


Figura 6-28

El circuito de la (a) es el símbolo del transformador ideal con un número de vueltas n_1 en la bobina primaria (izquierda) y n_2 en la secundaria (derecha).

La Figura 6-28(b) representa un modelo del mismo transformador ideal por medio de fuentes controladas, las cuales relacionan voltaje y corriente entre el lado primario y el lado secundario. Se quiere calcular el equivalente de Thévenin a la salida del secundario al conectar en el primario el circuito de la (c).

Solución

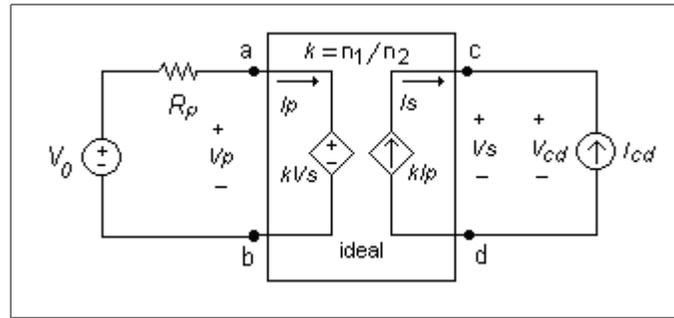


Figura 6-29

Para encontrar el equivalente de Thévenin del circuito desde el secundario (cd) ponemos una fuente de prueba de corriente I_{cd} y calculamos el voltaje V_{cd} en función de dicha corriente:

$$V_{cd}(I_{cd}) = V_{TH} + R_{TH} \cdot I_{cd}$$

KVL en cada malla primaria	Relaciones de I y V en secundario
$-V_0 + R_p I_p + V_p = 0$	
$-V_0 + R_p \left(-\frac{I_{cd}}{k} \right) + kV_s = 0$	$-V_s + V_{cd} = 0$
$-V_0 - \frac{R_p I_{cd}}{k} + kV_{cd} = 0$	$V_{cd} = V_s$
$V_{cd} = \frac{V_0}{k} + \frac{R_p}{k^2} I_{cd}$	$I_{cd} = -I_s$

De lo anterior por comparación con $V_{cd}(I_{cd}) = V_{TH} + R_{TH} \cdot I_{cd}$ se tiene que:

$$V_{Th} = \frac{V_0}{k}$$

$$R_{Th} = \frac{R_p}{k^2}$$

Como se muestra en la Figura 6-30 la resistencia que se ve en la salida del transformador (resistencia vista en el secundario) es igual a la resistencia del lado primario sobre el cuadrado de la relación de vueltas del transformador. Igualmente el voltaje visto desde el secundario es el voltaje aplicado al primario sobre la relación de vueltas.

Este equivalente nos permite realizar cálculos desde el lado secundario olvidándonos de lo que está pasando en el primario, además de que simplifica el circuito pues se reduce la malla del lado primario.

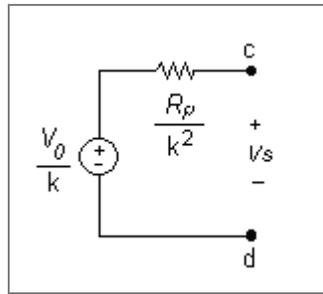


Figura 6-30

Ejemplo 6-6. Equivalente de Thévenin y Máxima transferencia de potencia.

Para el circuito de la Figura 6-31, que tiene el equivalente de Thévenin (V_t , R_t) de algún circuito, calcular el valor de R_o para que exista máxima transferencia de potencia a la carga formada por R_o y V_o .

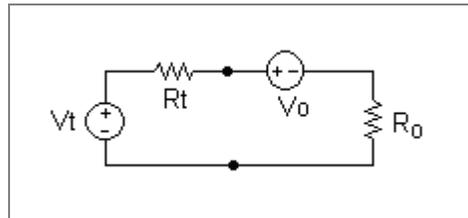
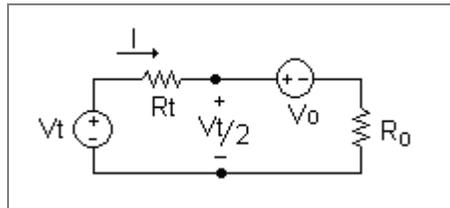


Figura 6-31

Para que exista máxima transferencia de potencia a la carga se requiere que el voltaje sobre ella sea la mitad del voltaje de Thévenin.



$$I = \frac{V_t - V_o}{R_t + R_o}$$

$$\frac{V_t}{2} = V_t - R_t \cdot I = V_t - R_t \cdot \frac{V_t - V_o}{R_t + R_o}$$

$$R_o = R_t \left(1 - \frac{2V_o}{V_t} \right)$$

Ejemplo 6-7. Norton y Máxima transferencia de potencia.

Para el circuito de la Figura 6-32 encontrar:

- a. Equivalente de Norton.

- b. R_L y la potencia respectiva para que exista máxima transferencia de potencia en R_L .
- c. Cambiar por el circuito de la derecha y encontrar el valor de V_A para máxima transferencia de potencia a dicho circuito. Ayuda: recordar que se debe cumplir que $V_A = \frac{V_{oc}}{2}$.

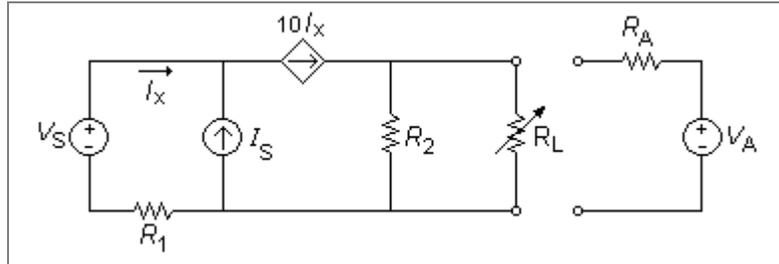


Figura 6-32

Solución

Parte a)

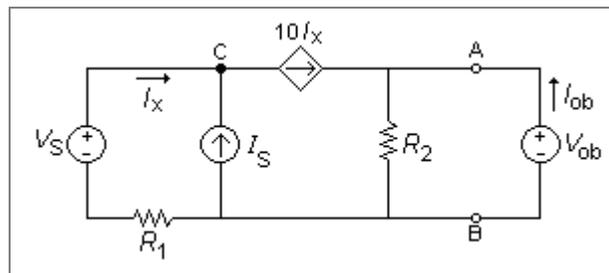


Figura 6-33

Ecuaciones de nodos:

<p>Nodo C:</p>	$I_X + I_S = 10I_X$ $I_S = 9I_X$ $I_X = \frac{I_S}{9}$
<p>Nodo A:</p>	$10I_X + I_{ob} = \frac{V_{ob}}{R_2}$ $V_{ob} = 10R_2 I_X + R_2 I_{ob}$ $V_{ob} = \underbrace{10R_2 \left(\frac{I_S}{9} \right)}_{V_{0C}} + \underbrace{R_2}_{R_T} I_{ob}$

Nodo B:	Tierra
---------	--------

$$V_{0C} = \frac{10}{9} R_2 I_S$$

$$R_T = R_2$$

$$I_{SC} = \frac{V_{0b}}{R_T} = \frac{10}{9} \frac{R_2 I_S}{R_2} = \frac{10}{9} I_S$$

$$\begin{matrix} R_T = R_2 \\ I_{SC} = \frac{10}{9} I_S \end{matrix}$$

El equivalente Norton obtenido se presenta en la Figura 6-34.

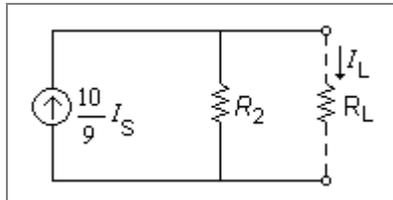


Figura 6-34

Parte b)

Para $P_{\max} \rightarrow R_T = R_L \Rightarrow R_L = R_2$

Si $R_L = R_2 \Rightarrow I_L = \frac{I_{SC}}{2} = \frac{5}{9} I_S$

$$P_{\max} = R_L I_L^2 = R_L I_{SC}^2 = R_L \left(\frac{5}{9} I_S \right)^2 = \frac{25}{81} R_L I_S^2$$

Parte c)

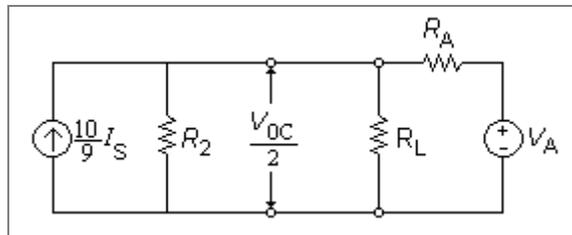


Figura 6-35

$$\begin{aligned} \frac{10}{9} I_S &= \frac{V_{0C}}{2} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_L} \right) + \frac{1}{R_A} \left(\frac{V_{0C}}{2} - V_A \right) \\ \frac{10}{9} I_S &= \frac{V_{0C}}{2} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_L} + \frac{1}{R_A} \right) - \frac{1}{R_A} V_A \\ V_A &= R_A \left[\frac{V_{0C}}{2} \left(\frac{R_A R_L + R_A R_2 + R_2 R_L}{R_A R_L R_2} \right) - \frac{10}{9} I_S \right] \\ &= \frac{V_{0C}}{2} \left(\frac{R_A R_L + R_A R_2 + R_2 R_L}{R_L R_2} \right) - \frac{10}{9} R_A I_S \end{aligned}$$

Reemplazando el valor de V_{0C} :

$$\begin{aligned} V_A &= \frac{10}{9} R_2 I_S \left(\frac{R_A R_L + R_A R_2 + R_2 R_L}{R_L R_2} \right) - \frac{10}{9} R_A I_S \\ &= \frac{5 I_S}{9} \left(\frac{R_A R_L + R_A R_2 + R_2 R_L}{R_L} \right) - \frac{10}{9} R_A I_S \\ &= \frac{5 I_S}{9} \left(\frac{R_A R_L + R_A R_2 + R_2 R_L}{R_L} - 2 R_A \right) \end{aligned}$$

6.10. SIMULACIONES

6.10.1. THÉVENIN, NORTON Y MÁXIMA TRANSFERENCIA DE POTENCIA

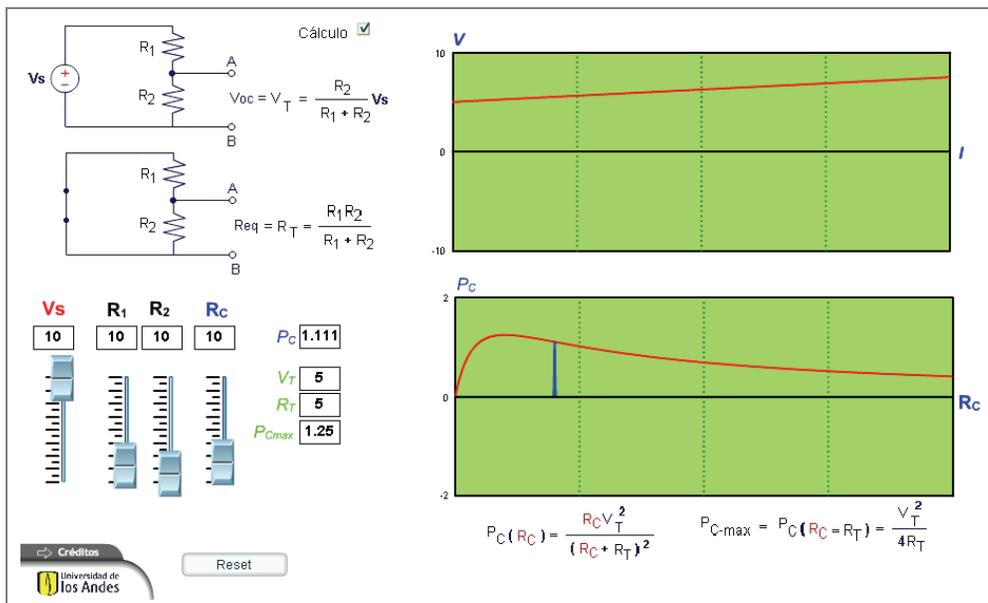


Figura 6-36

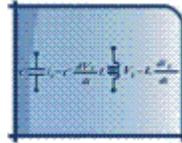
Descripción

Esta simulación permite mostrar el método de cálculo del equivalente de Thévenin para un circuito dado y ver cómo se afecta la potencia suministrada a la resistencia de carga al variar esta última. Así es posible ver cómo la máxima transferencia de potencia ocurre cuando la resistencia de carga es igual a la resistencia de Thévenin.

Uso educativo

Esta simulación se presenta como un complemento a la clase presencial, para estudiantes de primeros semestres de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Mecánica. Una vez los estudiantes manejan los conceptos de potencia absorbida, resistencia equivalente, linealidad y voltaje de circuito abierto, es posible interactuar con la simulación cambiando los valores de las resistencias del circuito y la fuente para obtener su equivalente de Thévenin. Con este equivalente luego se cambia la resistencia de carga R_C para ver sus efectos en la potencia de la carga y encontrar en dónde se produce la máxima transferencia de potencia.

7. CAPACITANCIA E INDUCTANCIA



7.1. INTRODUCCIÓN

El elemento pasivo de dos terminales que hemos visto hasta el momento, esto es la Resistencia, presenta un comportamiento lineal entre su voltaje y corriente. Esto produce ecuaciones algebraicas igualmente lineales. Ahora vamos a estudiar dos elementos para los cuales las relaciones lineales no se dan entre voltaje y corriente sino entre una de estas variables y la derivada de la otra. Esto va a producir ecuaciones diferenciales que serán igualmente lineales. Estos elementos son la capacitancia y la inductancia.

Aunque capacitancia e inductancia son elementos pasivos tienen la propiedad de almacenar energía, y por tanto se dice que pueden tener condiciones iniciales para las variables de voltaje y corriente, esto en función de la energía que tengan almacenada. La capacitancia almacena la energía en un campo eléctrico mientras que la inductancia almacena la energía en un campo magnético.

7.2. CAPACITANCIA

La capacitancia es un elemento pasivo de dos terminales que almacena cargas eléctricas entre un par de placas separadas por un dieléctrico creando una diferencia de potencial entre las dos placas. Esa diferencia de potencial creada por la acumulación de las cargas tiene una relación directa con la energía almacenada por la capacitancia. La Figura 7-1 muestra el símbolo utilizado para representar este elemento y la relación entre voltaje y corriente de acuerdo a la convención pasiva.

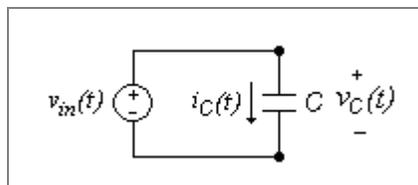


Figura 7-1

Experimentalmente se encontró que la corriente instantánea en la capacitancia es directamente proporcional a la variación del voltaje en el tiempo. La constante de

proporcionalidad de esta relación se conoce como la Capacitancia C , y tiene unidades de Faradios F:

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

La ecuación anterior nos muestra una relación lineal entre la corriente y la derivada del voltaje, tal como mencionamos en la introducción. El valor de la Capacitancia C de cada elemento depende de varios factores, ya que existen distintos tipos de capacitancias, en formas (cuadradas, redondas, cilíndricas) y materiales dieléctricos (aire, poliéster, cerámica, electrolítico, papel). En general los valores de las capacitancias son muy pequeños, como se muestra en la Tabla 7-1.

Tabla 7-1. Aplicaciones de las capacitancias

Uso	Capacitancia
Filtros de señales	Picofaradios (pF)
Reguladores y rectificadores de voltaje	Microfaradios (μ F)
Motores	Milifaradios (mF)

En el caso sencillo de una capacitancia de placas paralelas la capacitancia C está dada por la permitividad del dieléctrico ϵ , el área de las placas A y la distancia entre las placas d :

$$C = \epsilon \frac{A}{d}$$

De la relación entre voltaje y corriente podemos ver que al integrar en ambos lados obtenemos la carga almacenada en la capacitancia en cualquier instante de tiempo:

$$q_C(t) = Cv_C(t)$$

Así mismo podemos calcular el voltaje a partir de la corriente que circula por la capacitancia:

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau$$

Esta ecuación se puede partir en dos integrales: una entre menos infinito y un tiempo t_0 y otra entre t_0 y t . La primera integral representa entonces el voltaje inicial en t_0 (asociado a la carga inicial y a la energía almacenada en la capacitancia en t_0), para lo cual se asume que en menos infinito la carga y el voltaje valen cero pues la capacitancia aún no existía:

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i_C(\tau) d\tau + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C(\tau) d\tau$$

$$v_C(t) = (v_C(t_0) - v_C(-\infty)) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C(\tau) d\tau$$

$$v_C(t) = v_C(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C(\tau) d\tau$$

7.2.1. CONTINUIDAD DEL VOLTAJE Y CAMBIOS BRUSCOS

De la expresión del voltaje en la capacitancia en función de la corriente $v_C(t) = v_C(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C(\tau) d\tau$ vemos que aunque la corriente sea una función discontinua, el voltaje será continuo. Eso implica que la capacitancia se opone a los cambios de voltaje, aún cuando la corriente tenga cambios bruscos.

Por otra parte dado que $i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$ un cambio brusco en el voltaje aplicado a la capacitancia tendrá como efecto una corriente demasiado grande, la cual trata de oponerse al cambio del voltaje para mantener la continuidad del mismo.

7.2.2. POTENCIA Y ENERGÍA EN LA CAPACITANCIA

Recordemos que la potencia instantánea es el producto del voltaje por la corriente en cualquier instante de tiempo. Así la potencia en la capacitancia será:

$$p_C(t) = v_C(t) \cdot i_C(t) = C \cdot v_C(t) \cdot \frac{dv_C(t)}{dt}$$

7.2.3. ENERGÍA INSTANTÁNEA ALMACENADA

La energía instantánea almacenada en un tiempo t , esto es entre el tiempo menos infinito y t será:

$$W_C(t) = \int_{-\infty}^t p_C(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t v_C(\tau) \cdot i_C(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t C \cdot v_C(\tau) \cdot \frac{dv_C(\tau)}{d\tau} d\tau = C \int_{-\infty}^t v_C(\tau) \cdot \frac{dv_C(\tau)}{d\tau} d\tau$$

$$W_C(t) = C \int_{v_C(-\infty)}^{v_C(t)} v_C \cdot dv_C = \frac{1}{2} C \cdot v_C^2 \Big|_{v_C(-\infty)}^{v_C(t)} = \frac{1}{2} C \cdot v_C(t)^2 - \frac{1}{2} C \cdot v_C(-\infty)^2$$

$$\boxed{W_C(t) = \frac{1}{2} C \cdot v_C(t)^2}$$

Aquí hemos asumido nuevamente que en el tiempo menos infinito el voltaje, la carga o la energía almacenada eran cero.

7.2.4. ENERGÍA ALMACENADA EN UN INTERVALO DE TIEMPO

La energía almacenada en un intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ será:

$$W_C(t_0, t_1) = C \int_{v_C(t_0)}^{v_C(t_1)} v_C \cdot dv_C = \frac{1}{2} C \cdot v_C(t)^2 \Big|_{v_C(t_0)}^{v_C(t_1)} = \frac{1}{2} C \cdot [v_C(t_1)^2 - v_C(t_0)^2]$$

$$\boxed{W_C(t_0, t_1) = \frac{1}{2} C \cdot [v_C(t_1)^2 - v_C(t_0)^2]}$$

Como se puede apreciar en la ecuación anterior la energía almacenada en un intervalo de tiempo no depende de lo que pase con el voltaje en ese intervalo de tiempo, sino de los valores inicial y final del voltaje. Esto nos permite encontrar un resultado muy interesante cuando aplicamos un voltaje de tipo AC a una capacitancia en un periodo de tiempo T [t_0, t_0+T]:

$$W_C(t_0, t_0 + T) = \frac{1}{2} C \cdot [v_C(t_0 + T)^2 - v_C(t_0)^2]$$

Como la función AC es periódica tenemos que $v_C(t_0 + T) = v_C(t_0)$, así que:

$$W_C(t_0, t_0 + T) = \frac{1}{2} C \cdot [v_C(t_0 + T)^2 - v_C(t_0)^2] = 0$$

Esto nos muestra que una capacitancia es un elemento pasivo que no tiene pérdidas de potencia: en una parte del ciclo AC absorbe potencia, pero en la otra parte del ciclo la suministra (devuelve la energía que almacenó sin perderla).

7.2.5. RESPUESTA DC Y AC DE LA CAPACITANCIA EN ESTADO ESTABLE

Una capacitancia en estado estable para una señal DC se comporta como un circuito abierto, mientras que para una señal AC de muy alta frecuencia se comporta como un circuito cerrado.

Para el caso de un circuito resistivo cualquiera con una capacitancia es posible aislar la capacitancia y calcular el equivalente de Thévenin de las fuentes y resistencias, obteniendo un circuito serie con una fuente de voltaje V_t , una resistencia R_t y la capacitancia C , como se muestra en la Figura 7-8.

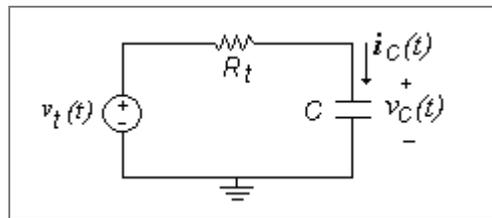


Figura 7-2

Para encontrar la respuesta de este circuito, esto es V_C en función del tipo de señal de entrada formalmente deberíamos resolver la ecuación diferencial resultante, sin embargo como eso es tema del siguiente capítulo, por el momento vamos a ver de manera descriptiva qué pasa con señales de de entrada de tipo DC y señales de muy alta frecuencia.

Para el caso de señal DC las cargas negativas (electrones libres) cercanos al terminal positivo de la fuente se ven atraídas hacia la fuente, generando una corriente i_c positiva en el sentido que se muestra en la Figura 7-8. Al mismo tiempo las cargas que parten del condensador hacia la fuente dejan unos espacios sin cargas negativas, lo cual hace que la placa se cargue de manera positiva, respecto a la carga inicial. Simultáneamente las cargas atraviesan la fuente y se dirigen hacia el terminal negativo de la capacitancia. Como el dieléctrico no permite que pasen cargas de una placa a la otra, las cargas se almacenan en el terminal negativo, aumentando así la carga negativa de dicha placa. Esto crea una diferencia de potencial entre la carga positiva de una placa y la negativa de la otra placa. Esta caída del voltaje que se produce a medida que se van acumulando las cargas, se iguala al voltaje de la fuente V_t , al punto que al ser iguales deja de

circular corriente y se detiene el flujo de cargas. Así, a largo plazo (en estado estable) el condensador queda cargado y con una caída de voltaje dada, pero sin que circule corriente. Por este motivo se dice que la capacitancia se comporta como un circuito abierto para señal DC en estado estable, tal como se muestra en la Figura 7-3.

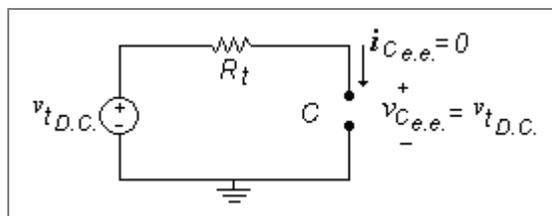


Figura 7-3

Para el caso AC ocurre algo similar, pero ahora la corriente o las cargas van en un sentido primero y en el otro después, de manera alternada. Esto hace que las placas se carguen y se descarguen permanentemente, al punto que nunca se cargan y no se bloquea el paso de corriente como en el caso D.C. Si la frecuencia de la señal A.C. es muy grande las placas permanecerán descargadas, de manera que no se genera una caída del voltaje en ellas, dando como resultado un voltaje de cero en el condensador, como si hubiera un corto circuito. En este caso podrá existir una corriente del condensador no nula.

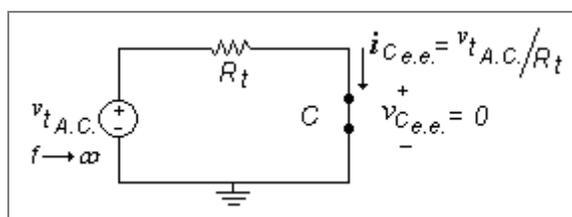


Figura 7-4

7.2.6. CARGA Y DESCARGA DE LA CAPACITANCIA

La Figura 7-3 mostraba el comportamiento de la capacitancia en estado estable ante una señal de tipo D.C., pero ¿qué ocurre si abrimos el circuito en alguna parte en un tiempo t_0 ? La capacitancia no se cargará al máximo posible y el voltaje en ella no será el voltaje de Thévenin V_t . Ahora el valor del voltaje será un valor dado $V_c(t_0)$, y permanecerá en ese valor por tiempo indefinido.

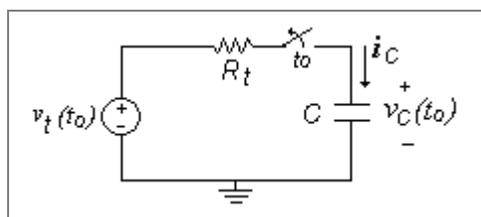


Figura 7-5

Ahora la capacitancia cargada a un valor dado, que genera un voltaje $V_c(t_0)$, la conectamos en un tiempo posterior t_1 a una resistencia R_t como se muestra en la Figura 7-9. Dado que existen cargas almacenadas en la capacitancia y que existe una diferencia de voltaje en la capacitancia, y por tanto en la resistencia, se genera una corriente contraria a la que se tenía en el proceso de carga. Esta corriente al paso por la resistencia disipa la energía que estaba almacenada en la capacitancia

en forma de calor, al punto que no hay más energía almacenada. Como las cargas almacenadas en una placa pasan a la otra, hasta que se igualan, el voltaje en la capacitancia se vuelve cero y deja de circular corriente.

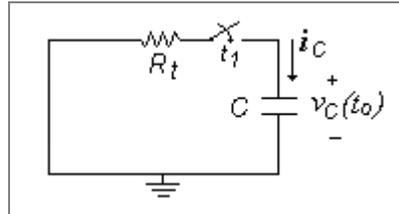


Figura 7-6

Ejemplo 7-1 . Calculo de Thévenin para análisis de capacitancias.

Para el circuito de la Figura 7-7 encontrar:

- El voltaje y la corriente en la capacitancia en estado estable si $v_o(t) = 20V$.
- La amplitud del voltaje en las resistencias si la señal de entrada es de tipo AC con una amplitud de 10V y una frecuencia muy alta ($f \rightarrow \infty$) si $C = 10\text{mF}$ y $R = 1\text{k}\Omega$.

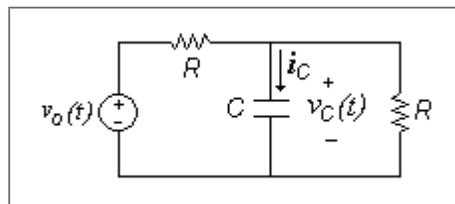
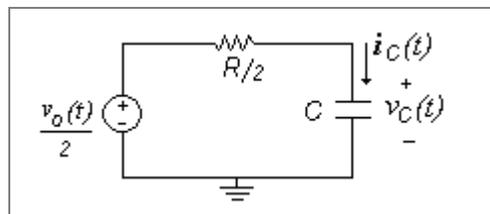


Figura 7-7

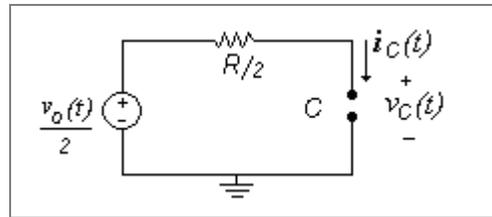
Solución

Parte a)

La siguiente figura muestra el equivalente de Thévenin del circuito resistivo (resistencias y fuente).



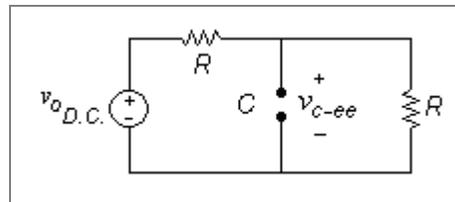
En estado estable la capacitancia se comporta para una señal DC como un circuito abierto.



De manera que el voltaje en la capacitancia será el de la fuente equivalente vista por la capacitancia:

$$v_{C-ee} = \frac{20V}{2} = 10V$$

Otra manera de verlo es utilizar directamente el modelo D.C. en estado estable de la capacitancia y reemplazarlo en el circuito original, tal como se muestra en la siguiente figura:



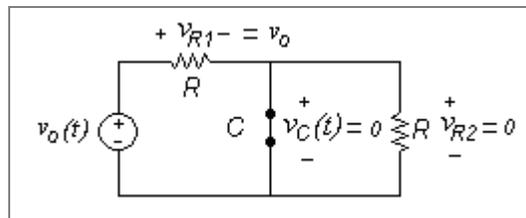
En este caso el voltaje en la capacitancia es el mismo de la resistencia de la derecha, el cual se puede calcular con un divisor de voltaje:

$$v_{C-ee} = v_{o D.C.} \left(\frac{R}{R+R} \right) = 20V \left(\frac{1}{2} \right) = 10V$$

La corriente en la capacitancia en estado estable para señal D.C. será cero pues el circuito está abierto en la capacitancia.

Parte b)

La siguiente figura muestra el comportamiento de corto circuito para la capacitancia ante una señal de alta frecuencia.



En este caso el voltaje del condensador es cero. Por tanto el voltaje de la resistencia de la derecha v_{R2} , que está en paralelo con la capacitancia será 0V y su corriente será 0A, ya que toda la corriente pasa por la capacitancia. De manera que la resistencia superior experimenta toda la caída del voltaje de la fuente y el voltaje en ella tendrá una amplitud de 10V. La amplitud de la corriente en la fuente, la resistencia superior y la capacitancia será: $10V/1k\Omega = 1mA$.

7.2.7. PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA CARGA

En un circuito con varias capacitancias la carga total almacenada en todas las capacitancias se mantiene constante en cualquier instante de tiempo. Esto es válido incluso en circuitos con cambios bruscos o con interruptores. De acuerdo a

KCL la suma de corrientes de que entran a un nodo es igual a cero $\sum_{k=1}^m i_{kn}(t) = 0$,

de manera que si integramos la ecuación de KCL en un nodo tendremos que la suma algebraica de cargas que entran en un nodo también es igual a cero:

$$\sum_{k=1}^m q_{kn}(t) = 0$$

Usando la relación entre carga y voltaje tenemos:

$$\sum_{k=1}^m C_{kn} V_{kn}(t) = 0$$

Como esta expresión es válida para cualquier instante de tiempo, lo será en particular para dos tiempos t_0 y t_1 :

$$\sum_{k=1}^m C_{kn} V_{kn}(t_0) = \sum_{k=1}^m C_{kn} V_{kn}(t_1) = 0$$

En el caso de cálculos de condiciones iniciales en circuitos con cambios bruscos e interruptores es común analizar lo que ocurre un instante de tiempo antes y después de un tiempo dado t_0 . Esto es lo que llamaremos el intervalo entre cero menos y cero más $[t_0^-, t_0^+]$. Así la relación anterior queda:

$$\sum_{k=1}^m C_{kn} V_{kn}(t_0^-) = \sum_{k=1}^m C_{kn} V_{kn}(t_0^+) = 0$$

7.2.8. EQUIVALENTE DE CAPACITANCIAS EN PARALELO

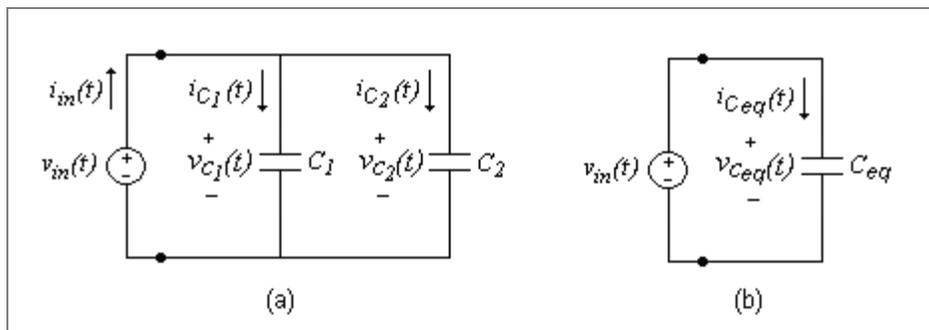


Figura 7-8

La Figura 7-8.a muestra dos capacitancias conectadas en paralelo. En este caso las relaciones entre voltaje y corriente en la fuente de voltaje serán similares a la de una sola capacitancia equivalente como se muestra en la Figura 7-8.b. Para encontrar la capacitancia equivalente C_{eq} usamos el hecho de que los voltajes en

las dos capacitancias y en la fuente son el mismo, por estar en paralelo, además calculamos KCL para la figura a:

$$v_{in}(t) = v_{C_1}(t) = v_{C_2}(t)$$

$$i_{in}(t) = i_{C_1}(t) + i_{C_2}(t)$$

$$i_{in}(t) = C_1 \frac{dv_{C_1}(t)}{dt} + C_2 \frac{dv_{C_2}(t)}{dt} = C_1 \frac{dv_{in}(t)}{dt} + C_2 \frac{dv_{in}(t)}{dt} = (C_1 + C_2) \frac{dv_{in}(t)}{dt}$$

$$i_{in}(t) = (C_1 + C_2) \frac{dv_{in}(t)}{dt}$$

Para la figura b tenemos:

$$i_{in}(t) = C_{eq} \frac{dv_{in}(t)}{dt}$$

Comparando las dos últimas ecuaciones se concluye que la capacitancia equivalente paralelo es:

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

7.2.9. EQUIVALENTE DE CAPACITANCIAS EN SERIE

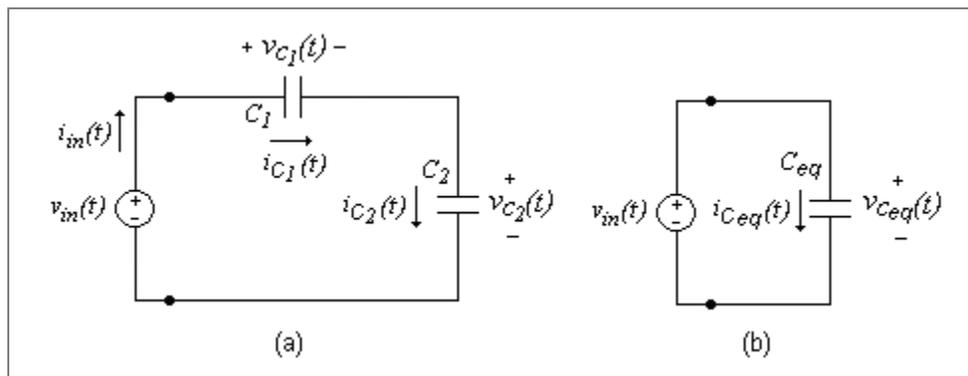


Figura 7-9

La Figura 7-9.a muestra dos capacitancias conectadas en serie. En este caso las relaciones entre voltaje y corriente en la fuente de voltaje serán similares a la de una sola capacitancia equivalente como se muestra en la Figura 7-9.b. Para encontrar la capacitancia equivalente C_{eq} usamos el hecho de que las corrientes en las dos capacitancias y en la fuente son las mismas, por estar en serie, además calculamos KVL para la figura a:

$$i_{in}(t) = i_{C_1}(t) = i_{C_2}(t)$$

$$v_{in}(t) = v_{C_1}(t) + v_{C_2}(t)$$

Derivando la expresión anterior tenemos:

$$\frac{dv_{in}(t)}{dt} = \frac{dv_{C_1}(t)}{dt} + \frac{dv_{C_2}(t)}{dt}$$

Ahora reemplazamos por la relación de la corriente en la capacitancia

$$\frac{i_C(t)}{C} = \frac{dv_C(t)}{dt};$$

$$\frac{dv_{in}(t)}{dt} = \frac{i_{C1}(t)}{C_1} + \frac{i_{C2}(t)}{C_2} = \frac{i_{in}(t)}{C_1} + \frac{i_{in}(t)}{C_2} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) i_{in}(t)$$

$$\frac{dv_{in}(t)}{dt} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) i_{in}(t)$$

Para la figura b tenemos:

$$\frac{i_{in}(t)}{C_{in}} = \frac{dv_{in}(t)}{dt}$$

Comparando las dos últimas ecuaciones se concluye que la capacitancia equivalente paralelo es:

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

7.3. INDUCTANCIA

La Inductancia es un elemento pasivo de dos terminales que almacena energía en un campo magnético. De acuerdo a la ley de Faraday la variación de corriente en el tiempo en un conductor induce una caída de voltaje en el mismo. De acuerdo a las ecuaciones de Maxwell una variación de la corriente en el conductor produce un campo magnético variable, que a su vez produce un campo eléctrico variable y por tanto se genera una caída de voltaje variable en el tiempo.

Una inductancia es un elemento especialmente diseñado para tener un efecto inductivo muy grande. Esto se logra enrollando el conductor alrededor de un núcleo. Su aplicación es muy variada: filtros, generadores, motores, transformadores, antenas, etc.

La Figura 7-10 muestra el símbolo utilizado para representar este elemento y la relación entre voltaje y corriente de acuerdo a la convención pasiva.

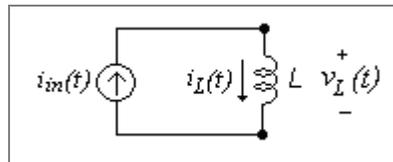


Figura 7-10

Experimentalmente se encontró que el voltaje instantáneo en la inductancia es directamente proporcional a la variación de la corriente en el tiempo. La constante de proporcionalidad de esta relación se conoce como la inductancia L , y tiene unidades de Henrios H:

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

La ecuación anterior nos muestra una relación lineal entre el voltaje y la derivada de la corriente, tal como mencionamos en la introducción. El valor de la inductancia L de cada elemento depende de varios factores, ya que existen distintos tipos de inductancias, en formas (solenoides, tiroides, etc.) y materiales para el núcleo (aire, ferromagnético etc.).

En el caso sencillo de una inductancia en forma de solenoide la inductancia L está dada por la permeabilidad de núcleo μ , el número de vueltas N , el área transversal de cada vuelta A y la longitud l :

$$L = \mu \frac{N^2 A}{l}$$

Así mismo podemos calcular la corriente a partir del voltaje a través de la inductancia:

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v_L(\tau) d\tau$$

Esta ecuación se puede partir en dos integrales: una entre menos infinito y un tiempo t_0 y otra entre t_0 y t . La primera integral representa entonces la corriente inicial en t_0 (asociado a la energía almacenada en la inductancia en t_0), para lo cual se asume que en menos infinito la corriente vale cero pues la inductancia aún no existía:

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_0} v_L(\tau) d\tau + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v_L(\tau) d\tau$$

$$i_L(t) = (i_L(t_0) - i_L(-\infty)) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v_L(\tau) d\tau$$

$$i_L(t) = i_L(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v_L(\tau) d\tau$$

7.3.1. CONTINUIDAD DE LA CORRIENTE Y CAMBIOS BRUSCOS

De la expresión de la corriente en la inductancia en función del voltaje

$$i_L(t) = i_L(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v_L(\tau) d\tau$$

vemos que aunque el voltaje sea una función

discontinua, la corriente será continua. Eso implica que la inductancia se opone a los cambios de corriente, aún cuando el voltaje tenga cambios bruscos.

Por otra parte dado que $v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$ un cambio brusco en la corriente

aplicada a la inductancia tendrá como efecto un voltaje demasiado grande, el cual trata de oponerse al cambio de la corriente para mantener la continuidad de la misma.

7.3.2. POTENCIA Y ENERGÍA EN LA INDUCTANCIA

Recordemos que la potencia instantánea es el producto de la corriente por el voltaje en cualquier instante de tiempo. Así la potencia en la inductancia será:

$$p_L(t) = v_L(t) \cdot i_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \cdot i_L(t)$$

7.3.3. ENERGÍA INSTANTÁNEA ALMACENADA

La energía instantánea almacenada en un tiempo t , esto es entre el tiempo menos infinito y t será:

$$W_L(t) = \int_{-\infty}^t p_L(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t v_L(\tau) \cdot i_L(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t L \frac{di_L(\tau)}{d\tau} \cdot i_L(\tau) d\tau = L \int_{-\infty}^t i_L(\tau) \cdot \frac{di_L(\tau)}{d\tau} d\tau$$

$$W_L(t) = L \int_{i_L(-\infty)}^{i_L(t)} i_L \cdot di_L = \frac{1}{2} L \cdot i_L^2 \Big|_{i_L(-\infty)}^{i_L(t)} = \frac{1}{2} L \cdot i_L(t)^2 - \frac{1}{2} L \cdot i_L(-\infty)^2$$

$$\boxed{W_L(t) = \frac{1}{2} L \cdot i_L(t)^2}$$

Aquí hemos asumido nuevamente que en el tiempo menos infinito la corriente era cero.

7.3.4. ENERGÍA ALMACENADA EN UN INTERVALO DE TIEMPO

La energía almacenada en un intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ será:

$$W_L(t_0, t_1) = L \int_{i_L(t_0)}^{i_L(t_1)} i_L \cdot di_L = \frac{1}{2} L \cdot i_L^2 \Big|_{i_L(t_0)}^{i_L(t_1)} = \frac{1}{2} L \cdot [i_L(t_1)^2 - i_L(t_0)^2]$$

$$\boxed{W_L(t_0, t_1) = \frac{1}{2} L \cdot [i_L(t_1)^2 - i_L(t_0)^2]}$$

Como se puede apreciar en la ecuación anterior la energía almacenada en un intervalo de tiempo no depende de lo que pase con la corriente en ese intervalo de tiempo, sino de los valores inicial y final de la corriente. Esto nos permite encontrar un resultado muy interesante cuando aplicamos una corriente de tipo AC a una inductancia en un periodo de tiempo T $[t_0, t_0+T]$:

$$W_L(t_0, t_0 + T) = \frac{1}{2} L \cdot [i_L(t_0 + T)^2 - i_L(t_0)^2]$$

Como la función AC es periódica tenemos que $i_L(t_0 + T) = i_L(t_0)$, así que:

$$W_L(t_0, t_0 + T) = \frac{1}{2} L \cdot [i_L(t_0 + T)^2 - i_L(t_0)^2] = 0$$

Esto nos muestra que una inductancia es un elemento pasivo que no tiene pérdidas de potencia: en una parte del ciclo AC absorbe potencia, pero en la otra parte del ciclo la suministra (devuelve la energía que almacenó sin perderla).

7.3.5. RESPUESTA DC Y AC DE LA INDUCTANCIA EN ESTADO ESTABLE

Una inductancia en estado estable para una señal DC se comporta como un corto circuito, mientras que para una señal AC de muy alta frecuencia se comporta como un circuito abierto.

Para el caso de un circuito resistivo cualquiera con una inductancia es posible aislar la inductancia y calcular el equivalente de Thévenin de las fuentes y resistencias, obteniendo un circuito serie con una fuente de voltaje V_t , una resistencia R_t y la inductancia L , como se muestra en la Figura 7-11.

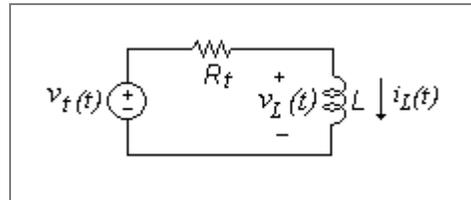


Figura 7-11

Para encontrar la respuesta de este circuito, esto es V_L en función del tipo de señal de entrada formalmente deberíamos resolver la ecuación diferencial resultante, sin embargo como eso es tema del siguiente capítulo. Por el momento vamos a analizar de manera descriptiva qué pasa con señales de de entrada de tipo DC y señales de muy alta frecuencia.

Para el caso de señal DC la derivada de la corriente respecto al tiempo, a largo plazo (estado estable) será cero, de manera que el voltaje en la inductancia es cero, y se comporta como un corto circuito para señal D.C. en estado estable. Esto se debe a que si no hay variaciones de la corriente, tampoco habrá un voltaje inducido. El circuito equivalente se muestra en la Figura 7-12.

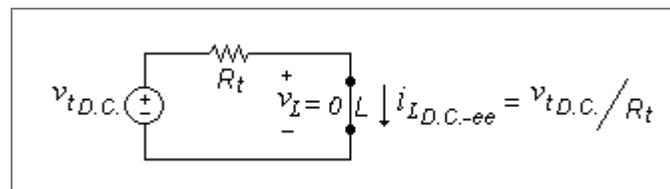


Figura 7-12

Para el caso AC con una frecuencia muy alta (que tiende a infinito) la inductancia se comporta como un circuito abierto, de manera que la corriente se hace cero. El circuito equivalente se muestra en la Figura 7-13.

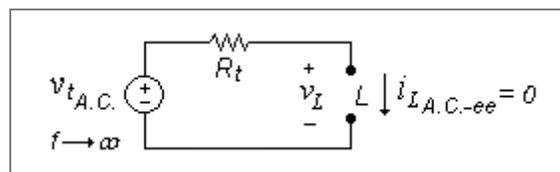


Figura 7-13

7.3.6. EQUIVALENTE DE INDUCTANCIAS EN SERIE

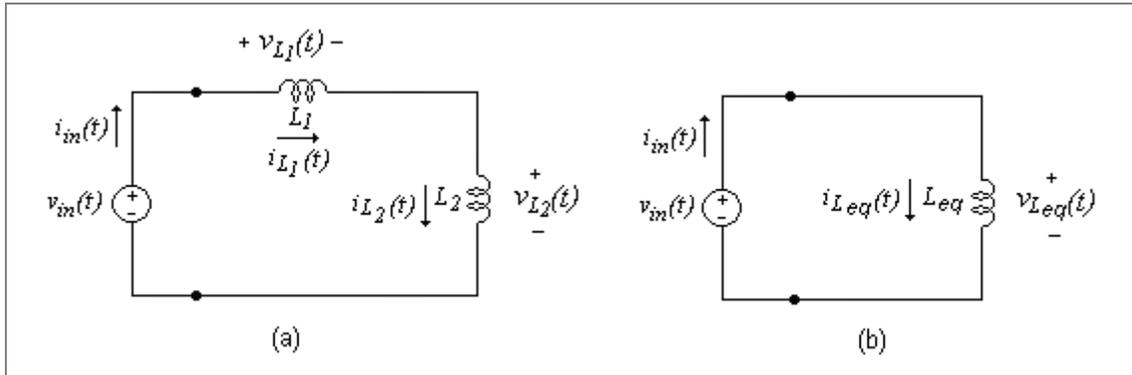


Figura 7-14

La Figura 7-14.a muestra dos Inductancias conectadas en serie. En este caso las relaciones entre voltaje y corriente en la fuente de voltaje serán similares a la de una sola inductancia equivalente como se muestra en la El circuito equivalente se muestra en la Figura 7-14.b. Para encontrar la inductancia equivalente L_{eq} usamos el hecho de que las corrientes en las dos inductancias y en la fuente son la misma, por estar en serie, además calculamos KVL para la figura a:

$$i_{in}(t) = i_{L1}(t) = i_{L2}(t)$$

$$v_{in}(t) = v_{L1}(t) + v_{L2}(t)$$

Ahora reemplazamos por la relación del voltaje en la inductancia $\frac{v_L(t)}{L} = \frac{di_L(t)}{dt}$:

$$v_{in}(t) = L_1 \frac{di_{L1}(t)}{dt} + L_2 \frac{di_{L2}(t)}{dt} = L_1 \frac{di_{in}(t)}{dt} + L_2 \frac{di_{in}(t)}{dt} = (L_1 + L_2) \frac{di_{in}(t)}{dt}$$

$$v_{in}(t) = (L_1 + L_2) \frac{dv_{in}(t)}{dt}$$

Para la figura b tenemos:

$$v_{in}(t) = L_{eq} \frac{di_{in}(t)}{dt}$$

Comparando las dos últimas ecuaciones se concluye que la inductancia equivalente paralelo es:

$$\boxed{L_{eq} = L_1 + L_2}$$

7.3.7. EQUIVALENTE DE INDUCTANCIAS EN PARALELO

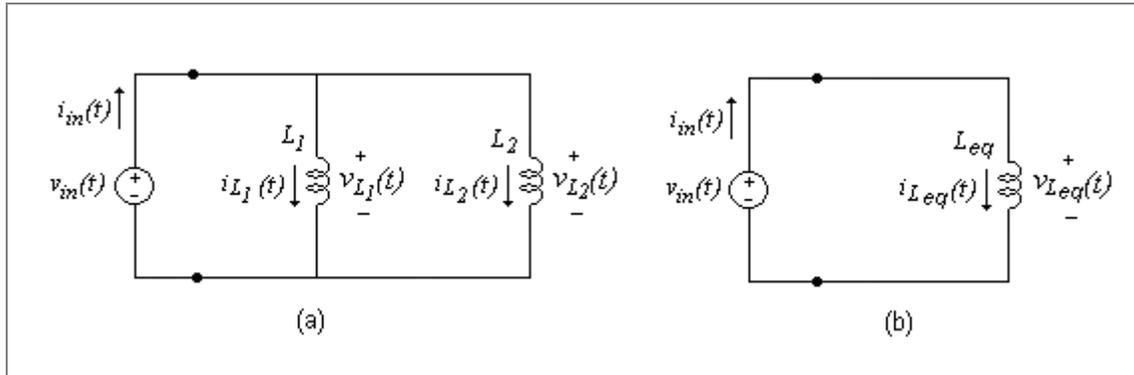


Figura 7-15

La Figura 7-15.a muestra dos Inductancias conectadas en serie. En este caso las relaciones entre voltaje y corriente en la fuente de voltaje serán similares a la de una sola inductancia equivalente como se muestra en la Figura 7-15.b. Para encontrar la inductancia equivalente L_{eq} usamos el hecho de que los voltajes en las dos inductancias y en la fuente son los mismos, por estar en paralelo, además calculamos KCL para la figura a:

$$v_{in}(t) = v_{L1}(t) = v_{L2}(t)$$

$$i_{in}(t) = i_{L1}(t) + i_{L2}(t)$$

Derivando la expresión anterior tenemos:

$$\frac{di_{in}(t)}{dt} = \frac{di_{L1}(t)}{dt} + \frac{di_{L2}(t)}{dt}$$

Ahora reemplazamos por la relación del voltaje en la inductancia $\frac{v_L(t)}{L} = \frac{di_L(t)}{dt}$:

$$\frac{di_{in}(t)}{dt} = \frac{v_{L1}(t)}{L_1} + \frac{v_{L2}(t)}{L_2} = \frac{v_{in}(t)}{L_1} + \frac{v_{in}(t)}{L_2} = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) v_{in}(t)$$

$$\frac{di_{in}(t)}{dt} = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) v_{in}(t)$$

Para la figura b tenemos:

$$\frac{v_{in}(t)}{L_{eq}} = \frac{di_{in}(t)}{dt}$$

Comparando las dos últimas ecuaciones se concluye que la inductancia equivalente paralelo es:

$$\boxed{\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}}$$

Ejemplo 7-2. Circuito Derivador

Para el circuito de la Figura 7-16 encontrar el voltaje a la salida del amplificador:

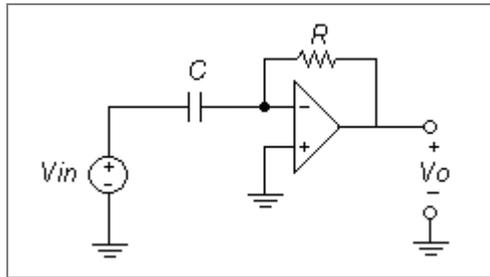


Figura 7-16

Solución

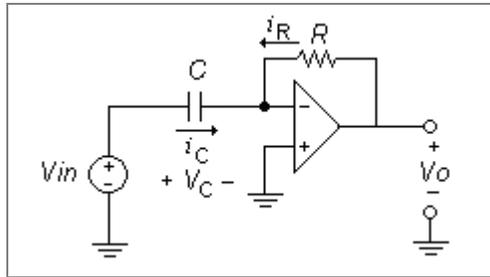


Figura 7-17

La caída de voltaje en la capacitancia es:

$$V_C(t) = V_{in}(t) - V_-(t) = V_{in}(t) - 0 = V_{in}(t)$$

La corriente en el condensador, respetando la convención pasiva de signos, está dada por la siguiente expresión:

$$i_C(t) = C \frac{dV_C(t)}{dt} = C \frac{dV_{in}(t)}{dt}$$

KCL en el nodo inversor nos da:

$$\begin{aligned} i_C(t) + i_R(t) &= 0 \\ -i_C(t) = i_R(t) &= \frac{V_0(t) - 0}{R} \end{aligned}$$

Reemplazando la corriente de la capacitancia:

$$-C \frac{dV_{in}(t)}{dt} = \frac{V_0(t)}{R}$$

$$\boxed{V_0(t) = -RC \frac{dV_{in}(t)}{dt}}$$

Como se puede ver el voltaje en la salida del OPAM es la derivada de la entrada, multiplicada por una ganancia e invertida:

$$V_0(t) = \underbrace{-K}_{\text{Inversor}} \underbrace{\frac{dV_{in}(t)}{dt}}_{\text{Derivador}}$$

Ejemplo 7-3. Circuito integrador

Para el circuito de la Figura 7-18 encontrar el voltaje a la salida del amplificador:

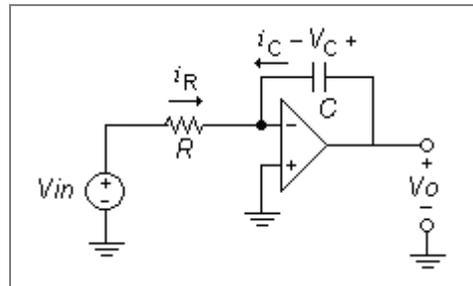


Figura 7-18

El voltaje en la capacitancia es:

$$V_C(t) = V_C(0^+) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\tau) d\tau$$

La corriente en la capacitancia es:

1)	$i_C(t) = -i_R(t) = -\frac{V_{in}(t)}{R}$
2)	$\begin{aligned} V_0(t) &= V_C(t) = V_C(0^+) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\tau) d\tau \\ &= 0 + \frac{1}{C} \int_0^t -i_R(\tau) d\tau \\ &= -\frac{1}{C} \int_0^t \frac{V_{in}(\tau)}{R} d\tau \\ &= -\frac{1}{RC} \int_0^t V_{in}(\tau) d\tau \end{aligned}$

Así que el voltaje de salida en el OPAM es:

$$V_0(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t V_{in}(\tau) d\tau$$

Como se puede ver el voltaje en la salida del OPAM es la integral de la entrada, multiplicada por una ganancia e invertida:

$$V_o(t) = \underbrace{-K}_{\text{Inversor}} \underbrace{\int_0^t V_{in}(\tau) d\tau}_{\text{Integrador}}$$

7.4. SIMULACIONES

7.4.1. CARGA DE UN CONDENSADOR

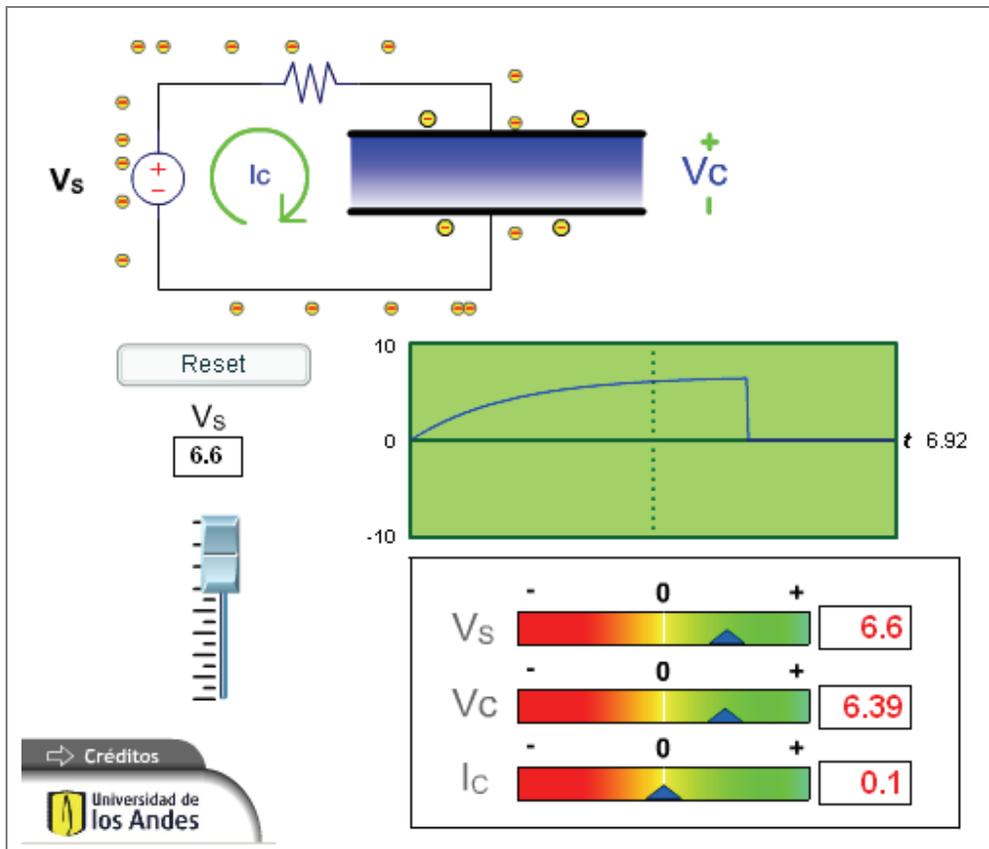


Figura 7-19

Descripción

Esta simulación permite mostrar el comportamiento de un condensador de placas paralelas: la acumulación de cargas que parten de una placa para depositarse en la otra, el campo eléctrico que se origina en él y el comportamiento del condensador en estado estable para una entrada DC.

Uso educativo

Esta simulación se presenta como un complemento a la clase presencial, para estudiantes de primeros semestres de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Mecánica. Una vez los estudiantes manejan los conceptos de capacitancia, carga acumulada, dieléctrico, campo eléctrico pueden interactuar con esta simulación variando el voltaje de la fuente y observando cómo las cargas no pueden atravesar al interior del condensador y se depositan las cargas en el condensador y se crea un campo eléctrico entre sus placas. Se observa que a medida que se acumulan las cargas

se produce una caída de voltaje en el condensador y cómo a largo plazo el condensador de carga y deja de circular corriente por el circuito.

7.4.2. CARGA Y DESCARGA DE UN CONDENSADOR CON CONDICIONES INICIALES

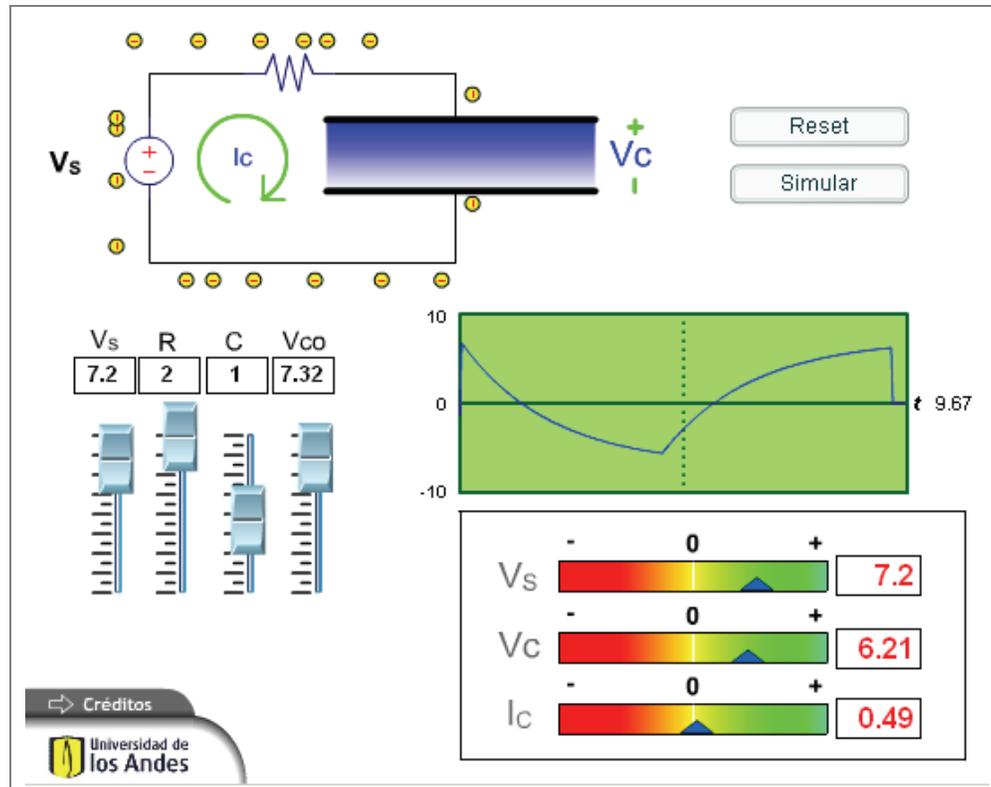


Figura 7-20

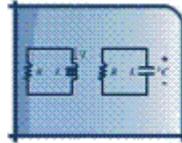
Descripción

Esta simulación permite mostrar el comportamiento de un condensador de placas paralelas: la acumulación de cargas que parten de una placa para depositarse en la otra tanto en el proceso de carga como en el de descarga para unas condiciones iniciales dadas, con o sin fuente.

Uso educativo

Esta simulación se presenta como un complemento a la clase presencial, para estudiantes de primeros semestres de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Mecánica. Una vez los estudiantes manejan los conceptos de capacitancia, carga acumulada, energía acumulada, dieléctrico, campo eléctrico pueden interactuar con esta simulación variando el voltaje de la fuente, el voltaje inicial en el condensador producido por la carga almacenada y observar cómo cambian las corrientes en los procesos de carga y descarga y cómo afecta la respuesta del circuito el hecho de que exista un voltaje inicial positivo o negativo.

8. CIRCUITOS DE PRIMER ORDEN RL Y RC



8.1. INTRODUCCIÓN

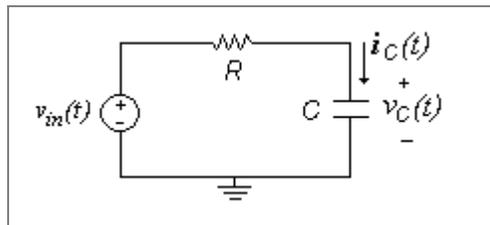


Figura 8-1

La Figura 8-1 muestra un circuito típico RC en serie en el cual, como se verá a continuación, las ecuaciones para este circuito son ecuaciones diferenciales de primer orden, por lo cual a este tipo de circuitos se les denomina también *circuitos de primer orden*. Esto obedece al hecho de que la corriente en una capacitancia está relacionada con su voltaje por la expresión $i_C(t) = C \cdot dv_C(t) / dt$. Lo mismo ocurre con el caso de una inductancia en la cual se tiene que $v_L(t) = L \cdot di_L(t) / dt$.

Los cálculos realizados en este capítulo para capacitancias son similares para el caso de las inductancias, por lo cual se dejan al estudiante como ejercicio. Lo mismo podemos decir en el caso de conexiones RC en paralelo.

8.2. ECUACIÓN DIFERENCIAL DE UN CIRCUITO SERIE RC

Vamos a encontrar la ecuación diferencial del voltaje de la capacitancia del circuito de la Figura 8-1. Teniendo en cuenta que la corriente por la resistencia y la capacitancia son iguales $i_R = i_C$ y que $i_C(t) = C \cdot dv_C(t) / dt$, la aplicación de KVL para el circuito nos da:

$$v_{in}(t) = i_R \cdot R + v_C(t) = i_C \cdot R + v_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \cdot R + v_C(t)$$

$$RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_m(t)$$

$$\boxed{\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_c(t) = \frac{1}{RC} v_m(t)}$$

Para resolver este tipo de ecuaciones diferenciales es necesario conocer algunas condiciones iniciales del sistema. En el caso del voltaje en la capacitancia se debe conocer el valor del voltaje $v_c(t_0)$ en la capacitancia para un tiempo dado t_0 :

$$v_c(t_0) = v_{C0}$$

Dado que este tipo de sistemas se ve afectado por las condiciones iniciales antes y después de la estimulación del sistema en t_0 , es indispensable conocer las condiciones en t_0^- y t_0^+ , en donde el signo (-) aplica al instante de tiempo antes de la estimulación y el signo (+) al instante de tiempo después de la estimulación.

Como sabemos que una capacitancia se opone a los cambios de voltaje en ella, por cual el voltaje es continuo. De manera que se debe tener que:

$$v_c(t_0^+) = v_c(t_0^-) = v_{C0}$$

mientras que lo mismo no es necesariamente válido para la corriente, que suele ser discontinua.

8.3. OPERADOR D

El operador D es una transformación de las ecuaciones diferenciales en el tiempo a un espacio en este operador. Esta transformación se hace con esta relación:

$$D = \frac{d}{dt}$$

El operador D tiene varias aplicaciones:

- Permite simplificar las ecuaciones diferenciales y facilita su cálculo.
- Permite expresar las relaciones entre voltaje y corriente en inductancias y capacitancias por una impedancia equivalente $Z(D)$ como lo muestra la Tabla 8-1. Con estos valores es posible reemplazar el circuito original por un modelo de impedancias sobre el cual se pueden calcular todas las variables deseadas en términos del operador D de la misma forma que se realizaba para circuitos puramente resistivos, y de allí pasar a la ecuación diferencial en el tiempo.
- Permite calcular impedancias equivalentes (con múltiples resistencias, inductancias y capacitancias) a partir del cálculo de impedancias equivalentes serie, paralelo o de conversiones delta-estrella.
- Permite calcular impedancias de entrada a partir de la relación de voltaje sobre corriente en términos del operador $Z_{in}(D) = V_{in}(D) / I_{in}(D)$.
- Permite calcular funciones de transferencia $H(D)$ en términos del operador. Estas funciones de transferencia son relación de tipo entrada/salida de cualquier par de variables de voltaje y/o corriente entre cualquier parte del circuito (las dos variables definidas en un mismo elemento o en elementos diferentes).

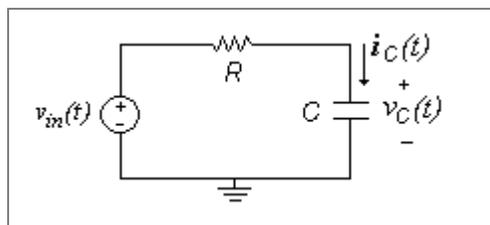
Tabla 8-1.

Elemento	Relación v-i en el tiempo	Relación v-i con operador D	Impedancia
Inductancia	$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$	$\frac{v_L}{i_L} = LD$	$Z_L = LD$
Capacitancia	$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$	$\frac{v_C}{i_C} = \frac{1}{CD}$	$Z_C = \frac{1}{CD}$
Resistencia	$v_R(t) = R \cdot i_R(t)$	$\frac{v_R}{i_R} = R$	$Z_R = R$

Ejemplo 8-1. Ecuación diferencial a partir de circuito en impedancias.

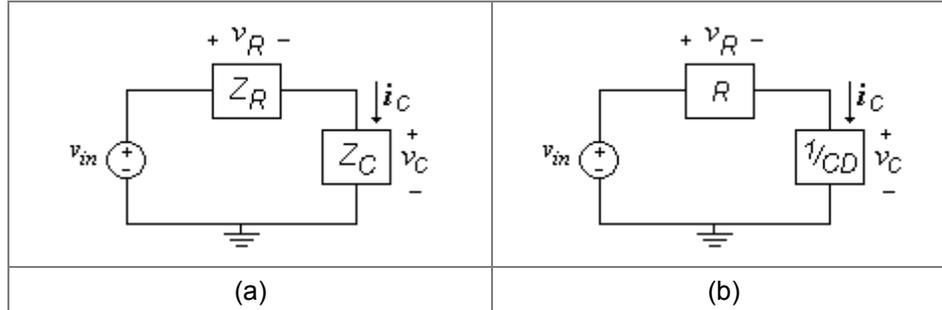
Para el circuito RC de la Figura 8-2 encontrar:

- El modelo de circuito con impedancias.
- La ecuación diferencial del voltaje en la capacitancia.
- La ecuación diferencial de la corriente en la capacitancia.
- La ecuación diferencial del voltaje en la resistencia.
- La ecuación diferencial para el voltaje en la capacitancia si a esta se le conecta una resistencia en paralelo de valor R.
- La impedancia de entrada vista por la fuente de voltaje y el circuito equivalente.
- La función de transferencia entre el voltaje en la capacitancia y el voltaje de la fuente.

**Figura 8-2**

Solución**Parte a)**

La Figura 8-3 muestra cómo se ha reemplazado cada elemento del circuito original con sus respectivas impedancias en función del operador D : $Z_R = R$ y $Z_C = \frac{1}{CD}$.

**Figura 8-3****Parte b)**

Ahora el cálculo del voltaje de la capacitancia se hace como si fuera un circuito resistivo, pero en términos de las impedancias. En este caso es fácil utilizar un divisor de voltaje:

$$v_C = v_{in} \left(\frac{Z_C}{Z_C + Z_R} \right)$$

$$v_C = v_{in} \left(\frac{\frac{1}{CD}}{\frac{1}{CD} + R} \right) = v_{in} \left(\frac{1}{1 + RCD} \right) = v_{in} \left(\frac{1/RC}{D + 1/RC} \right)$$

Aquí ya tenemos dos maneras de expresar el voltaje de la capacitancia en función del operador D y de la fuente de voltaje. Para encontrar la ecuación diferencial en términos de D simplemente pasamos el denominador a multiplicar a v_C :

$$\left(D + \frac{1}{RC} \right) v_C = \frac{1}{RC} v_{in}$$

Ahora podemos pasar a la forma normal de la ecuación diferencial en el tiempo. Primero multiplicamos cada término por v_C :

$$Dv_C + \frac{1}{RC} v_C = \frac{1}{RC} v_{in}$$

Y luego reemplazamos el operador $D = \frac{d}{dt}$:

$$\boxed{\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_C(t) = \frac{1}{RC} v_{in}(t)}$$

Esta es la misma ecuación diferencial que encontramos al inicio del capítulo de la forma tradicional.

Parte c)

Nuevamente usamos la Figura 8-2(b) para encontrar la corriente en la capacitancia en términos del operador D y luego pasamos a la expresión en el tiempo.

Dado que es un circuito de una sola malla es fácil aplicar KVL:

$$-v_{in} + v_R + v_C = 0$$

$$-v_{in} + i_R \cdot Z_R + i_C \cdot Z_C = 0$$

Como la corriente en la resistencia es la misma que en la capacitancia (están en serie):

$$-v_{in} + i_C \cdot Z_R + i_C \cdot Z_C = 0$$

$$-v_{in} + i_C \cdot (Z_R + Z_C) = 0$$

$$i_C = \frac{v_{in}}{(Z_R + Z_C)}$$

Ahora reemplazamos los valores de las impedancias:

$$i_C = \frac{v_{in}}{\left(R + \frac{1}{CD}\right)} = \frac{CDv_{in}}{(RCD + 1)}$$

$$(RCD + 1)i_C = CDv_{in}$$

$$\left(D + \frac{1}{RC}\right)i_C = \frac{1}{R}Dv_{in}$$

Y luego reemplazamos el operador $D = \frac{d}{dt}$:

$$\boxed{\frac{di_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC}i_C(t) = \frac{1}{R} \cdot \frac{dv_{in}(t)}{dt}}$$

Como se puede ver esta ecuación tiene la misma forma de la ecuación diferencial para el voltaje de la capacitancia, pero en este caso la fuente de voltaje está derivada respecto al tiempo.

Parte d)

Nuevamente hacemos uso del divisor de voltaje con las impedancias:

$$v_R = \left(\frac{Z_R}{Z_C + Z_R}\right)v_{in}$$

$$v_R = \left(\frac{R}{\frac{1}{CD} + R} \right) v_{in} = \left(\frac{RCD}{1 + RCD} \right) v_{in}$$

$$(1 + RCD)v_R = RCDv_{in}$$

$$\left(D + \frac{1}{RC} \right) v_R = Dv_{in}$$

Finalmente reemplazamos el operador $D = \frac{d}{dt}$:

$$\boxed{\frac{dv_R(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_R(t) = \frac{dv_{in}(t)}{dt}}$$

En los tres casos vemos que la parte de la izquierda de cada ecuación diferencial, que corresponde a la parte homogénea de la ecuación, siempre tiene la forma

$\left(D + \frac{1}{RC} \right)$, y que lo que cambia es la parte de la particular o forzada.

Parte e)

Primero conectamos la resistencia en paralelo como lo muestra la Figura 8-4(a) y luego calculamos el equivalente de Thévenin. Esto nos permite usar la misma forma de la ecuación encontrada en la parte (a) $\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_C(t) = \frac{1}{RC}v_{in}(t)$ para un circuito con la misma forma.

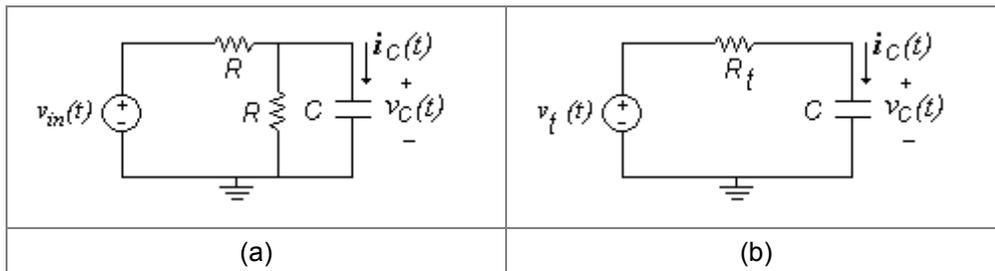


Figura 8-4

$$v_t(t) = v_{in}(t) \frac{R}{R + R} = \frac{v_{in}(t)}{2}$$

$$R_t = \frac{R}{2}$$

La ecuación para el circuito de la Figura 8-4(b) será:

$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{R_t C} v_C(t) = \frac{1}{R_t C} v_t(t)$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{\left(\frac{R}{2}\right)C} v_c(t) = \frac{1}{\left(\frac{R}{2}\right)C} \left(\frac{v_{in}(t)}{2}\right)$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{2}{RC} v_c(t) = \frac{1}{RC} v_i(t)$$

En términos del operador D la ecuación característica sería:

$$\left(D + \frac{2}{RC}\right)$$

Lo que representará un cambio en la raíz de la ecuación y por tanto una constante de tiempo menor, como lo veremos más adelante.

Parte f)

Nuevamente usamos la Figura 8-3. La impedancia vista por la fuente será la suma de las dos impedancias (resistencia y capacitancia) en serie:

$$Z_{in} = Z_C + Z_R$$

$$Z_{in}(D) = \frac{1}{CD} + R = \frac{1 + RCD}{CD}$$

$$Z_{in}(D) = \frac{1 + RCD}{CD}$$

El circuito equivalente se muestra en la Figura 8-6.

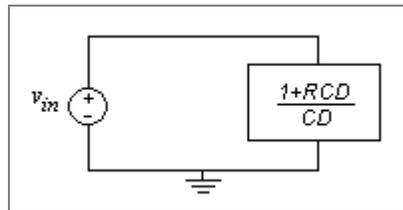


Figura 8-5

Parte g)

La función de transferencia \$H(D)\$ será:

$$H(D) = \frac{v_c(D)}{v_{in}(D)} = \frac{v_{in} \left(\frac{Z_C}{Z_C + Z_R} \right)}{v_{in}} = \frac{Z_C}{Z_C + Z_R} = \left(\frac{\frac{1}{CD}}{\frac{1}{CD} + R} \right)$$

$$H(D) = \frac{v_c(D)}{v_{in}(D)} = \frac{1}{1 + RCD}$$

8.4. TIPOS DE RESPUESTAS DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Los tipos de respuestas que podemos tener en el circuito dependen del análisis particular que se quiera del circuito: condiciones iniciales, fuentes de entrada, o intervalo de tiempo de interés. De acuerdo a esto tenemos los siguientes tipos de respuesta:

Entrada Cero

Corresponde a la respuesta del circuito cuando no hay fuentes de entrada, pero el circuito tiene energía almacenada en las capacitancias o inductancias, por lo cual las condiciones de voltajes y corrientes en las mismas pueden ser distintas de cero. También se suele llamar respuesta Natural. Corresponde a la solución de la ecuación diferencial homogénea (sin entrada).

Estado Cero

Corresponde a la respuesta del circuito cuando hay condiciones iniciales nulas (voltajes y corrientes en inductancias y capacitancias iguales a cero). La respuesta depende entonces exclusivamente de las fuentes y la forma particular que tengan dichas fuentes. Esto se conoce también como la respuesta Forzada o Particular. Corresponde a la solución de la ecuación diferencial para la señal de entrada con condiciones iniciales en cero.

Completa

Corresponde a la respuesta total del circuito con fuentes y condiciones iniciales dadas. Dado que el circuito es lineal se puede calcular la respuesta a fuentes y sumarla a la respuesta a condiciones iniciales para obtener la respuesta completa. El cálculo de las constantes indeterminadas de la parte homogénea (en caso de resolverlo por este método) se debe realizar luego de calcular la respuesta particular y luego de sumar la solución homogénea a la particular.

Estado Estable

Corresponde a la respuesta total del circuito con fuentes y condiciones iniciales dadas, pero en un tiempo suficientemente grande para que el circuito se encuentre en estado estable, de forma que la respuesta de entrada cero (condiciones iniciales) haya desaparecido y que los elementos del circuito estén siguiendo el comportamiento de las fuentes.

Transitoria

Corresponde a la respuesta total del circuito con fuentes y condiciones iniciales en un lapso de tiempo en el cual el circuito no ha alcanzado el estado estable.

8.5. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN

8.5.1. MÉTODO DE INTEGRACIÓN

Retomemos la ecuación diferencial encontrada para el circuito de la Figura 8-1.

$$\frac{dv_C(t)}{dt} - \lambda v_C(t) = \frac{1}{RC} v_{in}(t)$$

y hagamos los siguientes cambios de variables:

$$\frac{1}{RC} v_{in}(t) = f(t)$$

y

$$v_C(t) = x(t)$$

de manera que la ecuación toma la forma general:

$$\frac{dx(t)}{dt} - \lambda x(t) = f(t)$$

con la condición inicial:

$$x(t_0^+) = x(t_0^-) = x_0$$

En la ecuación resultante se pueden ver dos componentes, uno que depende de la topología del circuito y otra de las fuentes:

$$\underbrace{\frac{dx(t)}{dt} - \lambda x(t)}_{\text{topología}} = \underbrace{f(t)}_{\text{fuentes}}$$

Esta ecuación tiene la siguiente solución para $t > t_0$:

$$x(t) = x_0 e^{\lambda(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{\lambda(t-\alpha)} f(\alpha) d\alpha$$

La primera parte de la solución depende de la topología del circuito (por λ) y de la condición inicial en t_0 (por x_0) pero no de la fuente, mientras que la segunda parte depende principalmente de las fuentes (por $f(t)$).

Esta solución será válida para cualquier función de entrada $f(t)$, o lo que es equivalente a decir para cualquier fuente $v_{in}(t)$.

8.5.2. MÉTODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS

Dada la ecuación diferencial de forma general:

$$\frac{dx(t)}{dt} - \lambda x(t) = f(t)$$

con la condición inicial $x(t_0^+) = x(t_0^-) = x_0$, la solución se puede encontrar separando la posible solución en dos partes: solución natural y solución particular de manera independiente:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

Para la solución particular se asume que no tenemos condiciones iniciales (pues la solución particular debe ser válida siempre) y que la solución tendrá una forma similar a la de la función de entrada con unas constantes indeterminadas y se reemplaza en la ecuación original:

$$\frac{dx_p(t)}{dt} - \lambda x_p(t) = f(t)$$

Se realiza la derivada y de allí se encuentran las constantes indeterminadas de la solución particular. Algunos de los valores posibles de $x_p(t)$ en función de $f(t)$ se muestran en la Tabla 8-2.

Tabla 8-2.

$f(t)$	$x_p(t)$	Constantes indeterminadas
β	K	K
$\beta \cdot e^{\sigma t}$	$K \cdot e^{\sigma t}$	K
$\beta \cdot \cos(\omega t + \theta)$	$K \cdot \cos(\omega t + \phi)$	K y ϕ
$\beta \cdot e^{\sigma t} \cdot \cos(\omega t + \theta)$	$K \cdot e^{\sigma t} \cdot \cos(\omega t + \phi)$	K y ϕ

Para encontrar la solución homogénea (con $f(t) = 0$) tenemos:

$$\frac{dx_h(t)}{dt} - \lambda x_h(t) = 0$$

$$\frac{dx_h(t)}{dt} = \lambda x_h(t)$$

En esta forma vemos que $x_h(t)$ es una función tal que su derivada es igual a sí misma multiplicada por una constante. Este es justamente el comportamiento de una función exponencial. De manera que asumimos que $x_h(t)$ tiene la siguiente forma:

$$x_h(t) = K \cdot e^{\alpha t}$$

Aquí tenemos dos constantes indeterminadas: K y α . Ahora reemplazamos en la ecuación diferencial:

$$\frac{dx_h(t)}{dt} - \lambda x_h(t) = 0$$

$$\frac{d(K \cdot e^{\alpha t})}{dt} - \lambda K \cdot e^{\alpha t} = 0$$

$$\alpha K \cdot e^{\alpha t} - \lambda K \cdot e^{\alpha t} = 0$$

$$\alpha - \lambda = 0$$

Esta última ecuación corresponde a la ecuación característica de la ecuación diferencial, la cual está dada por los coeficientes de cada derivada.

Finalmente tenemos que

$$\alpha = \lambda$$

Esto implica que para que $x_h(t) = K \cdot e^{\alpha t}$ sea solución homogénea se requiere que $\alpha = \lambda$, así que la respuesta homogénea será:

$$x_h(t) = K \cdot e^{\lambda t}$$

Hasta aquí tenemos la primera constante indeterminada α . Ahora falta calcular K . Para eso debemos sumar la solución homogénea y la particular y evaluar las condiciones iniciales.

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = K \cdot e^{\lambda t} + x_p(t)$$

$$x(t_0) = x_h(t_0) + x_p(t_0) = K \cdot e^{\lambda t_0} + x_p(t_0) = x_0$$

Así que

$$K = \frac{x_0 - x_p(t_0)}{e^{\lambda t_0}} = [x_0 - x_p(t_0)] \cdot e^{-\lambda t_0}$$

Reemplazando K tenemos:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = [x_0 - x_p(t_0)] \cdot e^{-\lambda t_0} \cdot e^{\lambda t} + x_p(t)$$

$$\boxed{x(t) = [x_0 - x_p(t_0)] \cdot e^{\lambda(t-t_0)} + x_p(t)}$$

Ejemplo 8-2. Respuesta de Entrada Cero para el voltaje de la capacitancia.

Para el circuito RC de la Figura 8-2 encontrar:

- La ecuación diferencial del voltaje en la capacitancia.
- La solución de la ecuación diferencial si $V_C(t_0) = V_{C0}$.

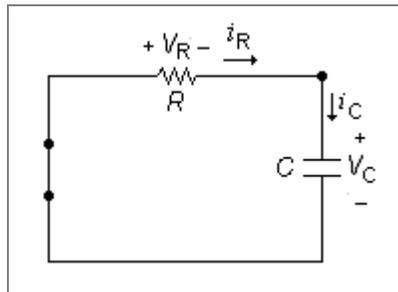


Figura 8-6

Solución**Parte a)**

Ecuaciones que describen el circuito

Nodo:	$i_R = i_C = C \frac{dV_C}{dt}$
Malla:	$V_R + V_C = 0$ $Ri_R + V_C = 0$

Con las anteriores ecuaciones se puede encontrar una ecuación diferencial para $V_C(t)$:

$$RC \frac{dV_C}{dt} + V_C = 0$$

$$\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{RC} V_C = 0$$

Otra manera de encontrar la ecuación diferencial es remitirse al circuito de Figura 8-1. haciendo que el voltaje de entrada v_{in} sea cero, de manera que tenemos:

$$\frac{dV_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC} V_C(t) = \frac{1}{RC} V_{in}(t) = \frac{1}{RC} (0) = 0$$

$$\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{RC} V_C = 0$$

Parte b)

Haciendo una comparación de la ecuación diferencial encontrada con la forma general de la ecuación diferencial $\frac{dx(t)}{dt} - \lambda x(t) = f(t)$, se puede ver que

$$f(t) = 0 \text{ y } \lambda = -\frac{1}{RC} \text{ y } \tau = RC.$$

De tal forma que la solución para el voltaje del condensador es:

$$\begin{aligned} V_C(t) &= e^{\lambda(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\lambda(t-\tau)} f(\tau) d\tau \\ &= V_{C0} e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)} + \int_{t_0}^t 0 d\tau \end{aligned}$$

$$V_C(t > t_0) = V_{C0} e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}$$

La Figura 8-7 muestra la forma de la respuesta. Al variar a constante de tiempo ($\tau = RC$) de este circuito vemos como podemos tener respuestas más rápidas o más lentas. En general se considera que luego de un tiempo igual a 5τ la respuesta se encuentra en estado estable.

Como era de esperarse la energía almacenada en la capacitancia se disipa en la resistencia, de manera que a largo plazo la capacitancia se descarga y su voltaje vale cero.

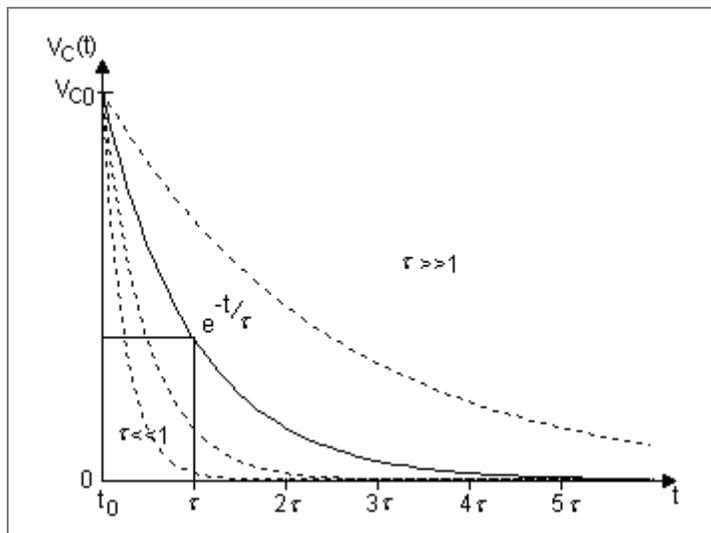


Figura 8-7

Ejemplo 8-3. Respuesta de Estado Cero y Completa para el voltaje de la capacitancia.

Para el circuito de la Figura 8-8 encontrar el voltaje en la capacitancia para si el voltaje de entrada es una señal DC que vale cero antes de t_0 y después de t_0 vale V_{DC} .

- con condiciones iniciales nulas.
- con voltaje en la capacitancia V_{C0} en t_0 .

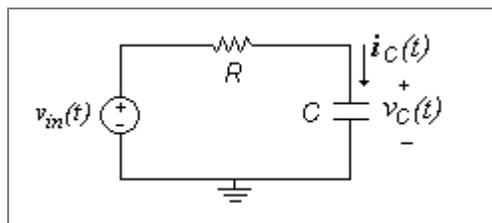


Figura 8-8

Solución**Parte a)**

Ya sabemos que la ecuación diferencial para el voltaje de la capacitancia en este circuito es:

$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_C(t) = \frac{1}{RC} v_{in}(t)$$

Haciendo una comparación con la siguiente ecuación diferencial se puede ver que:

$$\frac{dx(t)}{dt} - \lambda x(t) = f(t)$$

$$f(t) = \frac{1}{RC} v_{in}(t) = \frac{1}{RC} V_{DC}$$

$$\lambda = -\frac{1}{RC}$$

$$\tau = RC$$

De tal forma que la solución para el voltaje del condensador es:

$$v_C(t \geq t_o) = e^{\lambda(t-t_o)} x(t_o) + \int_{t_o}^t e^{\lambda(t-\tau)} f(\tau) d\tau$$

$$= 0 + \int_{t_o}^t e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} \frac{V_{DC}}{RC} d\tau$$

$$v_C(t \geq t_o) = \left(\frac{V_{DC}}{RC} \right) (RC) \cdot e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} \Bigg|_{t_o}^t$$

$$v_C(t \geq t_o) = V_{DC} \cdot \left[1 - e^{-\frac{1}{RC}(t-t_o)} \right]$$

La Figura 8-9 muestra la respuesta en el tiempo. Como se puede ver en estado estable el voltaje de la capacitancia tiende a ser igual que el voltaje de entrada de la fuente V_{DC} .

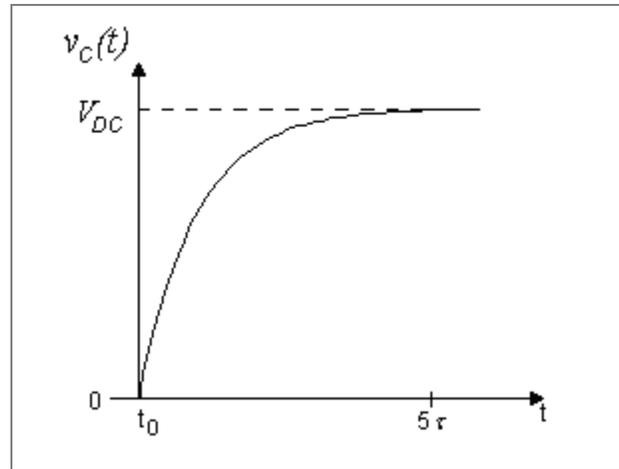


Figura 8-9

Parte b)

Ya sabemos que la ecuación diferencial para el voltaje de la capacitancia en este circuito es:

$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_C(t) = \frac{1}{RC} v_{in}(t)$$

Haciendo una comparación con la siguiente ecuación diferencial se puede ver que:

$$\frac{dx(t)}{dt} - \lambda x(t) = f(t)$$

$$f(t) = \frac{1}{RC} v_{in}(t) = \frac{1}{RC} V_{DC}$$

$$\lambda = -\frac{1}{RC}$$

$$\tau = RC$$

De tal forma que la solución para el voltaje del condensador es:

$$\begin{aligned} v_C(t \geq t_0) &= e^{\lambda(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\lambda(t-\tau)} f(\tau) d\tau \\ &= V_{C0} e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} \frac{V_{DC}}{RC} d\tau \end{aligned}$$

$$v_C(t \geq t_0) = V_{C0} e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)} + \left(\frac{V_{DC}}{RC} \right) (RC) e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} \Bigg|_{t_0}^t$$

$$v_C(t \geq t_o) = V_{C0} e^{-\frac{1}{RC}(t-t_o)} + V_{DC} \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}(t-t_o)} \right)$$

Recordando que $\tau = RC$ podemos escribir esta ecuación como:

$$v_C(t \geq t_o) = \underbrace{V_{C0} e^{-\frac{(t-t_o)}{\tau}}}_{\text{Natural}} + V_{DC} \cdot \underbrace{\left(1 - e^{-\frac{(t-t_o)}{\tau}} \right)}_{\text{Forzada}}$$

Aquí podemos distinguir dos partes: la respuesta natural y la respuesta forzada. Esta solución de la ecuación diferencial de entrada completa se muestra en la Figura 8-10. Como se aprecia el voltaje arranca en V_{C0} en t_o y busca de manera exponencial el valor de estado estable que es V_{DC} .

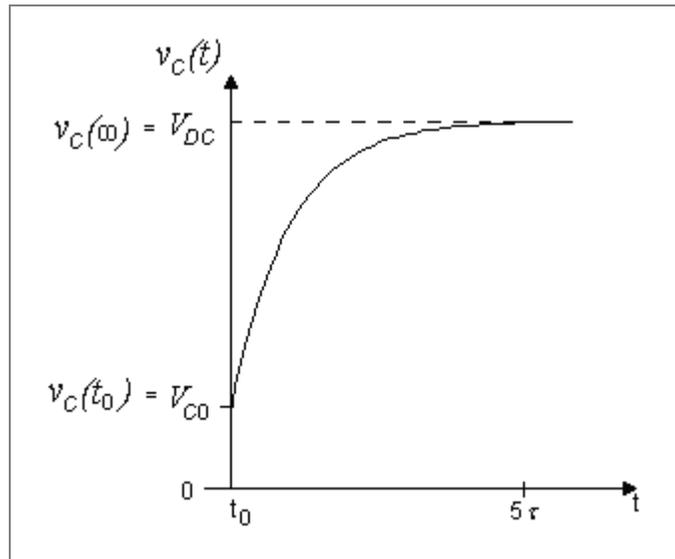


Figura 8-10

Si factorizamos las dos exponenciales la expresión toma la siguiente forma:

$$v_C(t \geq t_o) = V_{DC} + (V_{C0} - V_{DC}) e^{-\frac{(t-t_o)}{\tau}}$$

En esta nueva forma no podemos distinguir entre la respuesta natural y la forzada.

Si calculamos el límite cuando el tiempo tiende a infinito (el estado estable), tenemos:

$$v_C(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} v_C(t) = V_{DC} + (V_{C0} - V_{DC})(0) = V_{DC}$$

$$v_C(\infty) = V_{DC}$$

De manera que podemos reescribir la solución como:

$$v_c(t) = v_c(\infty) + (V_{CO} - v_c(\infty)) \cdot e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}$$

Ahora vamos a resolverlo por el método de coeficientes indeterminados para $t > t_0$. Primero miramos la forma de la solución particular. Como el voltaje de entrada es una constante asumimos que $v_{cp}(t) = K$ y reemplazamos en la ecuación diferencial:

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_c(t) = \frac{1}{RC}V_{DC}$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_c(t) = \frac{1}{RC}V_{DC}$$

$$\frac{dK}{dt} + \frac{1}{RC}K = \frac{1}{RC}V_{DC}$$

$$0 + \frac{1}{RC}K = \frac{1}{RC}V_{DC}$$

$$K = V_{DC}$$

De manera que la solución particular es:

$$\boxed{v_{cp}(t \geq t_0) = V_{DC}}$$

La ecuación homogénea tiene como ecuación característica

$$\left(\lambda + \frac{1}{RC}\right) = 0$$

Con raíz $\lambda_o = -\frac{1}{RC}$, de manera que la solución homogénea será:

$$v_{Ch}(t) = K \cdot e^{\lambda_o t} = K \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$$

La solución completa queda:

$$v_c(t \geq t_0) = v_{Ch}(t) + v_{cp}(t) = K \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} + V_{DC}$$

Ahora calculamos la condición inicial:

$$v_c(t_0) = K \cdot e^{-\frac{1}{RC}t_0} + V_{DC} = V_{CO}$$

$$K = \frac{V_{CO} - V_{DC}}{e^{-\frac{1}{RC}t_0}} = [V_{CO} - V_{DC}] \cdot e^{\frac{1}{RC}t_0}$$

Reemplazando K en la solución completa tenemos:

$$v_C(t \geq t_o) = [V_{CO} - V_{DC}] \cdot e^{\frac{1}{RC}t_o} \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} + V_{DC}$$

$$v_C(t \geq t_o) = [V_{CO} - V_{DC}] \cdot e^{-\frac{1}{RC}(t-t_o)} + V_{DC}$$

Ejemplo 8-4. Circuito con más de una capacitancia.

Para el circuito de la Figura 8-11 con dos capacitancias encontrar:

- la ecuación diferencial para el voltaje de la capacitancia de la derecha.
- el equivalente de Thévenin en términos del operador D al quitar la capacitancia de la derecha.
- repetir la parte a usando el resultado de la parte b.

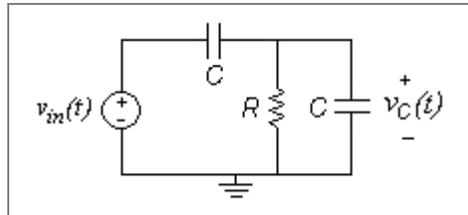


Figura 8-11

Solución

Parte a)

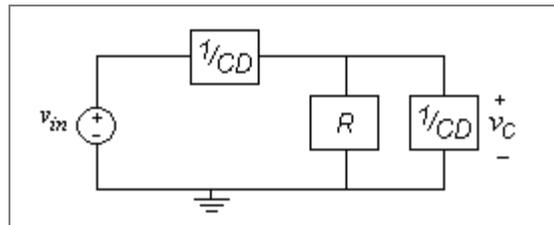


Figura 8-12

Usando el operador D con las impedancias mostradas en la Figura 8-12 tenemos:

$$v_C = \left(\frac{Z_{R//C}}{Z_C + Z_{R//C}} \right) v_{in}$$

$$Z_{R//C} = \frac{R \cdot \frac{1}{CD}}{R + \frac{1}{CD}} = \frac{R}{1 + RCD}$$

$$v_C = \left(\frac{\frac{R}{1 + RCD}}{\frac{1}{CD} + \frac{R}{1 + RCD}} \right) v_{in} = \left(\frac{RCD}{1 + 2RCD} \right) v_{in}$$

$$(1 + 2RCD)v_C = (RCD)v_{in}$$

$$\left(D + \frac{1}{2RC}\right)v_C = \frac{1}{2}Dv_{in}$$

$$\left(D + \frac{1}{2RC}\right)v_C = \frac{1}{2}Dv_{in}$$

Pasando al dominio del tiempo tenemos:

$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{2RC}v_C = \frac{1}{2}\frac{dv_{in}(t)}{dt}$$

Como se puede ver la ecuación diferencial resultante sigue siendo de primer orden, a pesar de tener dos capacitancias. Adicionalmente vemos que la entrada de la ecuación está derivada. De manera que se debe calcular esta derivada antes de buscar la solución particular o forzada.

Parte b)

Vamos a quitar la capacitancia y usar las impedancias como se muestra en la Figura 8-13

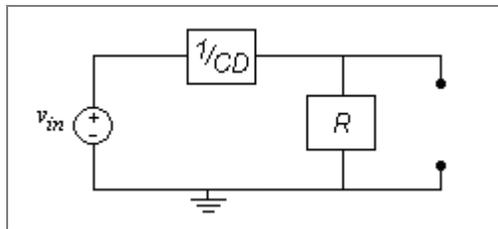


Figura 8-13

La impedancia de Thévenin será (apagando fuentes):

$$Z_{th} = R // \frac{1}{CD} = \frac{R \cdot \frac{1}{CD}}{R + \frac{1}{CD}} = \frac{R}{1 + RCD}$$

El voltaje de circuito abierto se calcula con el divisor de voltaje:

$$v_{OC} = \left(\frac{R}{\frac{1}{CD} + R}\right)v_{in} = \left(\frac{R}{\frac{1 + RCD}{CD}}\right)v_{in} = \left(\frac{RCD}{1 + RCD}\right)v_{in}$$

$$v_{OC} = \left(\frac{RCD}{1 + RCD}\right)v_{in}$$

La Figura 8-14 muestra el circuito equivalente de Thévenin en términos del operador D .

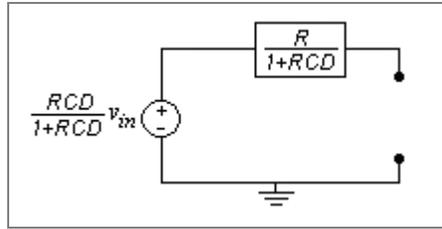


Figura 8-14

Parte c)

Ponemos la capacitancia en el equivalente de Thévenin y hacemos el divisor de voltaje como se muestra en la Figura 8-15.

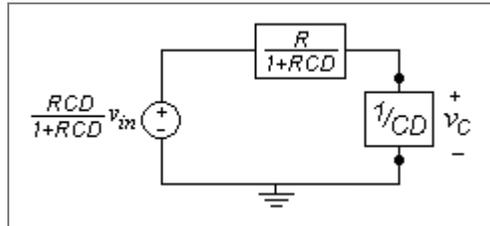


Figura 8-15

$$v_C = \left(\frac{\frac{1}{CD}}{\frac{1}{CD} + \frac{R}{1+RCD}} \right) \cdot \left(\frac{RCD}{1+RCD} \right) v_{in} = \left(\frac{RCD}{1+2RCD} \right) v_{in}$$

$$(1+2RCD)v_C = (RCD)v_{in}$$

$$\left(D + \frac{1}{2RC} \right) v_C = \frac{1}{2} D v_{in}$$

$$\left(D + \frac{1}{2RC} \right) v_C = \frac{1}{2} D v_{in}$$

Pasando al dominio del tiempo tenemos el mismo resultado encontrado anteriormente:

$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{2RC} v_C = \frac{1}{2} \frac{dv_{in}(t)}{dt}$$

8.6. FUNCIÓN ESCALÓN UNITARIO

La función discontinua escalón unitario $u(t)$, mostrada en la Figura 8-16, permite representar cambios bruscos de las señales en función del tiempo, por ejemplo en cambios debidos a interruptores o fuentes que se prenden y apagan, o que cambian de valor en un instante de tiempo dado. La función $u(t)$ no se encuentra definida en cero, ya que es el momento de la discontinuidad o del cambio brusco.

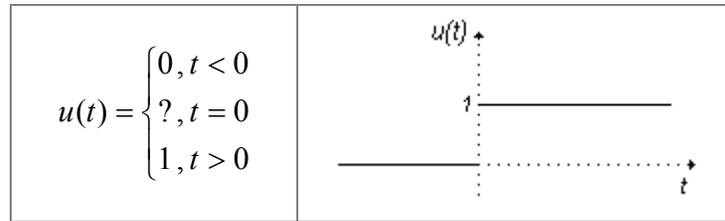


Figura 8-16

Es posible hacer un corrimiento en el tiempo para representar un cambio que no se da en cero sino en un tiempo t_0 como se muestra en la Figura 8-17. Esta será la función $u(t-t_0)$. En este caso la función no se encuentre definida en t_0 .

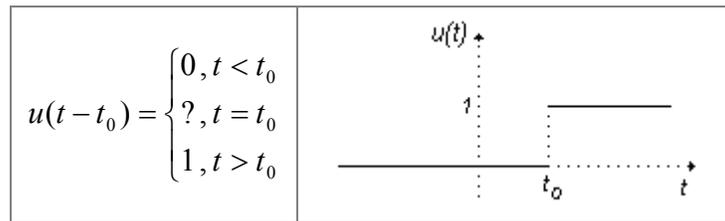


Figura 8-17

Estas funciones definen dos intervalos de tiempo (antes y después de cero o t_0). Combinando las dos funciones anteriores $u(t)$ y $u(t-t_0)$ podemos definir diferentes intervalos de tiempo como se muestra en la Figura 8-18. Esto nos permite por ejemplo definir una fuente que está apagada la mayor parte del tiempo y activa durante un cierto intervalo de tiempo.

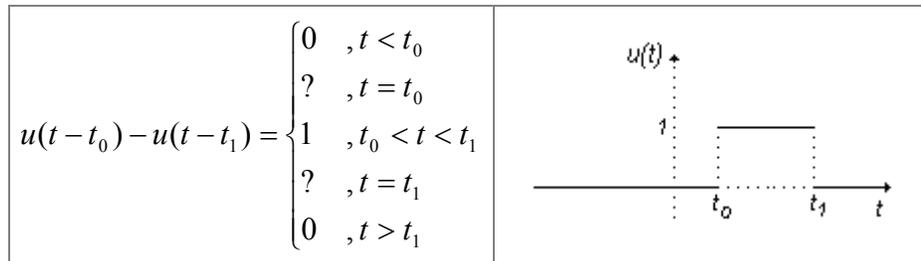


Figura 8-18

8.7. CIRCUITOS CON INTERRUPTORES Y FUENTES VARIABLES

Como se ha visto el hecho de tener un interruptor o una fuente que cambia implica resolver las ecuaciones diferenciales partiéndolas en los intervalos de tiempo en que se han presentado esos cambios.

En la Figura 8-19 presentamos los valores que pueden tomar las fuentes al aplicar esos cambios en los interruptores o en las fuentes multiplicadas por la función escalón unitario $u(t)$.

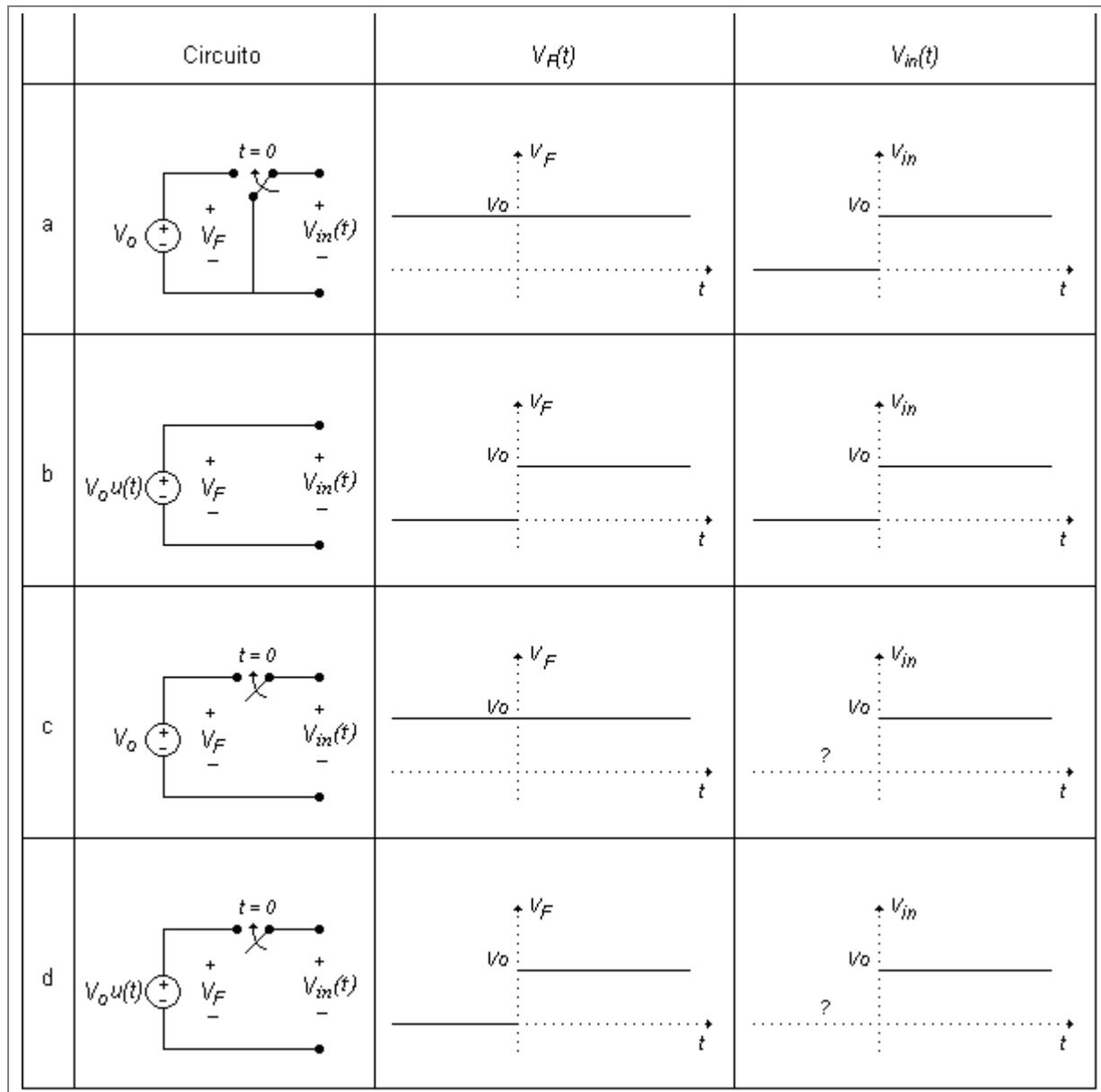


Figura 8-19

8.8. SIMULACIONES

8.8.1. RESPUESTA DE CIRCUITO RC A ENTRADA AC DC.

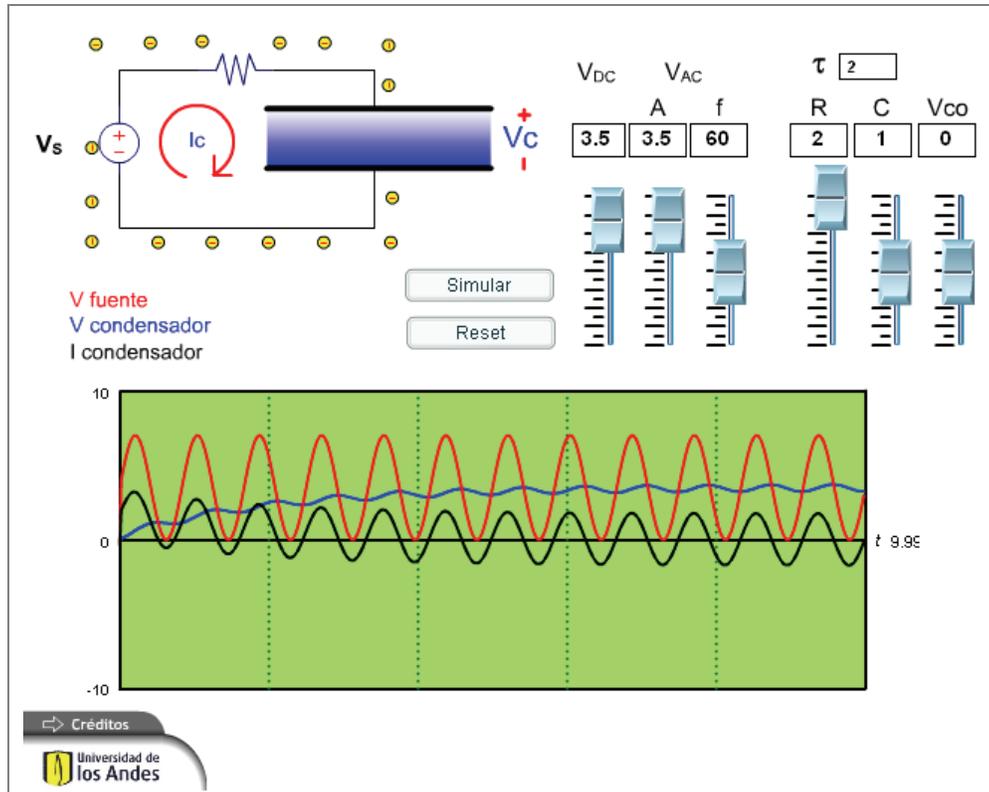


Figura 8-20

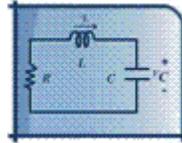
Descripción

Esta simulación permite presentar el comportamiento característico de los circuitos de RC y en general de circuitos representados por ecuaciones diferenciales de primer orden. Se puede ver como responde el sistema a las condiciones iniciales (respuesta natural), y a diferentes entradas de tipo DC y AC o combinaciones de ambas (respuesta forzada). El efecto de la resistencia y la capacitancia en la constante de tiempo del circuito, la oposición del condensador al cambio de voltaje y el consecuente cambio brusco en su corriente, así como la respuesta transitoria y en estado estable. Para fuentes AC es fácil mostrar los cambios de amplitud y fase entre la señal de entrada y la señal de salida medida en el condensador.

Uso educativo

Esta simulación se presenta como un complemento a la clase presencial, para estudiantes de primeros semestres de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Mecánica. Una vez los estudiantes manejan los conceptos de circuitos de primer orden, representación de circuitos por ecuaciones diferenciales, condiciones iniciales, respuesta natural y respuesta particular, el estudiante puede variar las condiciones iniciales del voltaje en el condensador, la constante de tiempo (variando R y C) la señal de entrada y observar sus efectos en la respuesta del circuito en tiempo real. Los cambios se pueden dar el cualquier momento, lo que permite observar el comportamiento para cambio brusco en la señal de entrada o los cambio en la constante de tiempo.

9. CIRCUITOS DE SEGUNDO ORDEN LC Y RLC



9.1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior vimos como los circuitos resistivos con capacitancias o los circuitos resistivos con inductancias tienen variables que son calculadas mediante ecuaciones diferenciales de primer orden. Ahora vamos a ver que cuando en el mismo circuito tenemos inductancias y capacitancias las ecuaciones diferenciales resultantes serán de segundo orden, por lo cual los denominamos *circuitos de segundo orden*.

También veremos cómo en circuitos con inductancias y capacitancias la energía almacenada por uno de estos elementos puede ser transferida al otro. Esto puede producir respuestas de tipo oscilatorio, incluso cuando no hay fuentes en el sistema.

El procedimiento para encontrar las ecuaciones diferenciales de estos circuitos es el mismo que para los casos de orden uno. La solución de las ecuaciones diferenciales también es muy similar, pero ahora tendremos dos raíces de la ecuación característica, las cuales pueden ser reales diferentes, reales iguales o complejas conjugadas (con parte real igual o diferente de cero). En función de esto tendremos cuatro tipos de respuesta de estado cero: oscilatoria, subamortiguada, sobreamortiguada y críticamente amortiguada. Lo que será un poco más complejo ahora será el cálculo de las condiciones iniciales, ya que necesitaremos adicionalmente las condiciones iniciales de la primera derivada de la variable de interés.

9.2. CIRCUITO LC – RESPUESTA DE ENTRADA CERO

El circuito de la Figura 9-1 muestra un circuito muy simple de segundo orden conformado por una capacitancia y una inductancia. Aunque este circuito no tiene fuentes, puede tener energía almacenada (condiciones iniciales) en cualquiera de los dos elementos o en ambos simultáneamente. La condición inicial del voltaje en la capacitancia nos fija el valor del voltaje en la inductancia, así como la condición inicial de la corriente en la inductancia nos determina la corriente en la capacitancia (pero con signo contrario).

Voltaje en la capacitancia

Vamos a encontrar la ecuación diferencial del voltaje en la capacitancia y resolverla (respuesta de entrada cero).

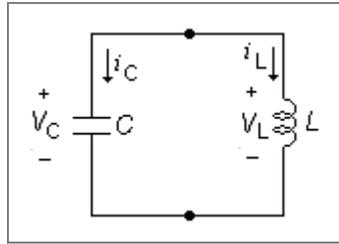


Figura 9-1

La ecuaciones que describen el circuito son:

Nodo:	<p>Derivando</p> $i_L = -i_C = -C \frac{dV_C}{dt}$ $\frac{di_L}{dt} = -C \frac{d^2V_C}{dt^2}$
Malla:	$-V_C + V_L = 0$ $V_C = V_L = L \frac{di_L}{dt}$ $\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} V_L = \frac{1}{L} V_C$

Igualando la derivada de la corriente de la inductancia tenemos:

$$\frac{di_L}{dt} = -C \frac{d^2V_C}{dt^2} = \frac{1}{L} V_C$$

$$C \frac{d^2V_C}{dt^2} + \frac{1}{L} V_C = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2V_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} V_C = 0}$$

Como no hay entrada la respuesta depende exclusivamente de las condiciones iniciales con dos constantes indeterminadas A y B:

$$V_C(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

Para encontrar la solución homogénea para el voltaje en la capacitancia necesitamos conocer dos condiciones iniciales que pueden ser $V_C(t_o)$ y $\frac{dV_C(t_o)}{dt}$.

Para simplificar vamos a suponer que conocemos las condiciones iniciales del circuito en cero para el voltaje de la capacitancia $V_C(0^-) = V_{C0}$ y la corriente en la inductancia $i_L(0^-) = i_{L0}$. A partir de estas condiciones debemos encontrar la condición inicial de $\frac{dV_C(0)}{dt}$. Para esto hacemos uso de las relaciones entre voltaje y corriente en la capacitancia:

$$i_C(t) = C \frac{dV_C(t)}{dt}$$

Despejando la derivada del voltaje tenemos:

$$\frac{dV_C(t)}{dt} = \frac{i_C(t)}{C}$$

En el tiempo cero tenemos:

$$\frac{dV_C(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C}$$

Ahora debemos conocer la corriente inicial en la capacitancia, y teniendo en cuenta que $i_C = -i_L$ y que la corriente en la inductancia es continua:

$$\frac{dV_C(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = -\frac{i_L(0^+)}{C} = -\frac{i_L(0^-)}{C} = -\frac{i_{L0}}{C}$$

De manera que ya tenemos las dos condiciones iniciales necesarias para resolver la ecuación:

$$V_C(0^+) = V_{C0}$$

$$V_C'(0^+) = \frac{dV_C(0^+)}{dt} = -\frac{i_{L0}}{C}$$

Ahora encontramos la ecuación característica a partir de la ecuación diferencial

$$\left(D^2 + \frac{1}{LC}\right)V_C = 0:$$

$$\left(\lambda^2 + \frac{1}{LC}\right) = 0$$

$$\lambda^2 = -\frac{1}{LC}$$

La solución tiene por supuesto dos raíces complejas conjugadas:

$$\lambda_1 = +j \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\lambda_2 = -j \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Así se obtiene la siguiente solución homogénea:

$$V_{ch}(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

$$V_{ch}(t) = Ae^{j\frac{1}{\sqrt{LC}}t} + Be^{-j\frac{1}{\sqrt{LC}}t}$$

Como no tenemos entrada el voltaje en el condensador es:

$$V_C(t) = Ae^{j\frac{1}{\sqrt{LC}}t} + Be^{-j\frac{1}{\sqrt{LC}}t}$$

Para encontrar las constantes indeterminadas utilizamos las condiciones iniciales:

$$V_C(0^+) = V_{C0} = Ae^0 + Be^0 = A + B$$

Para simplificar digamos que la corriente inicial en la inductancia es cero $i_{L0} = 0$, así que:

$$V_C'(0^+) = -\frac{i_{L0}}{C} = j\frac{1}{\sqrt{LC}}Ae^0 - j\frac{1}{\sqrt{LC}}Be^0 = 0 \Rightarrow A - B = 0 \Rightarrow A = B$$

Reemplazando en la primera condición:

$$\begin{aligned} A + A &= V_{C0} \\ A &= \frac{V_{C0}}{2} \end{aligned}$$

Solución final:

$$\begin{aligned} V_C(t) &= \frac{V_{C0}}{2}e^{j\frac{1}{\sqrt{LC}}t} + \frac{V_{C0}}{2}e^{-j\frac{1}{\sqrt{LC}}t} \\ &= \frac{V_{C0}}{2} \left(e^{j\frac{1}{\sqrt{LC}}t} + e^{-j\frac{1}{\sqrt{LC}}t} \right) \end{aligned}$$

Usando la relación de Euler,

$$e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x); \cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}; \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2},$$

podemos escribir:

$$V_C(t) = \frac{V_{C0}}{2} \left[2 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \right]$$

$$\boxed{V_C(t) = V_{C0} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)} \quad \boxed{\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \theta &= 0 \end{aligned}}$$

Como se aprecia la respuesta es una señal oscilatoria de tipo AC con la amplitud de la condición inicial. La frecuencia de oscilación depende de los valores de L y C y no de las condiciones iniciales.

Otra manera de resolverlo, dado que las raíces son complejas conjugadas, es asumir una solución de tipo senoidal con constantes indeterminadas A y ϕ :

$$V_C(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

con ω igual a la parte imaginaria de la raíz $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

De manera que $V_C'(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$

Evaluando condiciones iniciales tenemos:

$$V_C(0^+) = A \cos(\phi) = V_{C0}$$

$$A = \frac{V_{C0}}{\cos(\phi)}$$

$$V_C'(0^+) = -\omega A \sin(\phi) = -\frac{i_{L0}}{C}$$

$$\sin(\phi) = \frac{i_{L0}}{\omega C A}$$

De la segunda ecuación seno se concluye que si $i_{L0} = 0$ entonces $\phi = 0$, y que $A = V_{C0}$. Así que

$$V_C(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$V_C(t) = V_{C0} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

tal como lo habíamos encontrado anteriormente.

Si la corriente inicial en la inductancia I_{L0} no es cero, un análisis similar nos lleva al siguiente resultado:

$$V_C(t) = \sqrt{V_{C0}^2 + \left(I_{L0}^2 \frac{L}{C}\right)} \cdot \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}} + \phi\right)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{I_{L0}}{\omega C V_{C0}}\right)$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

En esta última formulación vemos que si $I_{L0} = 0$ tenemos el mismo resultado encontrado anteriormente.

Corriente en la inductancia

Con el resultado del voltaje sobre el condensador se puede obtener la corriente en la inductancia $i_L(t)$:

$$i_L(t) = -i_C(t) = -C \frac{dV_C(t)}{dt}$$

Para el caso en que $i_L(0^-) = i_{L0}$ tenemos:

$$i_L(t) = -C \frac{d}{dt} \left[V_{C0} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \right]$$

$$= \frac{C}{\sqrt{LC}} V_{C0} \cdot \text{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

$$i_L(t) = V_{C0} \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot \text{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

9.3. CIRCUITO RLC SERIE

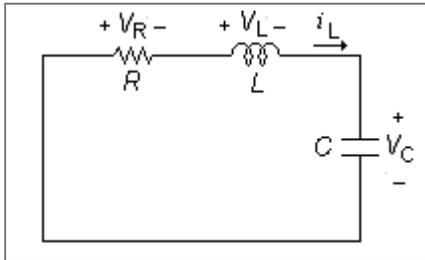


Figura 9-2

Ecuaciones que describen el circuito

Nodo:	$i_R = i_C = i_L$
Malla:	$V_R + V_L + V_C = 0$ $Ri_R + LDi_L + \frac{i_C}{CD} = 0$

Ecuación diferencial para la corriente

Con las anteriores ecuaciones se obtiene la ecuación diferencial para i_L

$$Ri_L + LDi_L + \frac{i_L}{CD} = 0$$

$$LD^2i_L + RDi_L + \frac{1}{C}i_L = 0$$

$$D^2i_L + \frac{R}{L}Di_L + \frac{1}{LC}i_L = 0$$

$$\left(D^2 + \frac{R}{L}D + \frac{1}{LC} \right) i_L = 0$$

$$\frac{d^2i_L}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = 0$$

9.4. CIRCUITO RLC PARALELO

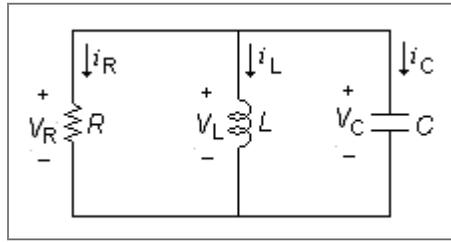


Figura 9-3

Ecuaciones que describen el circuito

Nodo:	$i_R + i_L + i_C = 0$ $\frac{V_R}{R} + \frac{V_L}{LD} + \frac{V_C}{1/CD} = 0$ $\frac{V_R}{R} + \frac{V_L}{LD} + CDV_C = 0$
KVL:	$V_R = V_L = V_C$

Ecuación diferencial para el voltaje

Con las anteriores ecuaciones se obtiene la ecuación diferencial para $V_C(t)$.

$$LDV_C + RV_C + RLCD^2V_C = 0$$

$$D^2V_C + \frac{1}{RC}DV_C + \frac{1}{LC}V_C = 0$$

$$\left(D^2 + \frac{1}{RC}D + \frac{1}{LC} \right) V_C = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2V_C}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{LC}V_C = 0}$$

9.5. COMPORTAMIENTO DE LA RESPUESTAS DE SEGUNDO ORDEN – ENTRADA CERO

La forma general de ecuación diferencial homogénea de segundo orden es:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + b \frac{dx(t)}{dt} + cx(t) = 0$$

la cual se puede escribir usando el operador D como:

$$(D^2 + bD + c)x = 0$$

La ecuación característica de esta ecuación será:

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

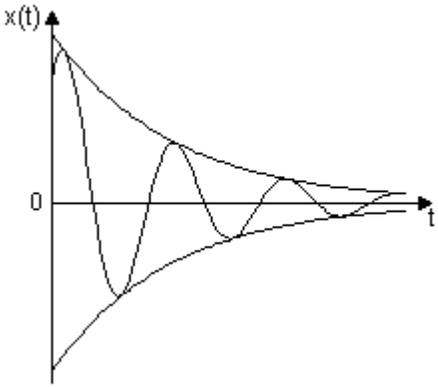
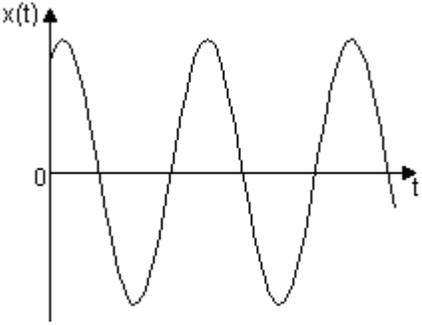
cuya solución es:

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \text{ y } \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

De acuerdo a los valores que tengan λ_1 y λ_2 la respuesta homogénea puede tener distintas formas, como lo muestra la siguiente tabla.

Tabla 9-1. Diferentes tipos de respuesta homogénea según las raíces.

TIPO	RESPUESTA	GRÁFICA
<p>Sobre-amortiguada Raíces reales diferentes: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\lambda_1 \in \mathfrak{R}$ $\lambda_2 \in \mathfrak{R}$ $b^2 - 4c > 0$</p>	<p>$x(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t}$ Condiciones iniciales: $x(0) = k_1 + k_2$ $x'(0) = \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2$</p>	
<p>Críticamente amortiguada Raíces reales iguales: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ $\lambda \in \mathfrak{R}$ $b^2 - 4c = 0$</p>	<p>$x(t) = (k_1 + k_2 t) e^{\lambda t}$ Condiciones iniciales: $x(0) = k_1$ $x'(0) = \lambda k_1 + k_2$</p>	

<p>Subamortiguada</p> <p>Raíces complejas conjugadas:</p> $\lambda_1 = \sigma + j\omega$ $\lambda_2 = \sigma - j\omega$ $b^2 - 4c < 0$ $b \neq 0$	$x(t) = k_1 e^{(\sigma + j\omega)t} + k_2 e^{(\sigma - j\omega)t}$ $x(t) = e^{\sigma t} [A \cos(\omega t) + B \text{sen}(\omega t)]$ <p>Condiciones iniciales:</p> $x(0) = A$ $x'(0) = \sigma A + \omega B$ <p>Otra forma:</p> $x(t) = K e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta)$ <p>Condiciones iniciales:</p> $x(0) = K \cos(\theta)$ $x'(0) = \theta K \cos(\theta) - \omega K \text{sen}(\theta)$ <p>La relación entre las constantes es:</p> $K = \sqrt{A^2 + B^2}$ $\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{B}{A}\right)$	
<p>No amortiguada</p> <p>Raíces puramente complejas:</p> $\lambda_1 = j\omega$ $\lambda_2 = -j\omega$ $b^2 - 4c < 0$ $b = 0$	$x(t) = k_1 e^{j\omega t} + k_2 e^{-j\omega t}$ $x(t) = A \cos(\omega t) + B \text{sen}(\omega t)$ $x(t) = K \cos(\omega t + \theta)$ <p>Condiciones iniciales:</p> $x(0) = A ; x'(0) = B$	

9.6. CIRCUITO RLC SERIE CON ENTRADA CONSTANTE

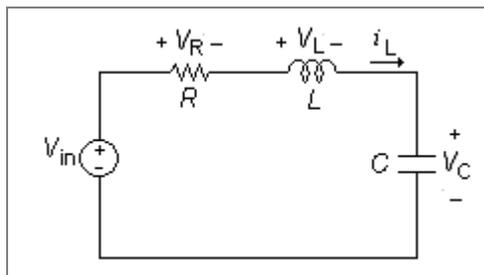


Figura 9-4

Ecuaciones que describen el circuito

Nodo:	$i_R = i_C = i_L$
Malla:	$V_{in} = V_R + V_L + V_C$ $= Ri_R + LDi_L + V_C$

Ecuación diferencial para el voltaje en el condensador

Con las ecuaciones (1) y (2) se puede encontrar la ecuación diferencial para el voltaje en el condensador:

$$i_C = CDV_C$$

$$V_{in} = Ri_C + LDi_C + V_C$$

$$= RCDV_C + LD(CDV_C) + V_C$$

$$= LCD^2V_C + RCDV_C + V_C$$

$$\frac{V_{in}}{LC} = D^2V_C + \frac{R}{L}DV_C + \frac{1}{LC}V_C$$

$$\boxed{\frac{d^2V_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{LC}V_C = \frac{1}{LC}V_{in} = Kte}$$

Solución de la ecuación diferencial:

La ecuación diferencial es de la forma:

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = F$$

donde $b = \frac{R}{L}$ y $c = \frac{1}{LC}$

La solución de esta ecuación diferencial es de la forma:

$$x = x_h + x_p$$

Solución homogénea:

De la ecuación diferencial se obtiene la siguiente ecuación característica:

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ Y se obtiene la siguiente solución homogénea:

$$\boxed{x_h(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}}$$

Solución particular:

La solución particular es de la forma de la fuente, es decir, una constante:

$$x_p = Kte$$

$$\dot{x}_p = 0$$

$$\ddot{x}_p = 0$$

Reemplazando en la ecuación diferencial se obtiene:

$$\ddot{x}_p + b\dot{x}_p + cx_p = F$$

$$cx_p = F$$

$$x_p = \frac{F}{c}$$

Solución completa:

La solución completa de la ecuación diferencial es:

$$x(t) = x_h(t) + x_p = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} + \frac{F}{c}$$

Reemplazando los valores de la ecuación diferencial del voltaje en el condensador se obtiene:

$$V_C(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} + \frac{V_{in}}{1/LC}$$

$$V_C(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} + V_{in}$$

Condiciones iniciales:

Caso 1: Raíces reales diferentes ($b^2 - 4c > 0$)

$$V_C(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} + V_{in}$$

$$V_C(0) = A + B + V_{in}$$

$$\dot{V}_C(t) = \lambda_1 Ae^{\lambda_1 t} + \lambda_2 Be^{\lambda_2 t}$$

$$\dot{V}_C(0) = \lambda_1 A + \lambda_2 B$$

Caso 2: Raíces complejas conjugadas ($b^2 - 4c < 0$)

$$x(t) = e^{\sigma t} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] + V_{in}$$

$$x(0) = A + V_{in}$$

$$\dot{x}(t) = \sigma \cdot e^{\sigma t} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] + \omega \cdot e^{\sigma t} [-A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)]$$

$$\dot{x}(0) = A\sigma + B\omega$$

$$x(t) = Ke^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta) + V_{in}$$

$$x(0) = K \cos(\theta) + V_{in}$$

$$\dot{x}(t) = \sigma \cdot Ke^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta) - \omega \cdot Ke^{\sigma t} \sin(\omega t + \theta)$$

$$\dot{x}(0) = \sigma \cdot K \cos(\theta) - \omega \cdot K \sin(\theta)$$

Ejemplo 9-1 . Circuito R y LC con interruptor.

En el circuito de la Figura 9-5 el interruptor se cierra en $t = 0$. Encontrar:

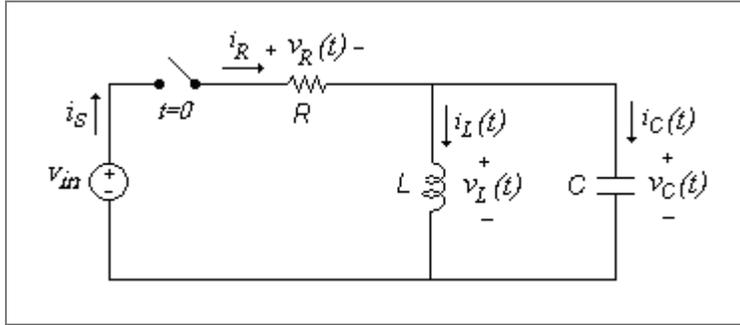


Figura 9-5

- La ecuación diferencial para $i_L(t)$ cuando el interruptor está cerrado.
- La ecuación diferencial para $v_C(t)$ cuando el interruptor está cerrado.
- $v_C'(0^+)$ e $i_L'(0^+)$ al cerrar el interruptor si las condiciones iniciales son $v_C(0^-) = V_{c0}$ y $i_L(0^-) = I_{L0}$.

Solución

Parte a)

La ecuación diferencial para $i_L(t)$ la encontraremos usando el operador D :

$$L \parallel C : \frac{\frac{1}{CD} \cdot LD}{\frac{1}{CD} + LD} = \frac{LD}{1 + LCD^2}$$

$$i_L = \frac{v_L}{Z_L} = \frac{v_{in} \cdot \left(\frac{\frac{LD}{1 + LCD^2}}{R + \frac{LD}{1 + LCD^2}} \right)}{LD} = v_{in} \cdot \frac{\frac{LD}{1 + LCD^2}}{LD \cdot \left(R + \frac{LD}{1 + LCD^2} \right)}$$

$$i_L = v_{in} \cdot \frac{1}{R(1 + LCD^2) + LD} = \frac{v_{in}}{RLCD^2 + LD + R}$$

$$(RLCD^2 + LD + R) \cdot i_L = v_{in}$$

$$\left(D^2 + \frac{1}{RC}D + \frac{1}{LC} \right) \cdot i_L = \frac{v_{in}}{RLC}$$

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di_L(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i_L(t) = \frac{v_{in}}{RLC}$$

Parte b)

$$v_c = v_{in} \frac{Z_{L//C}}{R + Z_{L//C}} = v_{in} \cdot \left(\frac{\frac{LD}{1 + LCD^2}}{R + \frac{LD}{1 + LCD^2}} \right) = v_{in} \frac{LD}{LD + R + RLCD^2}$$

$$(RLCD^2 + LD + R)v_c = LDv_{in}$$

$$\left(D^2 + \frac{1}{RC}D + \frac{1}{LC} \right)v_c = \frac{1}{RC}Dv_{in}$$

$$\frac{d^2v_c(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{LC}v_c(t) = \frac{1}{RC} \frac{dv_{in}(t)}{dt}$$

Parte c)

El circuito equivalente, antes de cerrar el interruptor $t = 0^-$, se muestra en la Figura 9-6(a). Como el interruptor está abierto no hay corriente por la resistencia y la fuente de voltaje no tiene efecto, así que solo debemos examinar lo que ocurre con la inductancia y la capacitancia. Las condiciones iniciales son $v_c(0^-) = V_{c0}$ e $i_L(0^-) = I_{L0}$. Ahora debemos encontrar las condiciones en $t = 0^+$, al cerrar el interruptor. En ese momento intervienen la fuente y la resistencia. El circuito equivalente en $t = 0^+$ se muestra en la Figura 9-6(b). Por continuidad en C y L tenemos:

$$v_c(0^-) = V_{c0} = v_c(0^+) \text{ y } I_L(0^-) = I_{L0} = I_L(0^+)$$

A partir de estos valores podemos encontrar las condiciones en $t = 0^+$

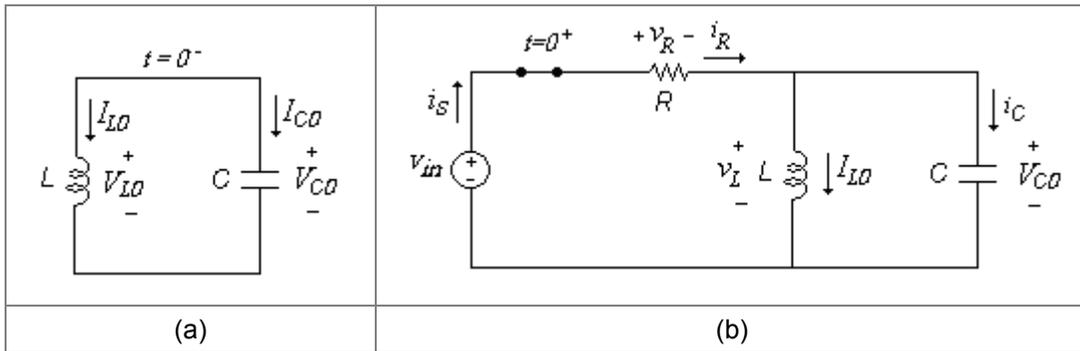


Figura 9-6

i. $i'_L(0^+)$

$$v_c(t) = v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = Li'_L(t) \Rightarrow i'_L(t) = \frac{1}{L}v_c(t)$$

$$i'_L(0^+) = \frac{1}{L}v_c(0^+)$$

$$\boxed{i'_L(0^+) = \frac{1}{L}V_{c0}}$$

ii. $v'_c(0^+)$

$$i_c(t) = C \frac{dV_C(t)}{dt}$$

$$v'_c(t) = \frac{dV_C(t)}{dt} = \frac{1}{C} i_c(t) = \frac{1}{C} [i_R(t) - i_L(t)]$$

$$v'_c(t) = \frac{1}{C} \left[\frac{v_{in}(t) - v_C(t)}{R} - i_L(t) \right]$$

$$v'_c(0^+) = \frac{1}{C} \left[\frac{v_{in}(0^+) - v_C(0^+)}{R} - i_L(0^+) \right]$$

$$v'_c(0^+) = \frac{1}{C} \left[\frac{v_{in} - V_{C0}}{R} - i_{L0} \right]$$

Ejemplo 9-2 . Circuito RC y L con interruptor.

El circuito de la Figura 9-7 tiene una fuente de voltaje V_s de tipo D.C.; el interruptor ha estado cerrado por un largo tiempo antes de $t_0 = 0$ y alcanzó el estado estable. En t_0 se abre el interruptor y se deja así por un corto tiempo hasta el instante t_1 (sin llegar a estado estable). Encontrar para $t \geq t_0$:

- a. la ecuación diferencial para $v_C(t)$.
- b. $v_C(t_0^-)$, $i_L(t_0^-)$, $v_C(t_0^+)$, $i_L(t_0^+)$, $v'_C(t_0^+)$
- c. $v_C(t_1 \geq t \geq t_0)$, $v_C(t_1^+)$, $v'_C(t_1^+)$
- d. $v_C(t \geq t_1)$, si $R = 2 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$ y $C = 1/8 \text{ F}$ y $V_s = 10\text{V}$.

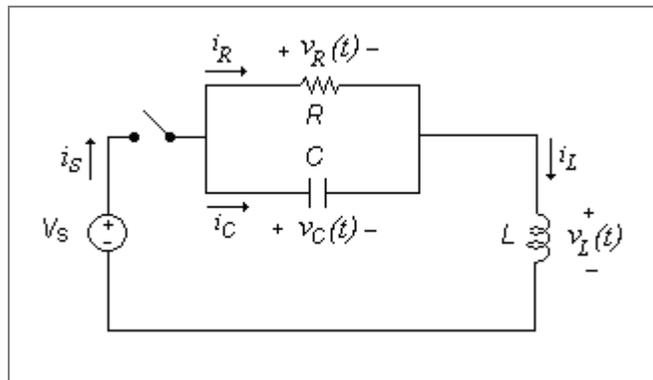


Figura 9-7

Solución

Parte a)

Tenemos que partir el problema en dos intervalos de tiempo: $[t_0, t_1]$ y $t \geq t_1$ y encontrar la ecuación diferencial de cada caso, con sus respectivas condiciones iniciales y resolverla.

En $[t_0, t_1]$:

Como el interruptor está abierto tenemos el circuito equivalente de la Figura 9-8, que corresponde a la descarga de la capacitancia a través de la resistencia y que es un circuito RC de primer orden cuya ecuación diferencial ya la conocemos del capítulo anterior:

$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_C(t) = 0$$

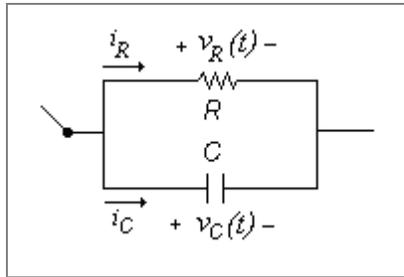


Figura 9-8

Para resolver esta ecuación vamos a necesitar la condición inicial en t_0 : $v_C(t_0^+)$.

Para $t \geq t_1$:

Al cerrar el interruptor volvemos a tener un circuito de segundo orden.

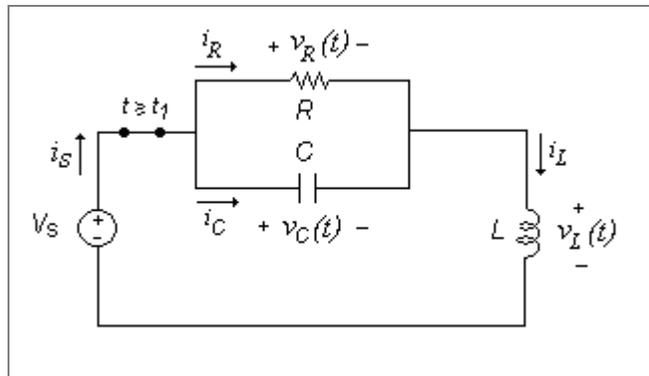


Figura 9-9

Usando el operador D podemos hacer el divisor de voltaje con en los otros ejemplos. Esta vez vamos a calcular KCL en el nodo entre RC y L y la malla entre la fuente C y L:

$$-V_S + v_C + v_L = 0$$

$$v_L = V_S - v_C$$

$$i_R + i_C - i_L = 0$$

$$\left(\frac{V_C}{R}\right) + \left(\frac{v_C}{1/CD}\right) - \left(\frac{v_L}{LD}\right) = 0$$

$$\left(\frac{V_C}{R}\right) + \left(\frac{v_C}{1/CD}\right) - \left(\frac{V_S - v_C}{LD}\right) = 0$$

$$\left(\frac{1}{R} + CD + \frac{1}{LD}\right)V_C = \frac{V_S}{LD}$$

$$RLD\left(\frac{1}{R} + CD + \frac{1}{LD}\right)V_C = RLD\frac{V_S}{LD}$$

$$(LD + RLCD^2 + R) \cdot V_C = RV_S$$

$$\left(D^2 + \frac{D}{RC} + \frac{1}{LC}\right) \cdot V_C = \frac{1}{LC}V_S$$

Pasando al dominio del tiempo tenemos entonces la siguiente ecuación diferencial de orden dos:

$$\frac{d^2V_C(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dV_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC}V_C(t) = \frac{1}{LC}V_S$$

Para resolver esta ecuación vamos a necesitar las condiciones iniciales en

$$t_1: v_C(t_1^+) \text{ y } v_C'(t_1^+).$$

Parte b)

Para el intervalo de tiempo anterior a $t_0 = 0$ no hace falta escribir la ecuación diferencial ya sabemos que en $t_0 = 0$ se alcanzó el estado estable y que como la fuente es de tipo D.C. el condensador está abierto y la inductancia en corto circuito. Esto nos permite encontrar las condiciones iniciales.

En t_0^- :

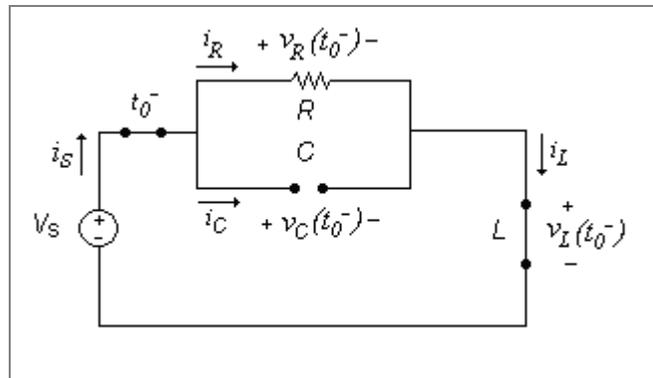


Figura 9-10

$$v_C(t_0^-) = V_S = v_C(t_0^+) = v_{C0}$$

$$i_L(t_0^-) = \frac{v_R(t_0^-)}{R} = \frac{V_S(t_0^-)}{R} = \frac{V_S}{R}$$

En t_0^+ :

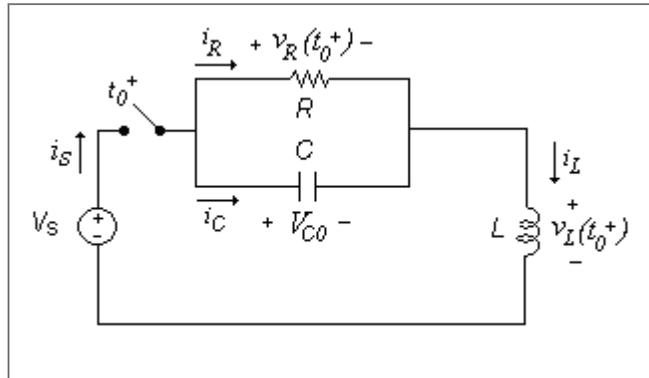


Figura 9-11

Por continuidad del voltaje en la capacitancia y dado que se alcanzó el estado estable en t_0 tenemos:

$$v_C(t_0^+) = v_C(t_0^-) = v_{C0} = V_S$$

Aquí ya no es válida la continuidad de la corriente en la inductancia ya que el interruptor está abierto y se debe respetar KCL:

$$i_L(t_0^-) = \frac{V_S}{R} \neq i_L(t_0^+) = 0$$

Para encontrar $v_C'(t_0^+)$ usamos la relación entre corriente y voltaje en la inductancia y el hecho de que el interruptor está abierto que implica que $i_C = -i_R$:

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{i_C(t)}{C}$$

$$v_C(t_0^+)' = \frac{dv_C(t_0^+)}{dt} = \frac{i_C(t_0^+)}{C} = -\frac{i_R(t_0^+)}{C} = -\frac{v_R(t_0^+)}{C} = -\frac{v_R(t_0^+)}{RC}$$

Como R y C están en paralelo:

$$v_C(t_0^+)' = -\frac{v_C(t_0^+)}{RC} = -\frac{V_S}{RC}$$

Parte c)

Para encontrar las condiciones iniciales en t_1 necesitamos resolver la ecuación del voltaje en la capacitancia $v_C(t)$ en el intervalo $[t_0, t_1]$ y evaluarla en t_1 .

$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_C(t) = 0$$

$$v_C(t_0^+) = V_S$$

Ya vimos en el capítulo anterior que la solución es:

$$v_C(t) = V_{C0} e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}$$

En $[t_0, t_1]$:

$$v_C(t) = V_S e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}$$

Evaluando en t_1 :

$$V_{C1} = v_C(t_1) = V_S e^{-\frac{1}{RC}(t_1-t_0)}$$

$$v_C'(t) = -\frac{1}{RC} V_S e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}$$

$$v_C'(t_1) = -\frac{1}{RC} V_S e^{-\frac{1}{RC}(t_1-t_0)} = -\frac{1}{RC} V_{C1}$$

Parte d)

La solución de $v_C(t)$ en el intervalo $[t_0, t_1]$ dependerá de las raíces de la ecuación característica de la ecuación diferencial encontrada para este intervalo de tiempo con $R = 2 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$ y $C = 1/8 \text{ F}$ y $V_S = 10\text{V}$.

$$\frac{d^2v_C(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC}v_C(t) = \frac{1}{LC}V_S$$

La solución homogénea será:

$$\lambda^2 + \frac{1}{RC}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{8}}\lambda + \frac{1}{1 \cdot \frac{1}{8}} = 0$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{-4 + \sqrt{4^2 - 4 \cdot 8}}{2} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \frac{-4 - \sqrt{4^2 - 4 \cdot 8}}{2}$$

$$\lambda_1 = -2 + j2 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -2 - j2$$

Como las raíces son de la forma $\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ la solución homogénea tendrá la forma

$$v_{Ch}(t) = Ke^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta)$$

Donde K y θ son constantes indeterminadas.

$$v_{Ch}(t) = Ke^{-2t} \cos(2t + \theta)$$

La solución particular será:

$$v_{Ch}(t) = \frac{F}{c} = \frac{\left(\frac{1}{LC} V_s\right)}{\frac{1}{LC}} = V_s$$

Así que la solución completa es para $t \geq t_1$:

$$v_C(t) = Ke^{-2t} \cos(2t + \theta) + V_s$$

$$v_C'(t) = -2Ke^{-2t} \cos(2t + \theta) - 2Ke^{-2t} \sin(2t + \theta)$$

Ahora evaluamos condiciones iniciales:

$$V_{C1} = v_C(t_1) = V_s e^{-\frac{1}{RC}(t_1 - t_0)}$$

$$v_C'(t_1) = -\frac{1}{RC} V_s e^{-\frac{1}{RC}(t_1 - t_0)} = -\frac{1}{RC} V_{C1} = -4V_{C1}$$

$$v_C(t_1) = Ke^{-2t_1} \cos(2t_1 + \theta) + V_s = V_{C1} = V_s e^{-\frac{1}{RC}(t_1 - t_0)}$$

$$v_{Ch}(t_1)' = -2Ke^{-2t_1} \cos(2t_1 + \theta) - 2Ke^{-2t_1} \sin(2t_1 + \theta) = -4V_{C1}$$

$$v_C(t \geq t_0) = \begin{cases} V_s \cdot e^{-4(t-t_0)} & , \text{para } [t_0, t_1] \\ Ke^{-2t} \cdot \cos(2t + \theta) + V_s & , \text{para } t \geq t_1 \end{cases}$$

$$v_C(t \geq t_0) = \begin{cases} 10 \cdot e^{-4(t-t_0)} \text{V} & , \text{para } [t_0, t_1] \\ Ke^{-2t} \cdot \cos(2t + \theta) + 10\text{V} & , \text{para } t \geq t_1 \end{cases}$$

9.7. SIMULACIONES

9.7.1. RESPUESTA DE CIRCUITO RLC A DIVERSAS ENTRADAS.

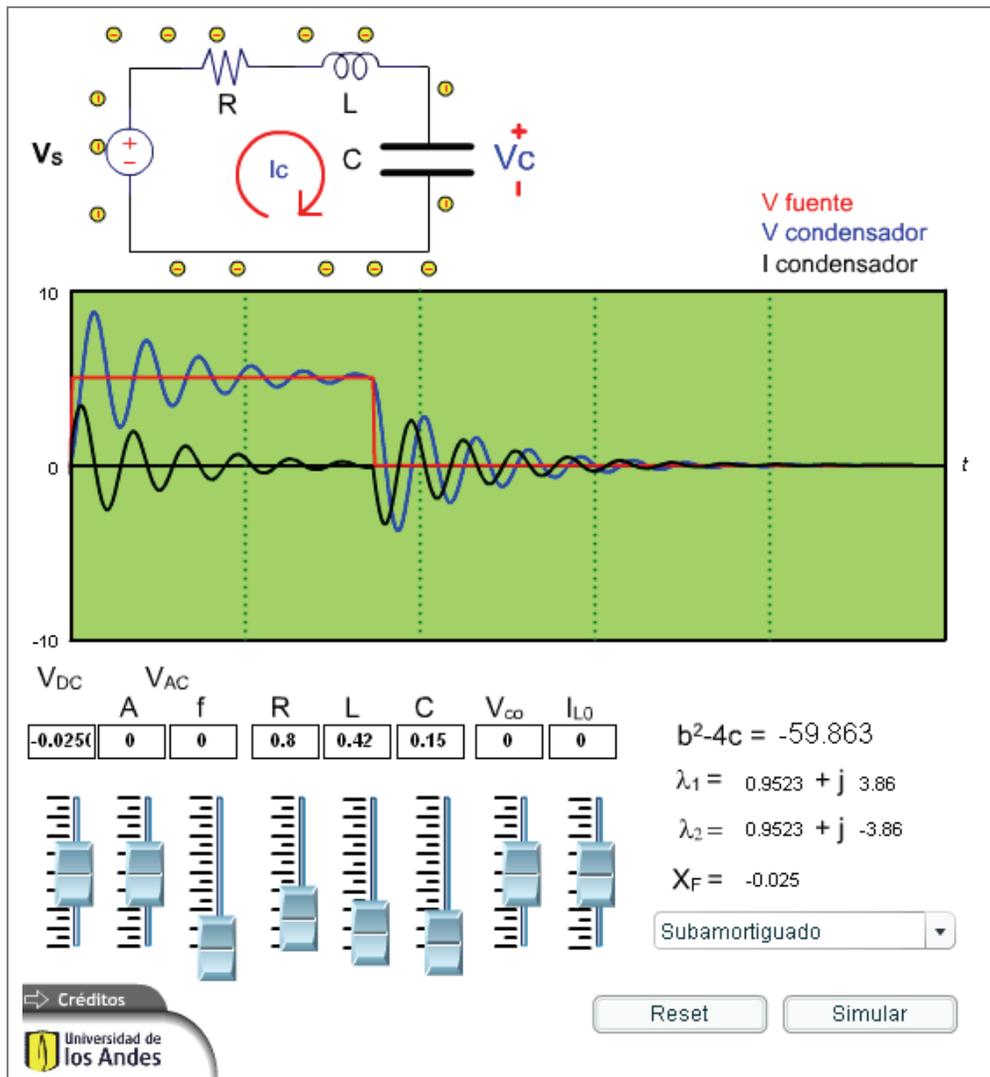


Figura 9-12

Descripción

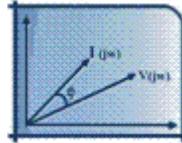
Esta simulación permite mostrar el comportamiento de circuitos RLC de segundo orden, las raíces de la ecuación característica, y el comportamiento del circuito en función del tipo de raíces obtenidas. También permite analizar el comportamiento en función de los parámetros de los componentes RLC, de las condiciones iniciales y del tipo de entrada AC y DC.

Uso educativo

Esta simulación se presenta como un complemento a la clase presencial, para estudiantes de primeros semestres de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Mecánica. Una vez los estudiantes manejan los conceptos de circuitos RLC o segundo orden, representación de circuitos por ecuaciones diferenciales, condiciones iniciales, respuesta natural y respuesta particular, el estudiante puede variar las condiciones iniciales en la inductancia y la capacitancia y la señal de entrada y observar sus efectos en la respuesta del circuito en tiempo real. Los cambios se pueden dar el

cualquier momento, lo que permite observar el comportamiento para cambio brusco en la señal de entrada o los cambio en la constante de tiempo. El sistema muestra las raíces de la ecuación característica según los valores definidos para R, L y C. También permite tener condiciones predefinidas para tener circuitos con respuesta no amortiguada, subamortiguada, sobreamortiguada y críticamente amortiguada.

10. ANÁLISIS SENOIDAL POR FASORES



10.1. INTRODUCCIÓN

El análisis de circuitos complejos con resistencias, inductancias y capacitancias para entradas de tipo senoidal resulta muy dispendioso. El *análisis senoidal por fasores* es una manera simple de analizar tales circuitos sin resolver las ecuaciones diferenciales, que aplica al caso de entradas senoidales a una frecuencia dada, y una vez que el sistema se encuentra en estado estable.

Un fasor es una representación en el plano complejo de la magnitud y fase de la señal en el tiempo asociada al fasor. Como este representa una condición de inicio no depende del tiempo.

El análisis por fasores simplifica el estudio al caso de ecuaciones algebraicas, pero con la diferencia de que ahora se trabaja con números complejos.

10.2. SEÑAL EXPONENCIAL COMPLEJA Y FASORES

La Señal Exponencial Compleja (SEC) de una señal senoidal real en el tiempo es una transformada de la señal o un cambio de espacio de análisis definido como sigue.

Sea una señal senoidal $v_s(t)$ en el dominio del tiempo, con amplitud V_s , ángulo de fase θ_s y frecuencia ω_s :

$$v_s(t) = V_s \cos(\omega t + \theta_s)$$

Su señal Exponencial Compleja (SEC) asociada será:

$$\tilde{v}_s(t) = V_s \cdot e^{j(\omega t + \theta_s)}$$

donde $v_s(t)$ es la señal de entrada real en el tiempo y su SEC asociada es $\tilde{v}_s(t)$.

Nota: j es el número imaginario o complejo también llamado $i = \sqrt{-1}$, aunque en ingeniería se usa preferiblemente j .

Como se ve pasamos del espacio real al espacio complejo. La SEC tiene entonces parte real y parte imaginaria, las cuales varían en el tiempo.

Haciendo algunas modificaciones a la ecuación anterior tenemos:

$$\tilde{v}_s(t) = V_s \cdot e^{j(\omega t + \theta_s)} = V_s \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\theta_s} = [V_s e^{j\theta_s}] \cdot e^{j\omega t}$$

El término en paréntesis cuadrados, que no depende del tiempo se conoce como el fasor y se representa por el símbolo \vec{V}_s :

$$\vec{V}_s = V_s e^{j\theta_s}$$

La anterior se conoce como la representación polar del fasor. Este fasor \vec{V}_s también tiene una amplitud V_s , ángulo de fase θ_s .

Usando el fasor la SEC toma la forma

$$\tilde{v}_s(t) = V_s \cdot e^{j(\omega t + \theta_s)} = \vec{V}_s \cdot e^{j\omega t}$$

Otra manera de escribir el fasor es usar la notación de ingeniería eléctrica con como una magnitud real a un ángulo de fase dada por el símbolo \angle :

$$\vec{V}_s = V_s \angle \theta_s$$

Dado un fasor \vec{V}_s , nos podemos referir a su magnitud por la expresión

$$V_s = \left| \vec{V}_s \right|$$

y a su ángulo de fase por

$$\theta_s = \langle \vec{V}_s \rangle$$

Otra manera de representar el fasor es la forma rectangular, que se obtiene usando a relación de Euler:

$$\vec{V}_s = V_s \angle \theta_s = V_s e^{j\theta_s} = V_s [\cos(\theta_s) + j \operatorname{sen}(\theta_s)]$$

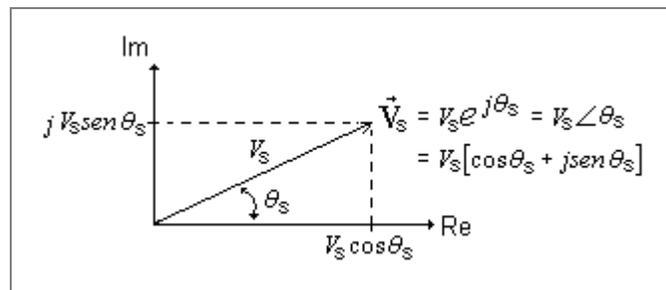


Figura 10-1

La Figura 10-1 muestra la relación en el plano complejo entre la forma polar y la forma rectangular del fasor.

Aplicando igualmente la relación de Euler a la SEC tenemos:

$$\tilde{v}_s(t) = V_s \cdot e^{j(\omega t + \theta_s)} = V_s [\cos(\omega t + \theta_s) + j \operatorname{sen}(\omega t + \theta_s)]$$

Esta SEC es entonces un fasor que rota alrededor del origen en función del tiempo, con un ángulo inicial, por lo cual también se le llama *fasor rotacional*.

Ya hemos visto la manera de encontrar la SEC asociada a una señal senoidal dada. Ahora veremos cómo hacer el proceso inverso: la señal senoidal en el tiempo a partir de una SEC dada.

Nótese que la parte real de la SEC $\tilde{v}_s(t)$ es justamente $v_s(t)$:

$$\operatorname{Re}\{\tilde{v}_s(t)\} = \operatorname{Re}\{V_s [\cos(\omega t + \theta_s) + j \operatorname{sen}(\omega t + \theta_s)]\} = V_s \cos(\omega t + \theta_s) = v_s(t)$$

De manera que para pasar del espacio de la señal exponencial compleja dada al espacio real en el tiempo tan solo hay que calcular la parte real de la SEC.

$$v_s(t) = \operatorname{Re}\{\tilde{v}_s(t)\}$$

La derivada en el tiempo de la SEC es:

$$\frac{d\tilde{v}_s(t)}{dt} = \frac{dV_s \cdot e^{j(\omega t + \theta_s)}}{dt} = j\omega \cdot V_s \cdot e^{j(\omega t + \theta_s)} = j\omega \cdot \tilde{v}_s(t)$$

Lo que muestra que en el espacio de la SEC derivar la señal corresponde a multiplicarla por $j\omega$. Esto tiene una implicación importante a la hora de resolver ecuaciones diferenciales o de encontrar las relaciones entre corriente y voltaje en inductancias y capacitancias.

10.2.1. APLICACIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Dado que la señal exponencial compleja tiene exponenciales, al sacar sus derivadas en una ecuación diferencial vuelve a quedar una exponencial que se puede simplificar de la ecuación, dando como resultado una nueva ecuación puramente algebraica. Esto se muestra a continuación con una ecuación de orden uno, como la que tenemos para el voltaje en un condensador un circuito RC en serie ante entrada senoidal.

La ecuación del voltaje $v_c(t)$ en un circuito RC serie, para voltaje de entrada AC de la forma $v_{in}(t) = V_{in} \cos(\omega t + \theta_{in})$ es:

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_c(t) = \frac{1}{RC} v_{in}(t)$$

Al pasar al espacio de la SEC con $v_c(t)$ la ecuación toma la siguiente forma:

$$j\omega \tilde{v}_c(t) + \frac{1}{RC} \tilde{v}_c(t) = \frac{1}{RC} \tilde{v}_{in}(t)$$

$$\left[j\omega + \frac{1}{RC} \right] \tilde{v}_c(t) = \frac{1}{RC} \tilde{v}_{in}(t)$$

Recordemos que en el espacio de la SEC derivar equivale a multiplicar por $j\omega$. La solución para $v_c(t)$ se puede expresar como $v_c(t) = \text{Re}\{\tilde{v}_c(t)\}$, de manera que ahora debemos calcular primero $\tilde{v}_c(t)$, a partir de ecuaciones algebraicas y de allí al espacio del tiempo real, en vez de resolver la ecuación diferencial y evaluar el resultado en estado estable.

Despejando tenemos $\tilde{v}_c(t)$:

$$\tilde{v}_c(t) = \frac{1}{[1 + j\omega RC]} \tilde{v}_{in}(t)$$

Recordemos que las SEC se pueden expresar como un fasor multiplicado por $e^{j\omega t}$. Aplicando esto al resultado anterior tenemos:

$$\vec{V}_c \cdot e^{j\omega t} = \frac{1}{[1 + j\omega RC]} \vec{V}_{in} \cdot e^{j\omega t}$$

simplificando

$$\vec{V}_c = \frac{1}{[1 + j\omega RC]} \vec{V}_{in}$$

La Figura 10-2 muestra la relación de los fasores \vec{V}_{in} y \vec{V}_c en el plano complejo, especialmente la relación entre los ángulos y el cambio de magnitud.

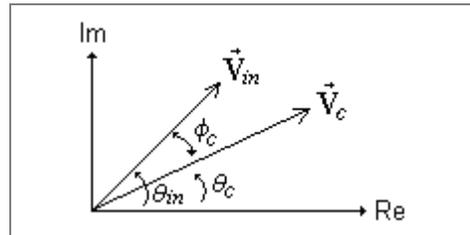


Figura 10-2

Conociendo la magnitud y el ángulo de fase de \vec{V}_c tenemos la solución en el tiempo:

$$v_c(t) = V_c \cos(\omega t + \theta_c)$$

$$V_c = \left| \vec{V}_c \right| = \left| \frac{1}{[1 + j\omega RC]} \vec{V}_{in} \right|$$

y

$$\theta_c = \left\langle \left(\frac{1}{[1 + j\omega RC]} \vec{V}_{in} \right) \right\rangle$$

Aplicando las normas de operaciones complejas tenemos para la magnitud:

$$V_C = \left| \vec{V}_C \right| = \left| \frac{1}{[1 + j\omega RC]} \right| \cdot \left| \vec{V}_{in} \right|$$

$$V_C = \frac{|1|}{|[1 + j\omega RC]|} \cdot \left| \vec{V}_{in} \right| = \frac{V_{in}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

y para el ángulo tenemos:

$$\theta_C = \langle \vec{V}_{in} \rangle - \langle (1 + j\omega RC) \rangle = \theta_{in} - \tan^{-1}(\omega RC)$$

Así que

$$v_C(t) = V_C \cos(\omega t + \theta_C)$$

$$v_C(t) = \frac{V_{in}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cos(\omega t + \theta_{in} - \tan^{-1}(\omega RC))$$

Esto indica que la señal de salida es igual a la de entrada pero con una atenuación de la magnitud de $1/\sqrt{1 + (\omega RC)^2}$ y un cambio de fase de $\phi_c = -\tan^{-1}(\omega RC)$, los cuales dependen de la frecuencia de operación ω .

10.3. IMPEDANCIA FASORIAL

Cuando la alimentación de un elemento (R, L o C) es una señal de tipo AC, por ejemplo $v_{in}(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$, la impedancia fasorial Z de un elemento se define como la relación entre el voltaje SEC y la corriente SEC del elemento, o lo que como se verá es equivalente a la relación entre el fasor de voltaje y el fasor de corriente del elemento:

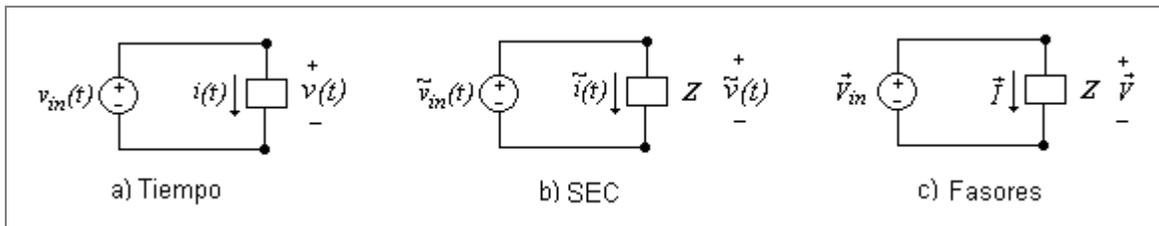


Figura 10-3

$$Z = \frac{\tilde{v}(t)}{\tilde{i}(t)} = \frac{\vec{V} \cdot e^{j\omega t}}{\vec{I} \cdot e^{j\omega t}} = \frac{\vec{V}}{\vec{I}}$$

Dado que la impedancia es la relación de dos fasores, que son complejos, la impedancia será también un complejo, el cual por supuesto tendrá magnitud y fase:

$$Z = |Z| \angle \theta_z$$

10.3.1. IMPEDANCIA DE UN CONDENSADOR

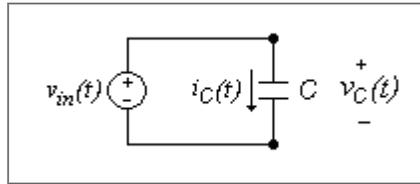


Figura 10-4

$$i_c(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$\tilde{i}_c(t) = C \frac{d\tilde{v}_c(t)}{dt}$$

$$\tilde{i}_c(t) = I_c e^{j\omega t} = C \frac{d\tilde{v}_c(t)}{dt} = C \frac{d(\tilde{V}_c e^{j\omega t})}{dt} = C\tilde{V}_c [j\omega e^{j\omega t}]$$

$$I_c e^{j\omega t} = C\tilde{V}_c [j\omega e^{j\omega t}]$$

$$I_c = C\tilde{V}_c [j\omega]$$

$$\frac{\tilde{V}_c}{I_c} = \frac{1}{j\omega C}$$

$$Z_C = \frac{\tilde{V}_c}{I_c} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ$$

La magnitud de la impedancia es $1/\omega C$ y su fase -90° .

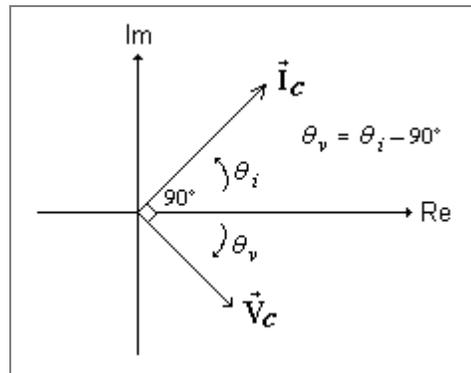


Figura 10-5

El fasor de corriente \vec{I}_c en un condensador está en adelanto con respecto al fasor de voltaje.

10.3.2. IMPEDANCIA DE UNA INDUCTANCIA

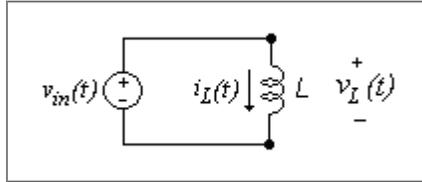


Figura 10-6

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$\tilde{v}_L(t) = L \frac{d\tilde{i}_L(t)}{dt}$$

$$\tilde{v}_L(t) = \tilde{V}_L e^{j\omega t} = L \frac{d\tilde{i}_L(t)}{dt} = L \frac{d(\tilde{I}_L e^{j\omega t})}{dt} = L \tilde{I}_L [j\omega e^{j\omega t}]$$

$$\tilde{V}_L e^{j\omega t} = L \tilde{I}_L [j\omega e^{j\omega t}]$$

$$\tilde{V}_L = L \tilde{I}_L [j\omega]$$

$$\frac{\tilde{V}_L}{\tilde{I}_L} = j\omega L$$

$$Z_L = \frac{\tilde{V}_L}{\tilde{I}_L} = j\omega L = \omega L \angle 90^\circ$$

La magnitud de la impedancia es ωL y su fase 90° .

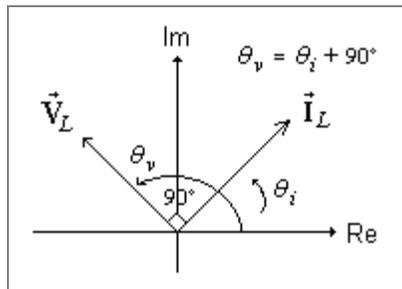


Figura 10-7

El fasor de corriente \tilde{I}_L en una inductancia está en retraso con respecto al fasor de voltaje.

10.3.3. IMPEDANCIA DE UNA RESISTENCIA

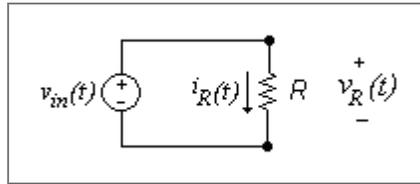


Figura 10-8

$$v_R(t) = Ri_R(t)$$

$$\tilde{v}_R(t) = R\tilde{i}_R(t)$$

$$\tilde{v}_R(t) = \tilde{V}_R e^{j\omega t} = R\tilde{i}_R(t) = R\tilde{I}_R e^{j\omega t}$$

$$\tilde{V}_R e^{j\omega t} = R\tilde{I}_R e^{j\omega t}$$

$$\tilde{V}_R = R\tilde{I}_R$$

$$\frac{\tilde{V}_R}{\tilde{I}_R} = R$$

$$Z_R = \frac{\tilde{V}_R}{\tilde{I}_R} = R = R \angle 0^\circ$$

La magnitud de la impedancia es R y su fase 0° .

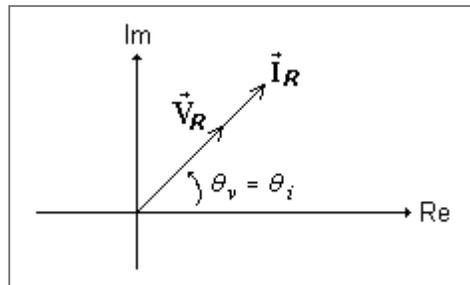


Figura 10-9

El fasor de corriente \tilde{I}_R en una resistencia está en fase con respecto al fasor de voltaje. En este caso la impedancia no depende de la frecuencia.

10.3.4. ADMITANCIA FASORIAL

Así como se define la relación de voltaje a corriente como la Impedancia se define su inverso y se denomina *Admitancia* Y :

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{\tilde{i}(t)}{\tilde{v}(t)} = \frac{\tilde{I}}{\tilde{V}}$$

10.3.5. COMPORTAMIENTO DE LAS IMPEDANCIAS CON LA FRECUENCIA

Como vimos anteriormente la impedancia de una capacitancia o una inductancia es función de la frecuencia, de manera que con frecuencia esta impedancia **Z** se escribe como **Z(jω)**.

La siguiente tabla muestra el comportamiento de la magnitud de la impedancia de cada elemento al variar la frecuencia entre cero (señal DC) y una alta frecuencia (señal AC de alta frecuencia).

Tabla 10-1.

	$Z(j\omega)$	$Y(j\omega)$	$ Z(\omega \rightarrow 0) $	$ Z(\omega \rightarrow \infty) $
<i>R</i>	<i>R</i>	$\frac{1}{R}$	<i>R</i>	<i>R</i>
<i>L</i>	$\frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ$	$j\omega C$	∞ <i>Circuito Abierto</i>	0 <i>Corto Circuito</i>
<i>C</i>	$j\omega L = \omega L \angle 90^\circ$	$\frac{1}{j\omega L} = -j \frac{1}{\omega L}$	0 <i>Corto Circuito</i>	∞ <i>Circuito Abierto</i>

10.3.6. IMPEDANCIA FASORIAL GENERALIZADA

En las secciones anteriores se presentó el concepto de impedancia de un elemento R, L o C. Al interconectar varios elementos de este tipo podemos tener un circuito de dos terminales para el cual podemos calcular su relación entre voltaje y corriente y por tanto encontrar una impedancia fasorial equivalente del circuito de dos terminales.

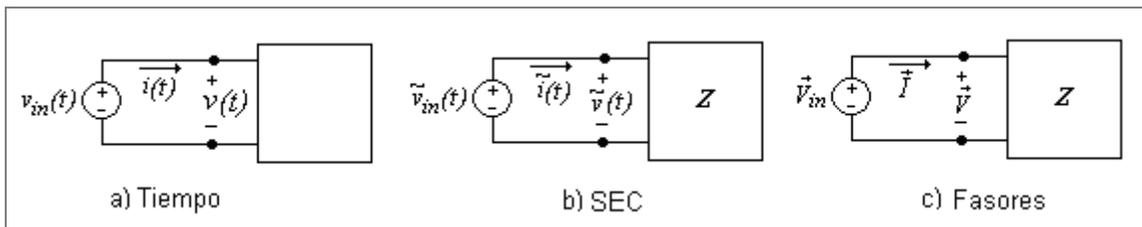


Figura 10-10

Nuevamente definimos la impedancia generalizada de un circuito de dos terminales como:

$$Z = \frac{\tilde{v}(t)}{\tilde{i}(t)} = \frac{\tilde{V}}{\tilde{I}} = |Z| \angle \theta_z$$

Dado que la impedancia es la relación de dos fasores esta será también un fasor, el cual por supuesto tendrá magnitud y fase o una parte real y otra imaginaria, ya que el fasor se expresa como un número complejo:

$$Z = |Z| \angle \theta_z = R + jX$$

Recordando que la impedancia también depende de la frecuencia (para los componentes L y C) podemos escribir:

$$Z(\omega) = |Z(\omega)| \angle \theta_z(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

El término $R(\omega)$ se conoce como la *Resistencia AC* y el término $X(\omega)$ se conoce como la *Reactancia AC*.

Ejemplo 10-1. Impedancia RLC en serie y frecuencia de resonancia.

Para el siguiente circuito encontrar:

- La impedancia del circuito de dos terminales de la figura (a) en forma rectangular y polar.
- La frecuencia de resonancia del circuito.

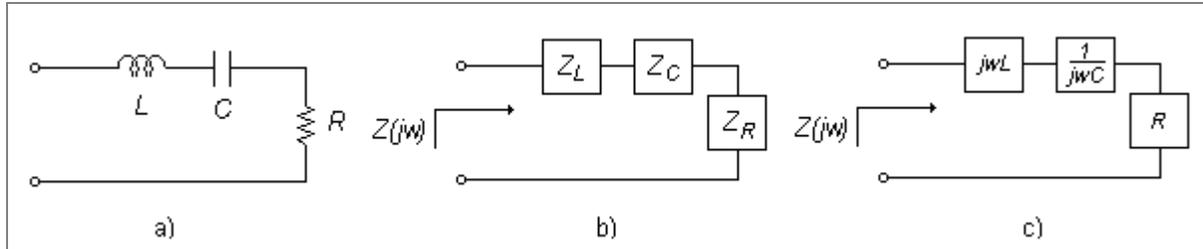


Figura 10-11

Solución

Parte a)

$$Z(\omega) = Z_L + Z_C + Z_R = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R$$

$$Z(\omega) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + j\left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}\right)$$

La anterior es la forma rectangular de la impedancia, donde la resistencia y la reactancia AC son respectivamente:

$$R(\omega) = R \text{ y } X(\omega) = \left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}\right)$$

Expresándolo en forma polar $Z = |Z| \angle \theta_z$ tenemos:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}\right)^2} \quad \text{y} \quad \theta_z = \tan^{-1}\left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega RC}\right)$$

Parte b)

La frecuencia de resonancia ω_r es aquella frecuencia para la cual la reactancia es cero:

$$X(\omega_r) = \left(\frac{\omega_r^2 LC - 1}{\omega_r C}\right) = 0$$

Por lo tanto

$$\omega_r^2 LC - 1 = 0$$

$$\omega_r^2 LC = 1$$

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Por lo tanto la impedancia en resonancia es:

$$Z(\omega_r) = |Z(\omega_r)| \angle \theta_z(\omega_r) = R(\omega_r) + jX(\omega_r) = R(\omega_r) = R$$

y así

$$|Z(\omega_r)| = R$$

$$\theta_z(\omega_r) = \tan^{-1}(0) = 0^\circ$$

Lo anterior muestra que cuando hay resonancia el circuito se comporta puramente resistivo y por lo tanto la corriente y el voltaje están en fase. Esto se comprueba por el hecho de que la fase de la impedancia es cero y recordando que $\vec{V} / \vec{I} = |Z| \angle \theta_z$ implica que para que las fases de \vec{V} y de \vec{I} deben ser iguales, lo que comprueba que están en fase.

Como se ve en este caso la frecuencia de resonancia depende de L y de C pero no de R .

Problema 1

Para el ejemplo anterior con $R=100$, $L=0.1$ y $C=2$ encontrar:

- $Z(\omega)$ en forma polar y rectangular si $f = 60\text{Hz}$
- La frecuencia de resonancia y $Z(\omega_r)$ en forma polar y rectangular.
- Si $v_{in}(t) = 120\cos(\omega t + 50^\circ)$ y $f = 60\text{Hz}$ calcular los fasores de voltaje V_{in} , V_L , V_C , V_R , y los respectivos voltajes en el tiempo $v_L(t)$, $v_C(t)$ y $v_R(t)$.

d. Encontrar la corriente en el tiempo $i(t)$ si $f = 60\text{Hz}$.

Problema 2

Encontrar la impedancia del siguiente circuito de dos terminales:

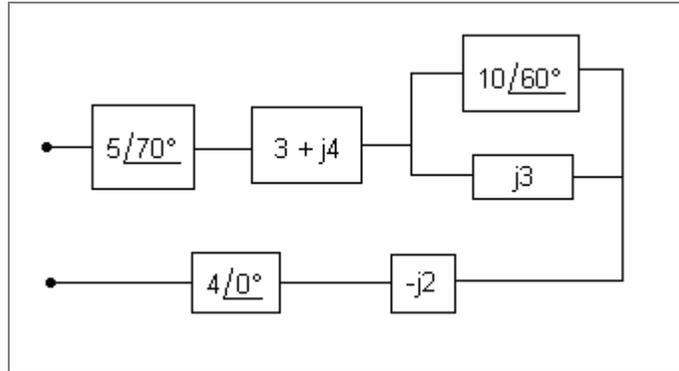


Figura 10-12

Ejemplo 10-2. Impedancia en Amplificadores Operacionales.

Encontrar \mathbf{V}_o y $v_o(t)$ si $v_i(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_i)$.

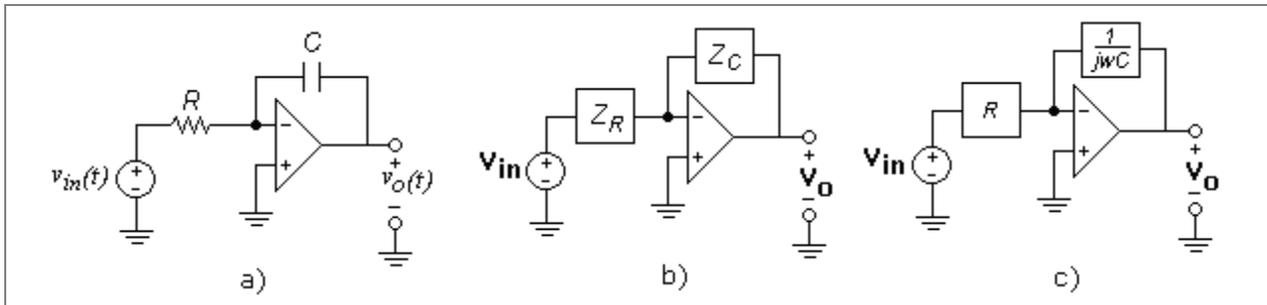


Figura 10-13

Solución

Con respecto a la figura (b) en la que el amplificador operacional está en configuración de inversor tenemos:

$$\frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_{in}} = -\frac{Z_C}{Z_R} = -\frac{1/j\omega C}{R} = -\frac{1}{j\omega RC} = j\frac{1}{\omega RC}$$

Como $v_i(t) = V_{in} \cos(\omega t + \theta_i)$ su fasor asociado es $\mathbf{V}_i = V_i \angle \theta_i$

$$\mathbf{V}_o = j\frac{1}{\omega RC} \mathbf{V}_{in} = j\frac{1}{\omega RC} (V_{in} \angle \theta_i) = \frac{V_{in}}{\omega RC} \angle (\theta_i + 90^\circ)$$

Por tanto la señal en el tiempo asociada a este fasor es:

$$v_o(t) = \frac{V_{in}}{\omega RC} \cos(\theta_i + 90^\circ)$$

Ejemplo 10-3. Circuito trifásico balanceado.

Para el siguiente circuito, que representa un sistema trifásico balanceado:

- Calcular los fasores VAB, VBC y VCA en forma rectangular y polar.
- Mostrar que la magnitud de las corrientes es igual a $|I_A| = |I_{AB}|(\sqrt{3})$.

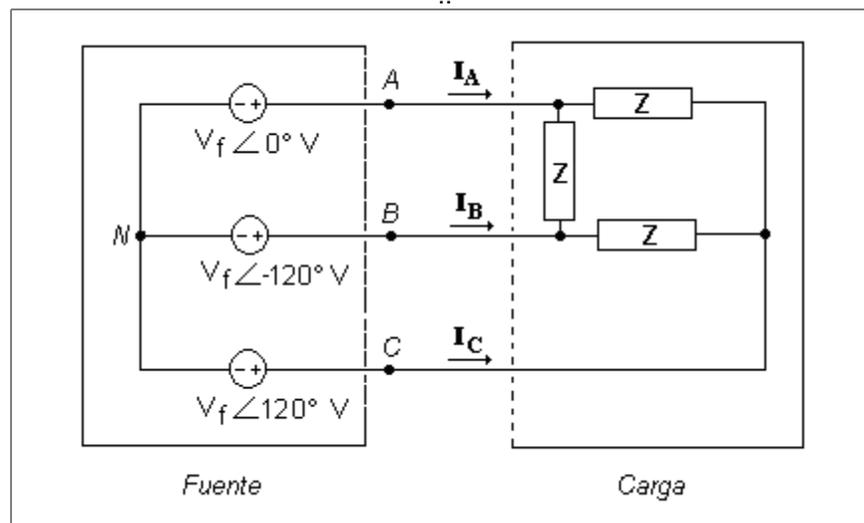


Figura 10-14

Solución

Parte a)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}_{AB} &= \mathbf{V}_{AN} + \mathbf{V}_{NB} \\
 &= V_f \angle 0^\circ + (-V_f \angle -120^\circ) \\
 &= V_f [1 - \cos(-120^\circ) - j \cdot \text{sen}(-120^\circ)] \\
 &= V_f \left[1 - (-0.5) - j \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] \\
 &= V_f \left[1.5 + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \text{ (forma rectangular)} \\
 &= V_f \sqrt{3} \angle 30^\circ \text{ (forma polar)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{BC} &= \mathbf{V}_{BN} + \mathbf{V}_{NC} \\
&= V_f \angle -120^\circ + (-V_f \angle 120^\circ) \\
&= V_f [\cos(-120^\circ) + j \operatorname{sen}(-120^\circ) - \cos(120^\circ) - j \operatorname{sen}(120^\circ)] \\
&= V_f [j \operatorname{sen}(-120^\circ) - j \operatorname{sen}(120^\circ)] \\
&= V_f \left[-j \frac{\sqrt{3}}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \\
&= V_f [-j\sqrt{3}] \\
&= V_f \sqrt{3} \angle -90^\circ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{CA} &= \mathbf{V}_{CN} + \mathbf{V}_{NA} \\
&= V_f \angle 120^\circ + (-V_f \angle 0^\circ) \\
&= V_f [\cos(120^\circ) + j \operatorname{sen}(120^\circ) - 1] \\
&= V_f \left[-0.5 + j \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right] \\
&= V_f \left[-1.5 + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \\
&= V_f \sqrt{3} \angle 150^\circ
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$|\mathbf{V}_{AB}| = |\mathbf{V}_{BC}| = |\mathbf{V}_{CA}| = V_f \sqrt{3} = V_L = V_{AN} \sqrt{3}$$

Los fasores \mathbf{V}_{AB} , \mathbf{V}_{BC} y \mathbf{V}_{CA} se conocen como los voltajes de línea y los fasores \mathbf{V}_{AN} , \mathbf{V}_{BN} y \mathbf{V}_{CN} se conocen como los voltajes de fase o de línea a neutro con magnitud V_f . Como se ve el voltaje de línea para esta configuración es $V_L = V_f \sqrt{3}$. Este tema se tratará a fondo más adelante en otro capítulo.

Parte b)

$$\begin{aligned}
I_A &= I_{AB} - I_{CA} \\
&= \frac{V_{AB}}{Z} - \frac{V_{CA}}{Z} \\
V_{AB} &= V_f \sqrt{3} \angle 30^\circ \\
V_{CA} &= V_f \sqrt{3} \angle 150^\circ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_A &= \frac{V_f \sqrt{3} \angle 30^\circ}{Z} - \frac{V_f \sqrt{3} \angle 150^\circ}{Z} \\
 &= \frac{V_f \sqrt{3}}{Z} (1 \angle 30^\circ - 1 \angle 150^\circ) \\
 &= \frac{V_f \sqrt{3}}{Z} (\cos(30^\circ) + j \operatorname{sen}(30^\circ) - \cos(150^\circ) - j \operatorname{sen}(150^\circ)) \\
 &= \frac{V_f \sqrt{3}}{Z} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - j \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{V_f \sqrt{3}}{Z} (\sqrt{3}) \\
 |I_A| &= \left| \frac{V_f \sqrt{3}}{Z} (\sqrt{3}) \right| = \left| \frac{V_{AB}}{Z} (\sqrt{3}) \right| = |I_{AB}| (\sqrt{3}) \\
 |I_A| &= |I_{AB}| (\sqrt{3})
 \end{aligned}$$

Ejemplo 10-4. Impedancia y función de transferencia en función de ω .

Para el circuito de la Figura 10-15 con voltaje de entrada AC:

- Encontrar la impedancia vista por la fuente en función de ω , R, C y L.
- Encontrar la función de transferencia $H(\omega) = V_{out} / V_{in}$.
- Encontrar la frecuencia ω_1 para la cual la magnitud de V_{out} es igual a la magnitud de V_{in} .
- Encontrar la frecuencia ω_m para la cual la magnitud de $H(\omega)$ tiene un máximo.
- Graficar la magnitud y la fase del $H(\omega)$ si $R = 10 \Omega$, $C = 5 \text{ mF}$ y $L = 5 \text{ mH}$ y calcular ω_m .

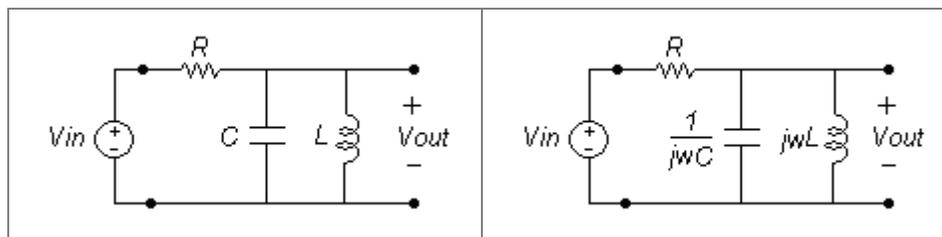


Figura 10-15

Solución**Parte a)**

$$Z = R + \left(\frac{1}{j\omega C} \right) // (j\omega L) = R + \frac{\left(\frac{1}{j\omega C} \right) \cdot (j\omega L)}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L} = R + j \left(\frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC} \right)$$

$$Z = R + j \left(\frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC} \right) = \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC} \right)^2} \angle \tan^{-1} \left(\frac{\omega L}{R(1 - \omega^2 LC)} \right)$$

Parte b)

Usando divisor de voltaje tenemos:

$$V_{out} = V_{in} \left(\frac{\left(\frac{1}{j\omega C} \right) // (j\omega L)}{R + \left(\frac{1}{j\omega C} \right) // (j\omega L)} \right) = V_{in} \left(\frac{\left(\frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC} \right)}{R + \left(\frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC} \right)} \right) = V_{in} \left(\frac{j\omega L}{R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L} \right)$$

$$H(\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{j\omega L}{R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L}$$

La magnitud será:

$$|H(\omega)| = \frac{\omega L}{\sqrt{[R(1 - \omega^2 LC)]^2 + (\omega L)^2}}$$

y la fase:

$$\langle H(\omega) \rangle = \langle j\omega L \rangle - \langle R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L \rangle = 90^\circ - \tan^{-1} \left(\frac{\omega L}{R(1 - \omega^2 LC)} \right)$$

$$\langle H(\omega) \rangle = 90^\circ - \tan^{-1} \left(\frac{\omega L}{R(1 - \omega^2 LC)} \right)$$

En forma polar tenemos:

$$H(\omega) = |H(\omega)| \angle \langle H(\omega) \rangle = \frac{j\omega L}{\sqrt{[R(1 - \omega^2 LC)]^2 + (\omega L)^2}} \angle \left(90^\circ - \tan^{-1} \left(\frac{\omega L}{R(1 - \omega^2 LC)} \right) \right)$$

Parte d)

Para que las dos magnitudes sean iguales se requiere que $|H(\omega_1)| = V_{out}/V_{in} = 1$

$$|H(\omega_1)| = \frac{\omega_1 L}{\sqrt{[R(1 - \omega_1^2 LC)]^2 + (\omega_1 L)^2}} = 1$$

$$\omega_1 L = \sqrt{[R(1 - \omega_1^2 LC)]^2 + (\omega_1 L)^2}$$

$$(\omega_1 L)^2 = [R(1 - \omega_1^2 LC)]^2 + (\omega_1 L)^2$$

$$0 = [R(1 - \omega_1^2 LC)]^2$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Parte d)

Para encontrar la frecuencia ω_m para la cual la magnitud de $H(\omega)$ tiene un máximo vamos a derivar $|H(\omega)|$ con respecto a ω e igualamos a cero:

$$\left. \frac{d|H(\omega)|}{d\omega} = \frac{d\left(\frac{\omega L}{\sqrt{[R(1 - \omega^2 LC)]^2 + (\omega L)^2}} \right)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_1} = 0$$

Resolviendo esta ecuación llegamos a que

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_1$$

Parte e)

$$\omega_m = \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(0.005H)(0.005F)}} = 200 \text{ rad/seg}$$

Usando las expresiones encontradas para la magnitud y para la fase, y haciendo variar ω tenemos:

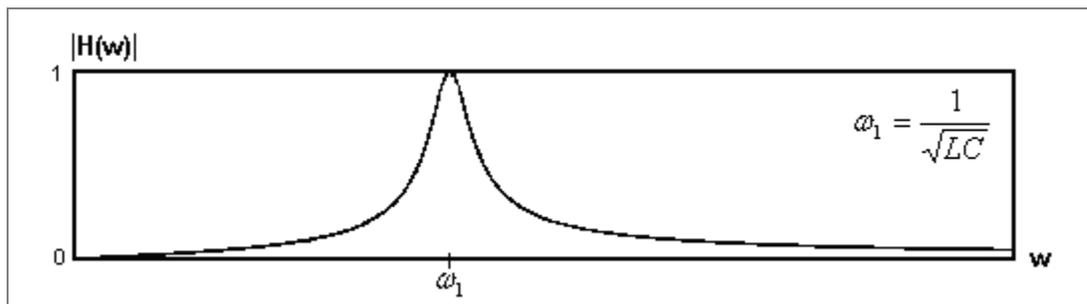


Figura 10-16

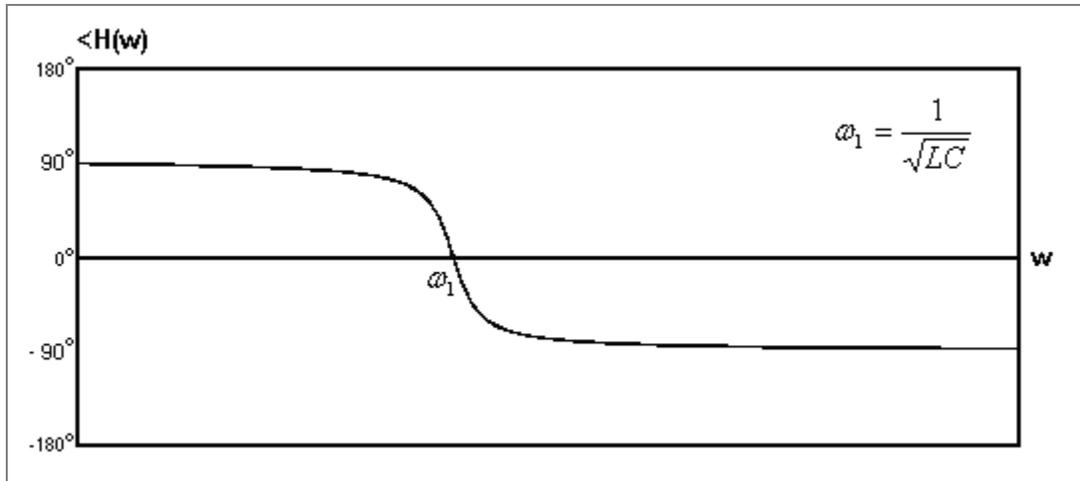


Figura 10-17

Ejemplo 10-5. Impedancia y frecuencia de resonancia.

Para el circuito de la Figura 10-18:

- Encontrar la impedancia vista por la fuente.
- Encontrar la frecuencia de resonancia en función de R , C_1 , C_2 y L .
- Encontrar el circuito equivalente en DC y en alta frecuencia.

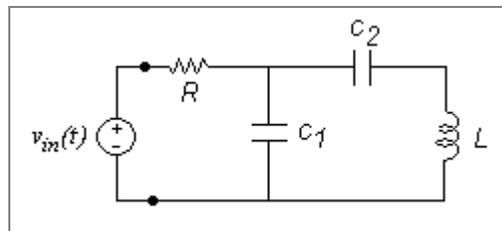


Figura 10-18

Solución

Parte a)

$$\begin{aligned}
 Z &= R + \left(\frac{1}{j\omega C_1} \right) // \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C_2} \right) = R + \frac{\left(\frac{1}{j\omega C_1} \right) \cdot \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C_2} \right)}{\frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L + \frac{1}{j\omega C_2}} = R + \frac{(j\omega L)(j\omega C_2) + 1}{j\omega C_2 + j\omega C_1 + j\omega L(-\omega^2 C_1 C_2)} \\
 &= R + \frac{1 - \omega^2 LC_2}{j \cdot [-\omega^3 LC_1 C_2 + \omega(C_2 + C_1)]} = R + \frac{1 - \omega^2 LC_2}{-j\omega \cdot [\omega^2 LC_1 C_2 - (C_1 + C_2)]} \\
 &= R + j \frac{1 - \omega^2 LC_2}{\omega \cdot [\omega^2 LC_1 C_2 - (C_1 + C_2)]}
 \end{aligned}$$

Parte b)

$$Z = R(\omega) + jX(\omega)$$

$$X(\omega_{res}) = 0 = \frac{1 - \omega_{res}^2 LC_2}{\omega_{res} \cdot [\omega_{res}^2 LC_1 C_2 - (C_1 + C_2)]} \Rightarrow \omega_{res} = \frac{1}{\sqrt{LC_2}}$$

Parte c)

En la Figura 10-19 se puede ver el circuito para DC y para frecuencias altas equivalente.

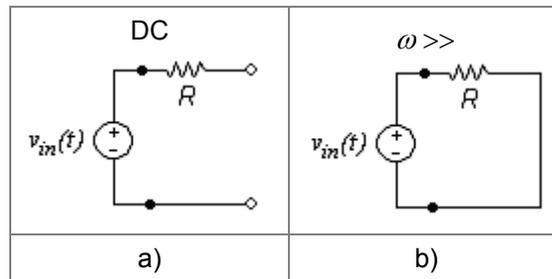


Figura 10-19

Ejemplo 10-6. Impedancia y frecuencia de resonancia.

Dado los siguientes circuitos calcular:

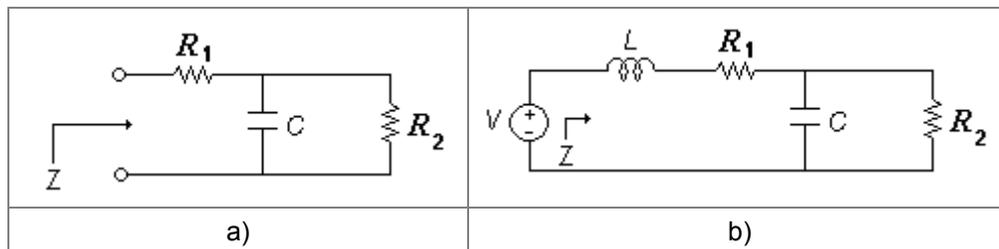


Figura 10-20

- La impedancia Z del circuito (a).
- La impedancia Z del circuito (b).
- La frecuencia de resonancia ω_{res} del circuito (b) en función de L , R_1 , R_2 y C .
- La frecuencia de resonancia ω_{res} reemplazando los valores dados $R_1 = 1\text{k}\Omega$, $R_2 = 5\text{k}\Omega$, $C = 2\mu\text{F}$ y $L = 1\text{mH}$.
- La impedancia para la frecuencia de resonancia ω_{res} .

Solución**Parte a)**

$$\begin{aligned}
Z &= R_1 + (Z_C // Z_{R_2}) = R_1 + \left(\frac{1}{j\omega C} // R_2 \right) \\
&= R_1 + \left(\frac{\frac{1}{j\omega C} \cdot R_2}{\frac{1}{j\omega C} + R_2} \right) \left(\frac{j\omega C}{j\omega C} \right) = R_1 + \frac{R_2}{1 + j\omega CR_2} \\
&= R_1 + \frac{R_2}{1 + j\omega CR_2} \cdot \frac{1 - j\omega CR_2}{1 - j\omega CR_2} = R_1 + \frac{R_2 - j\omega CR_2^2}{1 + (\omega CR_2)^2} \\
&= R_1 + \frac{R_2}{1 + (\omega CR_2)^2} - j \cdot \left(\frac{\omega CR_2^2}{1 + (\omega CR_2)^2} \right) \\
Z &= R(\omega) + jX(\omega)
\end{aligned}$$

$R(\omega) = R_1 + \frac{R_2}{1 + (\omega CR_2)^2}$
$X(\omega) = \frac{-\omega CR_2^2}{1 + (\omega CR_2)^2}$

Parte b)

La impedancia es la misma del punto anterior más la impedancia de la inductancia.

$$\begin{aligned}
Z &= j\omega L + R_1 + \frac{R_2}{1 + (\omega CR_2)^2} - j \cdot \left(\frac{\omega CR_2^2}{1 + (\omega CR_2)^2} \right) \\
Z &= R(\omega) + jX(\omega)
\end{aligned}$$

$$R(\omega) = R_1 + \frac{R_2}{1 + (\omega CR_2)^2}$$

$$X(\omega) = \omega L - \frac{\omega CR_2^2}{1 + (\omega CR_2)^2}$$

Parte c)

$$X(\omega_{\text{res}}) = 0 \Rightarrow \omega_{\text{res}} L - \frac{\omega_{\text{res}} CR_2^2}{1 + (\omega_{\text{res}} CR_2)^2} = 0$$

$$\omega_{\text{res}} L = \frac{\omega_{\text{res}} CR_2^2}{1 + (\omega_{\text{res}} CR_2)^2}$$

$$\omega_{\text{res}} = \frac{1}{CR_2} \sqrt{\frac{CR_2^2}{L} - 1}$$

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{(CR_2)^2}}$$

Parte d)

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{1}{1 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^{-6}} - \frac{1}{(2 \times 10^{-6} \times 5 \times 10^3)^2}} = 22360 \text{ rad/seg}$$

Parte e)

$$R(\omega_{\text{res}}) = R_1 + \frac{R_2}{1 + (\omega_{\text{res}} CR_2)^2} = 1000 + \frac{2000}{1 + (22360 \times 2 \times 10^{-6} \times 5 \times 10^3)^2}$$

$$= 1000.1 \Omega$$

$$Z(\omega_{\text{res}}) = R(\omega_{\text{res}}) = 1000.1 \Omega$$

Como está en resonancia el ángulo de fase es cero.

Ejemplo 10-7. Fasores y fuentes controladas.

Dado el siguiente circuito:

- Encontrar una expresión para $i_x(t)$ si $V_i(t) = 10\cos(120t + 50^\circ)\text{V}$
- Calcular $i_x(t)$ si $R = 1\text{k}\Omega$, $C = 2\mu\text{F}$ y $L = 1\text{mH}$

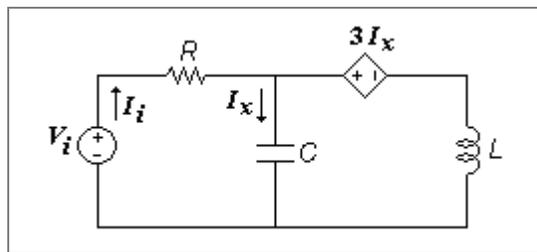


Figura 10-21

Solución

Parte a)

El equivalente del circuito se presenta en la siguiente figura:

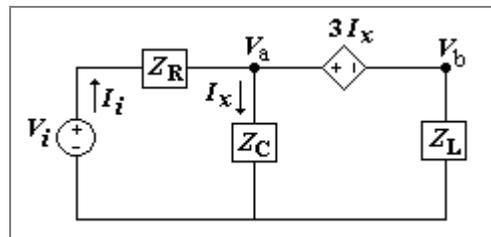


Figura 10-22

$$V_a = V_b + 3I_X \Rightarrow V_b = V_a - 3I_X$$

$$V_a = V_b + 3I_X \Rightarrow V_b = V_a - 3I_X$$

$$\frac{V_a - V_i}{Z_R} + \frac{V_a}{Z_C} + \frac{V_b}{Z_L} = 0$$

$$V_a \left(\frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_C} \right) - \frac{V_i}{Z_R} + \frac{V_a - 3I_X}{Z_L} = 0$$

$$V_a \left(\frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_C} \right) - \frac{V_i}{Z_R} + \frac{V_a}{Z_L} - \frac{3}{Z_L} \left(\frac{V_a}{Z_C} \right) = 0$$

$$V_a \left(\frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L} - \frac{3}{Z_L Z_C} \right) = \frac{V_i}{Z_R}$$

$$V_a = \frac{V_i}{Z_R \left(\frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L} - \frac{3}{Z_L Z_C} \right)}$$

$$I_X = \frac{V_a}{Z_C} = \frac{V_i}{Z_C Z_R \left(\frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L} - \frac{3}{Z_L Z_C} \right)}$$

$$I_X = \frac{Z_L \cdot V_i}{Z_C Z_L + Z_L Z_R + Z_C Z_R - 3Z_R}$$

$$= \frac{j\omega L}{\frac{j\omega L}{j\omega C} + j\omega RL + \frac{R}{j\omega C} - 3R} V_i$$

$$= \frac{j\omega L}{\frac{L}{C} + j\omega RL - j\frac{R}{\omega C} - 3R} V_i$$

$$I_X = \frac{j\omega^2 LC}{(\omega L - 3\omega RC) + j \cdot (\omega^2 RLC - R)} V_i$$

$$V_i(t) = 10 \cos(120t + 50^\circ) \text{ V} \Rightarrow \mathbf{V}_i = 10 \angle 50^\circ \quad \omega = 120$$

Parte b:

Si $R=1\text{k}\Omega$, $C=2\mu\text{F}$ y $L=1\text{mH}$

$$I_X = \frac{j(120)^2 (1 \times 10^{-3}) (2 \times 10^{-6})}{(120 \times 10^{-3} - 3 \cdot (120) \times 10^{-3} \times 2 \times 10^{-6}) + j \cdot (120^2 \times 10^3 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^{-6} - 10^3)} V_i$$

$$= \frac{j \cdot 2.88 \times 10^{-5}}{-0.6 + j \cdot (-1000)} \cdot 10 \angle 50^\circ = \frac{(2.88 \times 10^{-5} \angle 90^\circ) \cdot (10 \angle 90^\circ)}{-1000 \angle 90^\circ}$$

$$\mathbf{I}_X = 2.88 \times 10^{-7} \angle -90^\circ$$

$$i_X(t) = 2.88 \times 10^{-7} \cos(120t - 90^\circ)$$

Ejemplo 10-8. Fasores y resonancia.

Dado el siguiente circuito con entrada AC, para la cual $i(t)$ y $v(t)$ están en fase, encontrar:

- Una expresión para ω_{res} .
- La magnitud de la corriente sabiendo que V_{pico} es 10V.
- Calcular los valores numéricos de (a) y (b) si $L = 1\text{H}$, $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 1\Omega$ y $C = 1/5\text{F}$.

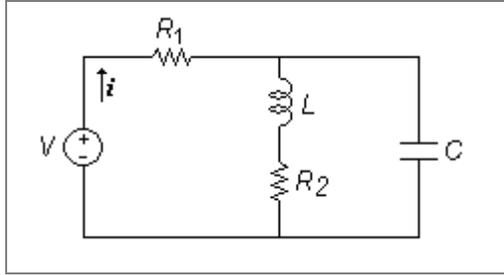


Figura 10-23

Solución

Parte a)

$$\mathbf{V} = V_m \angle \theta_V$$

$$\mathbf{I} = I_m \angle \theta_i$$

Cuando voltaje y corriente están en fase $\theta_V = \theta_i$.

$$\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = Z_m \angle \theta_Z = \frac{V_m \angle \theta_V}{I_m \angle \theta_i} = \frac{V_m}{I_m} \angle (\theta_V - \theta_i) = \frac{V_m}{I_m} \angle 0^\circ \Rightarrow$$

$$Z_m = \frac{V_m}{I_m} \quad \theta_Z = 0^\circ \quad X(\omega_{res}) = 0$$

$$Z = R_1 + (Z_L + Z_{R_2}) // Z_C$$

$$= R_1 + \frac{Z_C(Z_L + R_2)}{R_2 + Z_L + Z_C} = R_1 + \frac{Z_L Z_C + R_2 Z_C}{R_2 + Z_L + Z_C} = R_1 + \frac{\frac{j\omega L}{j\omega C} + \frac{R_2}{j\omega C}}{R_2 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \left(\frac{j\omega C}{j\omega C} \right)$$

$$= R_1 + \frac{R_2 + j\omega L}{(1 - \omega^2 LC) + j(\omega R_2 C)} = R_1 + \frac{R_2 + j\omega L}{(1 - \omega^2 LC) + j(\omega R_2 C)} \cdot \frac{(1 - \omega^2 LC) - j(\omega R_2 C)}{(1 - \omega^2 LC) - j(\omega R_2 C)}$$

$$\text{Como } \frac{a + jb}{c + jd} = \frac{a + jb}{c + jd} \cdot \frac{c - jd}{c - jd} = \frac{(ac + bd) + j(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{a + jb}{c + jd}\right) = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} = 0 \Rightarrow bc - ad = 0$$

Para este caso: $a = R_2$ $b = \omega_{res} L$ $c = 1 - \omega_{res}^2 LC$ $d = \omega_{res} R_2 C$

Reemplazando se obtiene:

$$\begin{aligned} bc - ad &= 0 \\ (\omega_{res} L)(1 - \omega_{res}^2 LC) - (R_2)(\omega_{res} R_2 C) &= 0 \\ L(1 - \omega_{res}^2 LC) - R_2^2 C &= 0 \\ L - \omega_{res}^2 L^2 C - R_2^2 C &= 0 \\ \omega_{res}^2 L^2 C &= L - R_2^2 C \\ \omega_{res}^2 &= \frac{1}{LC} - \left(\frac{R_2}{L}\right)^2 \\ \omega_{res} &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_2}{L}\right)^2} \end{aligned}$$

Parte b)

$$I = \frac{V}{Z} \quad Z(\omega_0) = R(\omega_0) + jX(\omega_0) = R(\omega_0) = \operatorname{Re}(Z(\omega))$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(Z) &= R_1 + \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} = R_1 + \frac{(R_2)(1 - \omega^2 LC) + (\omega L)(\omega R_2 C)}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega R_2 C)^2} = R_1 + \frac{R_2 - \omega^2 R_2 LC + \omega^2 R_2 LC}{1 - 2\omega^2 LC + \omega^4 L^2 C^2 + \omega^2 R_2^2 C^2} \\ &= R_1 + \frac{R_2}{1 + \omega^2 (R_2^2 C^2 - 2LC) + \omega^4 L^2 C^2} \end{aligned}$$

Reemplazando por el valor de ω encontrado en el numeral (a) se obtiene:

$$\operatorname{Re}(Z) = R_1 + \frac{R_2}{1 + \omega^2 (R_2^2 C^2 - 2LC) + \omega^4 L^2 C^2} \Big|_{\omega=\omega_0} = R_1 + \frac{R_2}{\frac{R_2^2 C}{L}} = R_1 + \frac{L}{R_2 C}$$

$$\boxed{Z(\omega_0) = R(\omega_0) + jX(\omega_0) = R(\omega_0) = R_1 + \frac{L}{R_2 C} = Z_0}$$

$$\mathbf{I}_0 = \frac{\mathbf{V}}{Z_0} = \frac{10 \angle \theta_V}{R_1 + \frac{L}{R_2 C}}$$

$$\boxed{I_{\text{pico}} = \frac{10}{R_1 + \frac{L}{R_2 C}}} \quad \boxed{\theta_i = \theta_V}$$

Parte c)

Con $L=1\text{H}$, $R_1=2\ \Omega$, $R_2=1\ \Omega$, $C = 1/5\text{F}$.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_2}{L}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{1/5} - \left(\frac{1}{1}\right)^2} = \sqrt{5-1}$$

$$\omega_0 = 2$$

$$I_{\text{pico}} = \frac{10}{R_1 + \frac{L}{R_2 C}} = \frac{10}{2 + \frac{1}{1(1/5)}}$$

$$I_{\text{pico}} = \frac{10}{7} \text{ A}$$

Ejemplo 10-9. Fasores y resonancia.

Una fuente con voltaje $v_s(t) = 10 \cos(5t + 40^\circ) \text{V}$ alimenta una impedancia con $|Z| = 5\ \Omega$. Calcular $i_s(t)$ si se sabe que el circuito opera a la frecuencia de resonancia.

Solución

$$v_s(t) = 10 \cos(5t + 40^\circ) \text{V} \Rightarrow \mathbf{V}_s = 10 \angle 40^\circ \quad \omega = 5$$

$$|Z| = 5\ \Omega$$

Si hay resonancia \mathbf{V}_s está en fase con \mathbf{I}_s :

$$\mathbf{I}_s = I_s \angle 40^\circ = \frac{\mathbf{V}_s}{Z} = \frac{10 \angle 40^\circ}{Z_m \angle \theta_z}$$

$$I_s = \frac{10}{|Z|} = \frac{10}{5} = 2$$

$$40^\circ = 40^\circ - \theta_z \Rightarrow \theta_z = 0^\circ$$

por lo tanto,

$$\mathbf{I}_s = 2 \angle 40^\circ \Rightarrow i_s(t) = 2 \cos(5t + 40^\circ)$$

Ejemplo 10-10. Fasores y w.

Para la red mostrada en la siguiente figura, con señal de entrada AC:

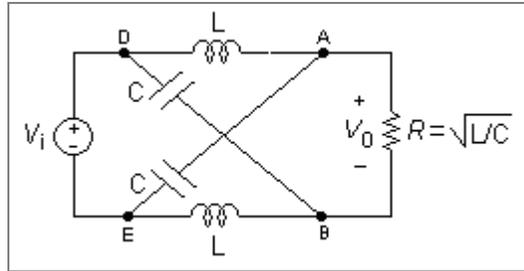


Figura 10-24

- Demstrar que $|V_o|=|V_i|$ independientemente de la frecuencia.
- Dar una explicación física a lo anterior.
- Mostrar que la fase entre V_o y V_i cambia de 0° a -180° al variar la frecuencia entre cero e infinito haciendo los cálculos necesarios y graficando la fase.

Solución

Parte a)

Hay cuatro nodos pero uno es tierra (E) y otro es el de la fuente (D), por consiguiente, quedan dos nodos:

<i>nodo A:</i>	$\frac{V_A - V_i}{Z_L} + \frac{V_A}{Z_C} + \frac{V_A - V_B}{Z_R} = 0$ $V_A \left(\frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_R} \right) - \frac{1}{Z_R} V_B = \frac{V_i}{Z_L}$
<i>nodo B:</i>	$\frac{V_B - V_A}{Z_R} + \frac{V_B - V_i}{Z_C} + \frac{V_B}{Z_L} = 0$ $-\frac{1}{Z_R} V_A + V_B \left(\frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L} \right) = \frac{V_i}{Z_C}$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_R} & -\frac{1}{Z_R} \\ -\frac{1}{Z_R} & \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_L} \\ \frac{1}{Z_C} \end{bmatrix} V_i$$

Se necesita despejar V_A y V_B del sistema para obtener:

$$V_0 = V_A - V_B$$

Para un sistema:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

con $a=d$ y $b=c$ se tiene:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} u & b \\ v & a \end{vmatrix}}{a^2 - b^2} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & u \\ b & v \end{vmatrix}}{a^2 - b^2}$$

$$x_1 - x_2 = \frac{(au - bv) - (av - ub)}{a^2 - b^2} = \frac{a(u - v) + b(u - v)}{a^2 - b^2} = \frac{(u - v)(a + b)}{(a - b)(a + b)} = \frac{u - v}{a - b}$$

Aplicando esta solución al circuito se obtiene:

$$V_0 = V_A - V_B = V_i \frac{\frac{1}{Z_L} - \frac{1}{Z_C}}{\frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_R} - \frac{1}{Z_R}} = V_i \frac{\frac{1}{Z_L} - \frac{1}{Z_C}}{\frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} + \frac{2}{Z_R}} = V_i \frac{Y_L - Y_C}{Y_L + Y_C + 2Y_R}$$

$$V_0 = V_i \left[\frac{\frac{1}{j\omega L} - j\omega C}{\frac{1}{j\omega L} + j\omega C + 2\sqrt{\frac{C}{L}}} \right] \cdot \frac{j\omega L}{j\omega L} = V_i \left[\frac{1 + \omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC + j(2\omega\sqrt{LC})} \right]_{H(j\omega)}$$

$$V_0 = V_i \cdot H(j\omega)$$

$$|V_0| = |V_i| \cdot |H(j\omega)|$$

$$H(j\omega) = \frac{1 + \omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC + j(2\omega\sqrt{LC})}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1 + \omega^2 LC}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (2\omega\sqrt{LC})^2}} = \frac{1 + \omega^2 LC}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (2\omega\sqrt{LC})^2}}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1 + \omega^2 LC}{\sqrt{1 - 2\omega^2 LC + (\omega^2 LC)^2 + 4\omega^2 LC}}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1 + \omega^2 LC}{\sqrt{1 + 2\omega^2 LC + (\omega^2 LC)^2}} = \frac{1 + \omega^2 LC}{\sqrt{(1 + \omega^2 LC)^2}} = \frac{1 + \omega^2 LC}{1 + \omega^2 LC} = 1$$

$$\Rightarrow |V_0| = |V_i|$$

Parte b)

$$\angle V_0 = \angle(V_i \cdot H(j\omega)) = \angle V_i + \angle H(j\omega)$$

$$\begin{aligned}\phi &= \angle V_o - \angle V_i = \angle H(j\omega) = \angle(1 + \omega^2 LC) - \angle(1 - \omega^2 LC + j(2\omega\sqrt{LC})) \\ &= 0 - \angle(1 - \omega^2 LC + j(2\omega\sqrt{LC})) \\ &= -\tan^{-1}\left(\frac{2\omega\sqrt{LC}}{1 - \omega^2 LC}\right)\end{aligned}$$

Para $\omega_0 = 0$:

$$\phi = -\tan^{-1}(0) = 0^\circ$$

Para $\omega_\infty \rightarrow \infty$:

$$\phi = -\lim_{\omega \rightarrow \infty} \tan^{-1}\left(\frac{2\omega\sqrt{LC}}{1 - \omega^2 LC}\right) = -180^\circ$$

Parte c)

A baja frecuencia ($\omega \rightarrow 0$):

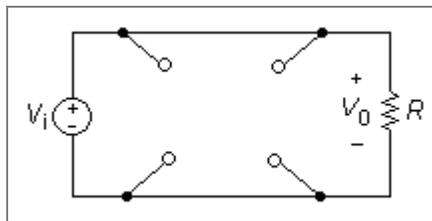


Figura 10-25

$$\begin{aligned}\phi &= \angle V_o - \angle V_i \\ \mathbf{V}_o &= \mathbf{V}_i \rightarrow \phi = 0\end{aligned}$$

A alta frecuencia ($\omega \rightarrow \infty$):

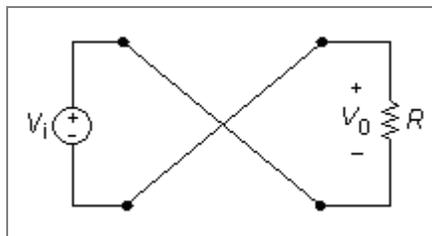


Figura 10-26

$$\begin{aligned}\phi &= \angle V_o - \angle V_i \\ \mathbf{V}_o &= -\mathbf{V}_i \rightarrow \angle V_o = \angle V_i - 180^\circ \rightarrow \phi = -180^\circ\end{aligned}$$

10.4. SIMULACIONES

10.4.1. SEÑAL EXPONENCIAL COMPLEJA Y FASORES.

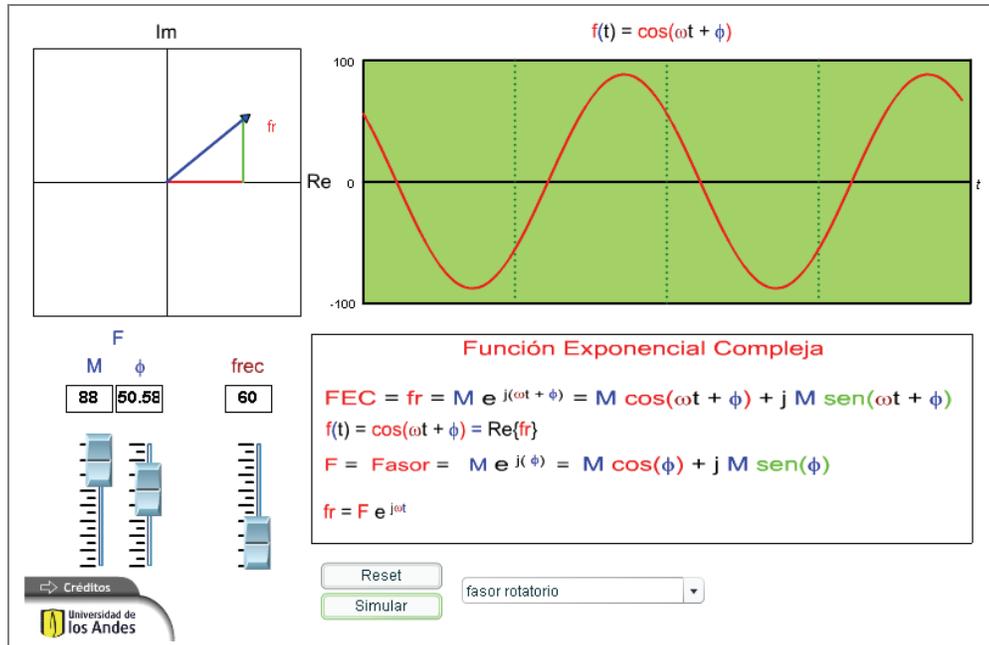


Figura 10-27

Descripción

Esta simulación permite mostrar la relación entre una señal senoidal y su señal exponencial compleja SEC (fasor rotatorio) asociada y como transformar de una a otra señal en los dos sentidos. También permite ver la relación entre la SEC y el Fasor asociado y entre este fasor y la señal senoidal viendo la correspondencia entre sus magnitudes y ángulos de fase.

Uso educativo

Esta simulación se presenta como un complemento a la clase presencial, para estudiantes de primeros semestres de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Mecánica. Una vez los estudiantes manejan los conceptos de señal exponencial compleja y fasores pueden interactuar con la simulación para ver los efectos de los cambios en la magnitud y la fase de un fasor con la señal senoidal asociada al mismo.

10.4.2. FASORES. MAGNITUD Y FASE.

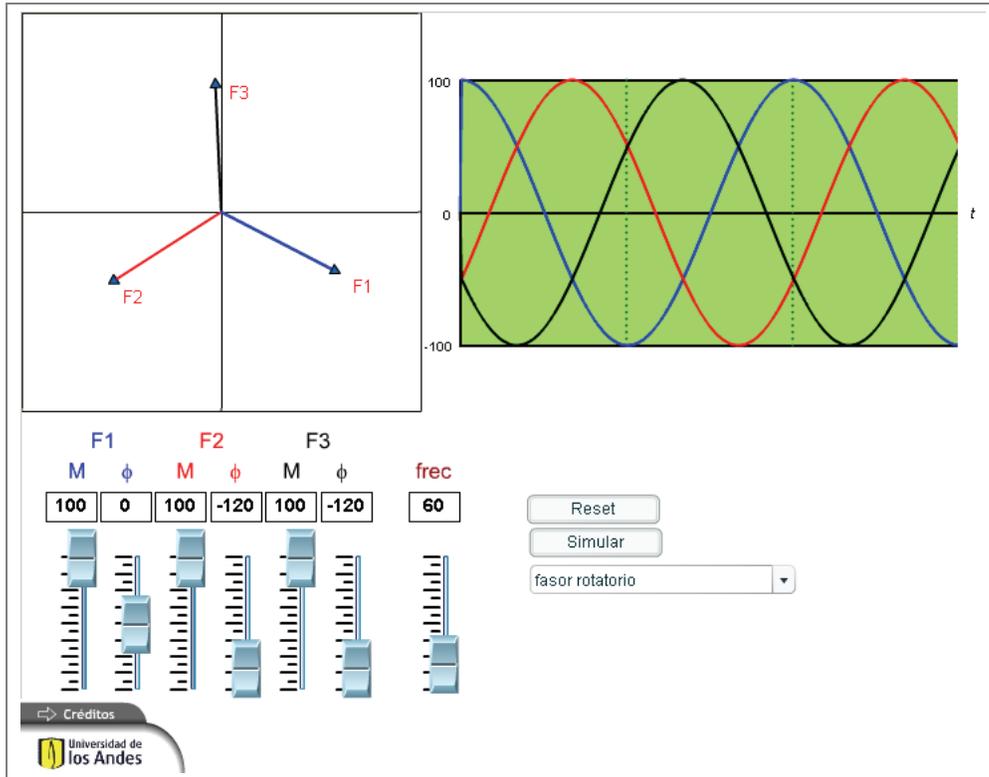


Figura 10-28

Descripción

Esta simulación permite mostrar la relación entre una señal senoidal y su señal exponencial compleja SEC (fasor rotatorio) asociada. También permite ver la relación entre la diferencia de los ángulos de fase de varios fasores y el desfase en las señales senoidales asociadas. Con el uso de tres fasores permite explicar los conceptos de fuentes trifásicas.

Uso educativo

Esta simulación se presenta como un complemento a la clase presencial, para estudiantes de primeros semestres de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Mecánica. Una vez los estudiantes manejan los conceptos de señal exponencial compleja y fasores pueden interactuar con la simulación para ver las relaciones entre los ángulos de fase de los fasores y la fase de las señales senoidales asociadas.

10.4.3. FASORES. OPERACIONES

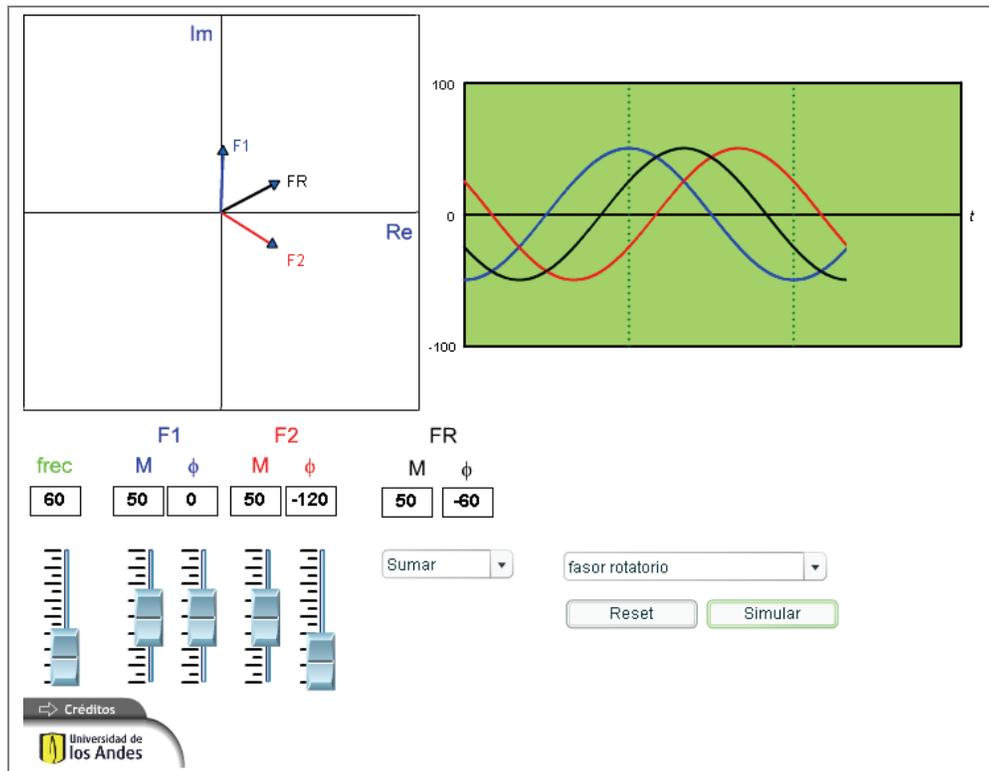


Figura 10-29

Descripción

Esta simulación permite mostrar los resultados de sumar, restar y multiplicar señales exponenciales complejas SEC o fasores y el resultado en las señales senoidales asociadas a ellos. Muestra los cambios en la magnitud y fase de la señal resultado al variar los fasores originales y el cambio en la frecuencia al multiplicar dos SEC.

Uso educativo

Esta simulación se presenta como un complemento a la clase presencial, para estudiantes de primeros semestres de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Mecánica. Una vez los estudiantes manejan los conceptos de señal exponencial compleja y fasores y operaciones entre ellos pueden interactuar con la simulación para ver las relaciones entre los ángulos de fase y las magnitudes de los fasores originales y los del fasor resultante o la señal senoidal resultante. Al multiplicar dos señales de la misma frecuencia muestra como la señal resultante tiene una frecuencia duplicada.

10.4.4. FASORES. MAGNITUD Y FASE

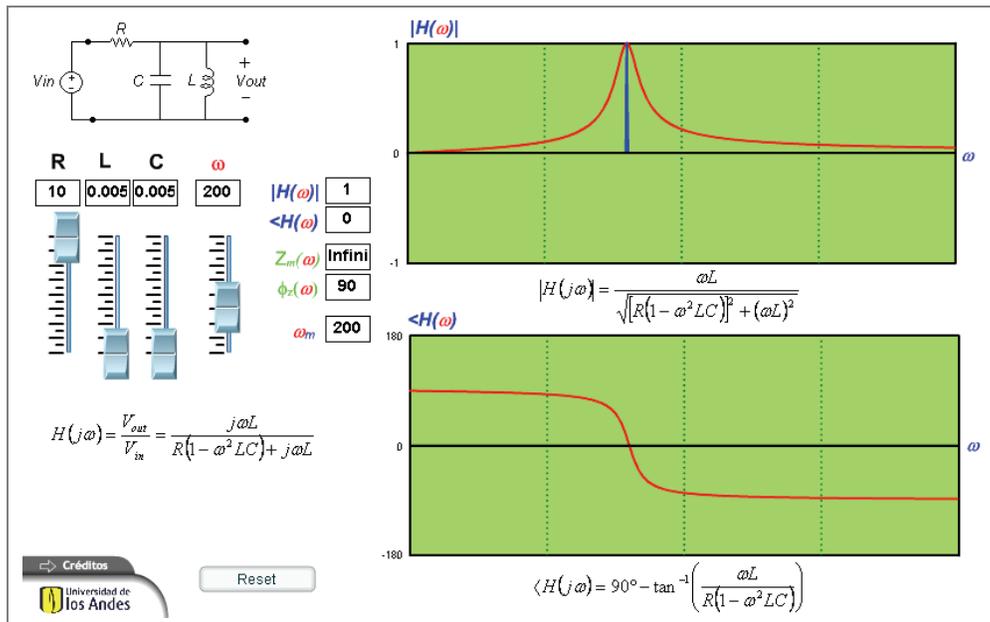


Figura 10-30

Descripción

Esta simulación permite mostrar la dependencia de la magnitud y la fase de la impedancia y de una la función de transferencia en función de la frecuencia.

Uso educativo

Esta simulación se presenta como un complemento a la clase presencial, para estudiantes de primeros semestres de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Mecánica. Una vez los estudiantes manejan los conceptos fasores y su magnitud y fase en función de la frecuencia ellos pueden interactuar con la simulación para ver cómo la función de magnitud o la función de fase de una función de transferencia, respecto a la frecuencia depende de los valores particulares que tengan los componentes del circuito (R , L o C). Igualmente puede observar la variación de la impedancia respecto a la frecuencia.

10.4.5. POTENCIA AC EN ESTADO ESTABLE

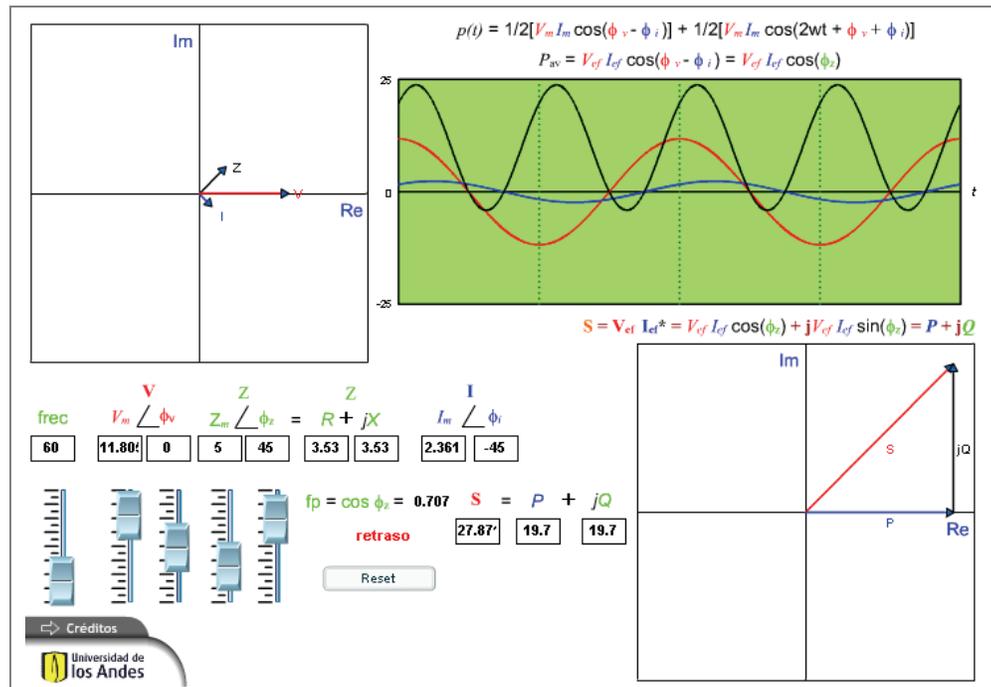


Figura 10-31

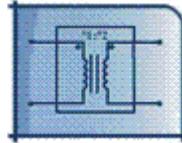
Descripción

Esta simulación permite mostrar los conceptos Potencia AC en estado estable, Potencia Activa, Potencia Reactiva, Potencia Aparente, Potencia Compleja y Factor de Potencia en función de la impedancia y las relaciones entre voltaje y corriente fasorial.

Uso educativo

Esta simulación se presenta como un complemento a la clase presencial, para estudiantes de primeros semestres de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Mecánica. Una vez los estudiantes manejan los conceptos de potencia compleja, potencia activa y reactiva, potencia aparente, impedancia y factor de potencia, los estudiantes pueden interactuar para analizar los efectos del cambio en la impedancia sobre la potencia, tanto en el plano complejo como en el tiempo. Estos cambios se pueden observar al cambiar el fasor de voltaje o la magnitud y fase de la impedancia.

11. TRANSFORMADOR IDEAL



11.1. INTRODUCCIÓN

Cuando el flujo magnético producido por una bobina alcanza una segunda bobina se dice que existe entre las dos bobinas un acople magnético, ya que el campo magnético variable que llega a la segunda bobina produce un voltaje inducido en esta, aun cuando la segunda bobina se encuentre en circuito abierto.

De acuerdo a la ley de Faraday el voltaje inducido en una bobina en función del flujo magnético es:

$$V(t) = N \frac{d\phi(t)}{dt}$$

En donde N es el número de vueltas de la bobina y $\phi(t)$ es el flujo magnético.

El transformador es un dispositivo especialmente diseñado y fabricado para que el acople magnético entre dos bobinas sea el mejor posible y permita inducir un voltaje en la segunda bobina, llamada bobina secundaria, al aplicar una corriente variable en la bobina primaria. Las aplicaciones de los transformadores son múltiples: líneas de transmisión de alto voltaje, alimentación de equipos electrónicos, sistemas de audio, automóviles, aislamiento eléctrico, equipos médicos, etc.

El transformador está formado por un núcleo, que suele ser un material ferromagnético, para aumentar el acople magnético, y por las dos bobinas que en general se fabrican en cobre. Estas bobinas tendrán por supuesto una inductancia y una resistencia. El paso de la corriente por las bobinas produce por tanto pérdidas de potencia en las resistencias de las bobinas. De igual manera existen pérdidas de potencia asociadas al hecho de que no todo el flujo magnético producido por la primera bobina pasa por la segunda bobina. Existen otras pérdidas de potencia asociadas al calentamiento del material ferromagnético por fenómenos de corrientes de Eddy y por histéresis del material.

Un modelo que represente un transformador que tenga en cuenta todos estos fenómenos es muy complejo, de manera que para simplificar se suele utilizar el modelo ideal del transformador.

11.2. RELACIONES ENTRE VOLTAJES Y CORRIENTES EN EL TRANSFORMADOR IDEAL

En el transformador ideal se asume que: a) no hay pérdidas de potencia de ningún tipo; b) todo el flujo magnético producido por la bobina primaria pasa por la bobina secundaria. Esto implica que la potencia que entra en el primario es la misma que sale en el secundario a una carga que esté conectada.

La Figura 11-1 muestra el símbolo del transformador ideal con el número de vueltas N_p en la bobina primaria (izquierda) y N_s en la secundaria (derecha).

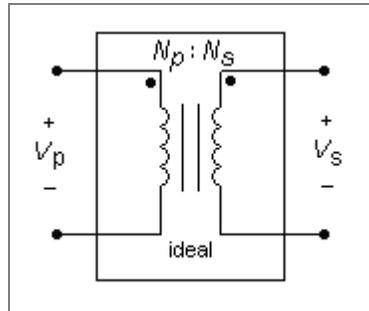


Figura 11-1

Para encontrar las relaciones entre las magnitudes del voltaje en el primario y del voltaje en el secundario, así como la relación entre la corriente primaria y secundaria, usaremos el circuito de la Figura 11-2, y el hecho de que no tenemos pérdidas de potencia.

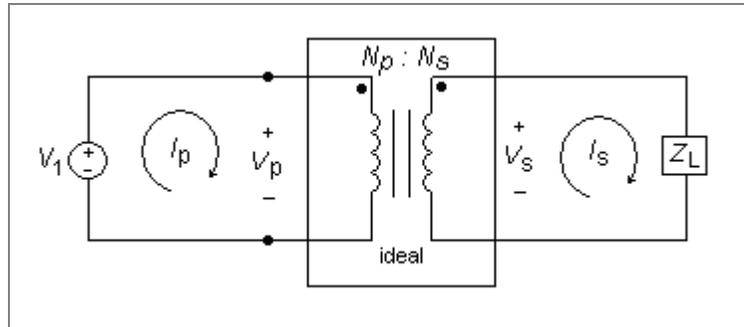


Figura 11-2

Dado que entre el primario y el secundario el acople magnético es perfecto, pues no tenemos pérdidas, los flujos por cada bobina son iguales: $\phi_1(t) = \phi_2(t)$.

$$\phi_1(t) = \phi_2(t)$$

Derivando respecto al tiempo tenemos:

$$\frac{d\phi_1(t)}{dt} = \frac{d\phi_2(t)}{dt}$$

Reemplazando por la ley de Faraday:

$$\frac{V_p(t)}{N_p} = \frac{V_s(t)}{N_s}$$

De aquí tenemos la relación de los voltajes:

$$\frac{V_P}{V_S} = \frac{N_P}{N_S}$$

Ahora calculamos la relación de las corrientes recordando que no existen pérdidas de potencia. Esto implica que la potencia en el primario es igual a la potencia en el secundario:

$$P_P(t) = P_S(t)$$

$$V_P(t) \cdot I_P(t) = V_S(t) \cdot I_S(t)$$

$$\frac{I_P(t)}{I_S(t)} = \frac{V_S(t)}{V_P(t)}$$

Y por la relación de voltajes encontrada previamente:

$$\frac{I_P(t)}{I_S(t)} = \frac{V_S(t)}{V_P(t)} = \frac{N_S}{N_P}$$

Finalmente

$$\frac{I_P(t)}{I_S(t)} = \frac{N_S}{N_P}$$

La Figura 11-3 presenta un modelo de fuentes controladas del transformador ideal de la Figura 11-1. Estas fuentes relacionan voltaje y corriente entre el lado primario y el lado secundario. Este modelo nos permite realizar cálculos con transformadores en circuitos más complejos, como el ejemplo que se mostró en el capítulo de Thévenin.

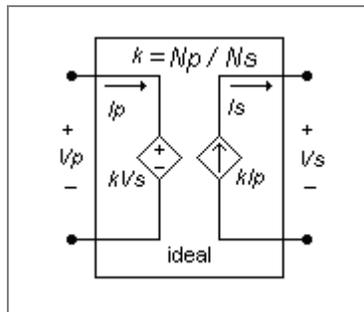


Figura 11-3

11.3. CONVENCION DE PUNTOS PARA LAS FASES

De acuerdo a la forma en que estén enrolladas las dos bobinas sobre el núcleo, el voltaje en el secundario puede estar invertido o no respecto al primario. Esto se representa por unos puntos al lado de las bobinas. Si los dos puntos están en el mismo lado indica que los voltajes están en fase, tal como se muestra en la Figura 11-4(a). Si los puntos están uno arriba y el otro abajo indica que existe una diferencia de 180° entre las fases de los voltajes primario y secundario, tal como se muestra en la Figura 11-4(b).

Para el caso de voltajes en forma fasorial $\vec{V}_P = V_P \angle \theta_{vp}$ y $\vec{V}_S = V_S \angle \theta_{vs}$ la relación entre magnitudes es en ambos casos:

$$V_S = V_P \cdot \frac{N_S}{N_P}$$

La relación entre las fases será dependiente de la localización de los puntos. En el caso de la Figura 11-4(a) la fase es la misma: $\theta_{vs} = \theta_{vp}$, mientras que en el caso de la Figura 11-4(b) será $\theta_{vs} = \theta_{vp} + 180^\circ$.

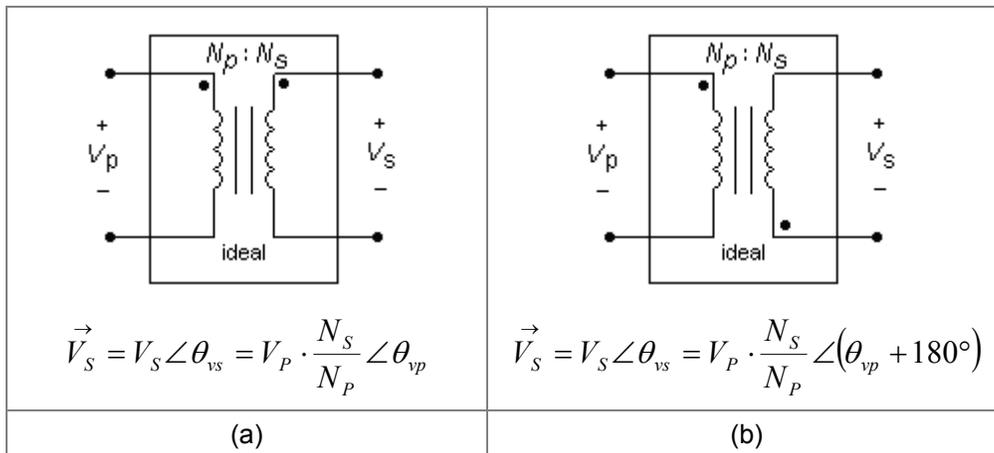


Figura 11-4

Ejemplo 11-1. Transformador Ideal y convención de puntos.

Para los transformadores con relación de vueltas $N_P/N_S = 50$ de la Figura 11-4 encontrar el voltaje en el secundario si se conecta en el primario una fuente de voltaje AC con magnitud de 110V y ángulo de fase de 120° .

Solución

En los dos casos el voltaje del primario será:

$$\vec{V}_P = 110 \angle 120^\circ$$

Para el caso de la figura (a) el voltaje en el secundario es:

$$\vec{V}_S = V_P \cdot \frac{N_S}{N_P} \angle \theta_{vp}$$

$$\vec{V}_S = 110 \cdot \frac{1}{50} \angle 120^\circ = 2.2 \angle 120^\circ$$

En los dos casos el voltaje del primario será:

$$\vec{V}_p = 5 \angle 120^\circ$$

Para el caso de la figura (b) el voltaje en el secundario es:

$$\vec{V}_s = V_p \cdot \frac{N_s}{N_p} \angle (\theta_{vp} + 180^\circ)$$

$$\vec{V}_s = 110 \cdot \frac{1}{50} \angle (120^\circ + 180^\circ) = 2.2 \angle -60^\circ$$

11.4. IMPEDANCIA REFLEJADA EN EL TRANSFORMADOR IDEAL

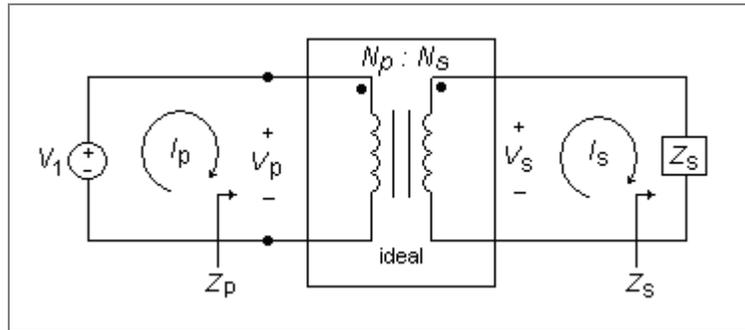


Figura 11-5

La impedancia vista por la fuente en el primario Z_p y la impedancia vista por la salida del transformador en el secundario Z_s se calculan con respecto a la Figura 11-5 como sigue:

$$Z_p = \frac{\vec{V}_p}{\vec{I}_p}$$

$$Z_s = \frac{\vec{V}_s}{\vec{I}_s}$$

Reemplazando las relaciones V contra I por las impedancias tenemos:

$$\frac{\vec{I}_p}{\vec{I}_s} = \frac{\vec{V}_s}{\vec{V}_p} = \frac{N_2}{N_1}$$

$$\frac{\vec{I}_p}{\vec{I}_s} = \frac{\left(\frac{\vec{V}_p}{Z_p} \right)}{\left(\frac{\vec{V}_s}{Z_s} \right)} = \frac{\vec{V}_p}{\vec{V}_s} \cdot \frac{Z_s}{Z_p} = \frac{N_p}{N_s} \cdot \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{N_s}{N_p}$$

$$\frac{N_p}{N_s} \cdot \frac{Z_s}{Z_p} = \frac{N_s}{N_p}$$

De donde

$$Z_P = Z_S \left(\frac{N_P}{N_S} \right)^2$$

Esto nos muestra que la impedancia vista por la fuente en el lado primario corresponde a la impedancia del secundario (la de la carga), multiplicada por el cuadrado de la relación de vueltas de las bobinas. Se dice que esta impedancia vista en el primario es la impedancia del secundario reflejada en el lado primario.

11.5. ACOPLÉ DE IMPEDANCIAS

La Figura 11-6 nos permite recordar el teorema de máxima transferencia de potencia en circuitos resistivos: Para que exista máxima transferencia de potencia del circuito a la izquierda de AB hacia la carga R_C , la resistencia de Thévenin R_{th} debe ser igual a la de la carga $R_{th} = R_C$.

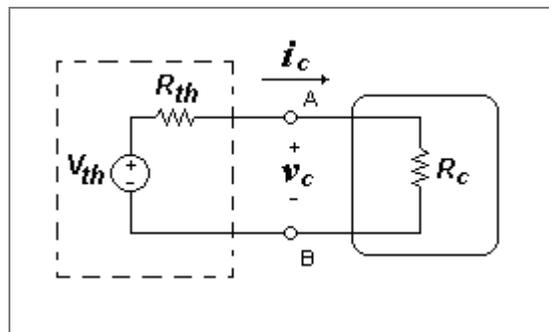


Figura 11-6

Sin embargo, en un circuito donde la carga y el circuito de alimentación son fijos, de manera que no los podemos alterar, esta condición no se puede cumplir.

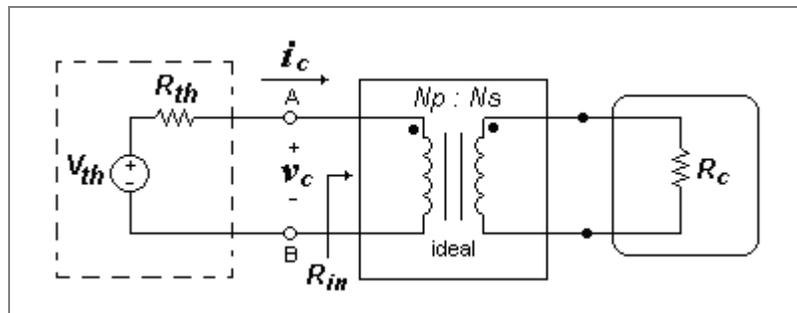


Figura 11-7

Para lograr la máxima transferencia de potencia entre los dos circuitos podemos entonces poner en medio de los dos un transformador ideal que haga que la impedancia de la carga vista por el equivalente de Thévenin se igual a la de la resistencia de Thévenin R_{th} tal como se muestra en la Figura 11-7. Ahora el problema no está en calcular la resistencia de Thévenin o la de la carga (pues son fijas) sino la relación de vueltas del transformador.

$$R_{th} = R_{in} = R_C \left(\frac{N_P}{N_S} \right)^2$$

Despejando la relación de vueltas tenemos:

$$\frac{N_P}{N_S} = \sqrt{\frac{R_{th}}{R_C}}$$

Como ahora la resistencia reflejada vista por el circuito equivalente de Thévenin es igual a R_{th} está entregando la máxima potencia posible. Y como el transformador es ideal toda esta potencia en el primario pasa al secundario sin pérdidas. Así tenemos la máxima transferencia de potencia a la carga.

A pesar de que hemos conseguido tener la máxima transferencia de potencia a la carga, algo debemos perder: por supuesto ahora el voltaje que existe en la carga no es el mismo que tendría sin el transformador, pues se ve afectado por la relación de vueltas del transformador. Lo mismo ocurre con la corriente.

Ejemplo 11-2. Impedancia reflejada.

Para el circuito de la Figura 11-8 con alimentación AC:

- Encontrar la impedancia de la carga en el secundario Z_L reflejada en el lado primario del modelo aproximado del transformador Z_p (entre los terminales EF-GH se tiene un transformador aproximado con sus respectivas resistencias de los embobinados). Entre los terminales AB-CD se tiene un transformador ideal con $n = N_P/N_S = 4$.
- Plantear las ecuaciones matriciales para las mallas I_1 e I_2 en función de n , V_1 , R_p , R_s y Z_L .
- Calcular $Z_{in} = V_1/I_1$ y comprobar que el resultado es el obtenido en (a). Para esto calcular I_1 a partir de la parte (b).

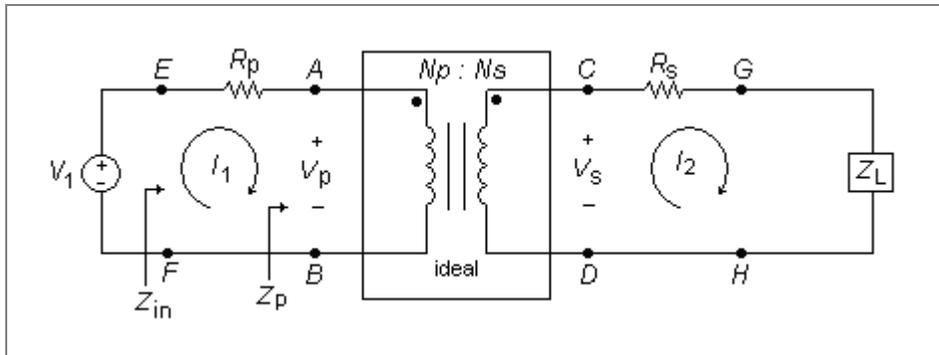


Figura 11-8

Solución**Parte a)**

$$Z_P = Z_S \cdot \left(\frac{N_P}{N_S} \right)^2 = Z_S \cdot n^2 = (R_S + Z_L) \cdot n^2$$

$$Z_{in} = R_P + Z_P = R_P + n^2(R_S + Z_L)$$

Parte b)

Por el transformador:	$\frac{V_P}{V_S} = n$ $\frac{I_2}{I_1} = n \Rightarrow I_2 = nI_1$ $nI_1 - I_2 = 0 \quad (1)$
Malla 1:	$-V_1 + I_1 R_P + V_P = 0 \quad (2)$
Malla 2:	$-V_S + I_2 R_S + I_2 Z_L = 0 \quad (3)$ $-\frac{1}{n} V_P + I_2 (R_S + Z_L) = 0 \quad (4)$ $\frac{1}{n} V_P = I_2 (R_S + Z_L)$ $V_P = nI_2 (R_S + Z_L) \quad (5)$
reemplazando (5) en (2):	$I_1 R_P + nI_2 (R_S + Z_L) = V_1$ $(R_P)I_1 + n(R_S + Z_L)I_2 = V_1 \quad (6)$
empleando las ecuaciones del transformador en (2):	$V_P = V_1 - I_1 R_P = nV_S \Rightarrow V_S = \frac{V_1 - I_1 R_P}{n} \quad (7)$
reemplazando (7) en (3):	$-\left(\frac{V_1}{n} - \frac{I_1 R_P}{n} \right) + I_2 R_S + I_2 Z_L = 0$ $\frac{I_1 R_P}{n} - \frac{V_1}{n} + I_2 (R_S + Z_L) = 0$ $\frac{R_P}{n} I_1 + (R_S + Z_L) I_2 = \frac{V_1}{n} \quad (8)$

Con las ecuaciones (6) y (8) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} R_p & n(R_S + Z_L) \\ \frac{R_p}{n} & R_S + Z_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ \frac{V_1}{n} \end{bmatrix}$$

Como se puede ver la segunda fila es igual a la primera x n, de manera que las ecuaciones serán la (6) y la (1):

$$\begin{aligned} (R_p)I_1 + n(R_S + Z_L)I_2 &= V_1 \\ nI_1 - I_2 &= 0 \end{aligned}$$

obteniendo finalmente:

$$\boxed{\begin{bmatrix} R_p & n(R_S + Z_L) \\ n & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

Parte c)

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & n(R_S + Z_L) \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{(R_p)(-1) - n^2(R_S + Z_L)} = \frac{-V_1}{-[R_p + n^2(R_S + Z_L)]}$$

$$\boxed{I_1 = \frac{V_1}{R_p + n^2(R_S + Z_L)}}$$

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{V_1}{\frac{V_1}{R_p + n^2(R_S + Z_L)}} = R_p + n^2(R_S + Z_L)$$

$$\boxed{Z_{in} = R_p + n^2(R_S + Z_L)}$$

11.6. SIMULACIONES

11.6.1. TRANSFORMADOR IDEAL

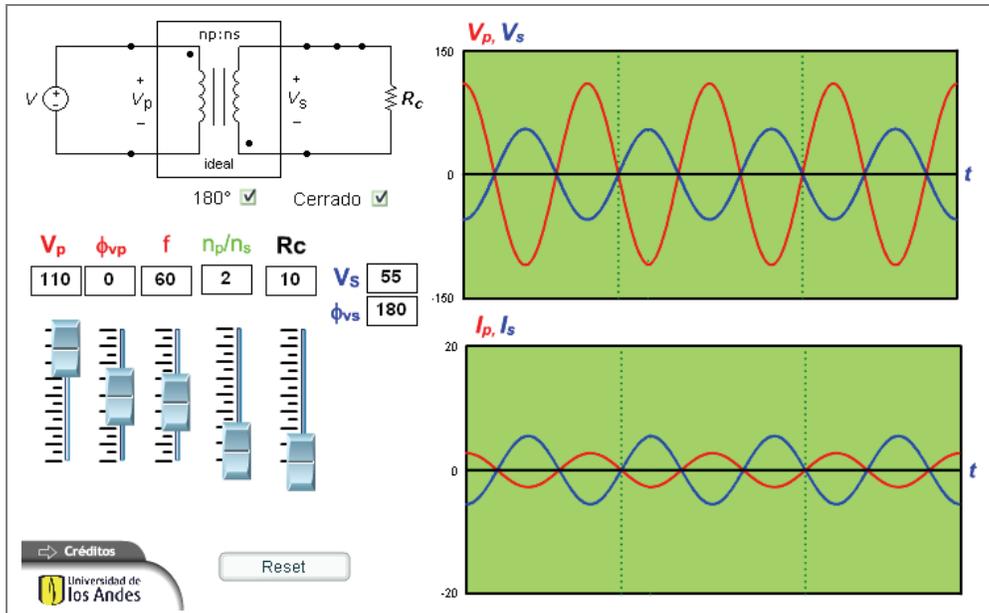


Figura 11-9

Descripción

Esta simulación permite mostrar los conceptos transformador ideal con y sin carga, sus relaciones entre voltajes en el tiempo y en forma fasorial, así como la convención de puntos para las fases.

Uso educativo

Esta simulación se presenta como un complemento a la clase presencial, para estudiantes de primeros semestres de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Mecánica. Una vez los estudiantes manejan los conceptos de transformador, transformador ideal, fasores y la notación o convención de puntos, el estudiante puede interactuar con la simulación para ver los efectos en el voltaje secundario al cambiar la relación de vueltas de los devanados. También puede observar los efectos de conectar y desconectar una carga (al abrir o cerrar el interruptor) y el efecto en la fase del voltaje secundario al cambiar el devanado secundario según la convención de puntos.

