

## UN MODELO BIDIMENSIONAL PARA EL ESTUDIO PELÍCULAS DE JABÓN ELECTROLÍTICAS

Lina Merchán, Gabriel Téllez  
l-mercha@uniandes.edu.co  
Departamento de Física, Universidad de Los Andes  
A.A. 4976, Bogotá, Colombia

### RESUMEN

Estudiaremos una película de jabón electrolítica con un modelo de plasma bidimensional de dos componentes. Este modelo se puede resolver analíticamente para un valor específico de la constante coulombica de acoplamiento  $\beta q^2 = 2$ . Esto nos permite calcular la presión de disyunción de la película y estudiar su estabilidad. Pudimos ver cómo la presión de disyunción variaba con un parámetro relacionado con la atracción de los aniones a las superficies. Para valores grandes de este parámetro la película es estable mientras que para valores pequeños puede ocurrir un colapso.

### INTRODUCCIÓN

Una película de jabón, bajo ciertas circunstancias, colapsa a un grosor menor que la longitud de onda de la luz y se ve negra. Existen dos tipos de películas negras: la película negra común (CBF por sus siglas en inglés) y la película negra de Newton (NBF) [1, 2]. Estas se diferencian en el grosor de su capa interna acuosa. Nos interesa saber si la interacción de Coulomb juega algún rol en este fenómeno. Se modelará la película como un plasma bidimensional de dos componentes, modelo exactamente soluble para un valor particular de la constante de acoplamiento  $\Gamma = 2$ . Las dos dimensiones que se estudiarán están en el grosor de la película.

Hace algunos años, Dean y Sentenac [3] emplearon una aproximación de campo medio para estudiar una película de jabón tridimensional. Sin embargo, dicho formalismo no permitió explicar este fenómeno de colapso. Más adelante, junto con Horgan [4] estudiaron analíticamente una película de jabón unidimensional. Según este estudio, las fuerzas electrostáticas sí contribuyen al colapso de una película de jabón de dicha dimensionalidad. Nuestro objetivo es ver si la interacción de Coulomb también juega un papel en dos dimensiones. Dada la simplicidad del modelo, sólo se puede comparar cualitativamente con el comportamiento y estructura de una película tridimensional.

### MODELO Y MÉTODO DE SOLUCIÓN

En esta sección, se presentará el modelo empleado en el estudio de una película de jabón. El modelo es un sistema bidimensional neutro de partículas puntuales de carga  $\pm q$  confinadas en una lámina de paredes impenetrables. Este aspecto se

modelará por un potencial infinito externo a la película. Los aniones, cargados negativamente, tienden a permanecer en la superficie exterior de la película debido a sus colas hidrofóbicas. Esto será representado por un potencial atractivo de corto alcance  $U_{ext}$ . En dos dimensiones, el potencial de interacción de Coulomb entre dos partículas de carga  $sq$  y  $s'q$  a una distancia  $r$  de separación es  $v(r) = -ss'q^2 \ln(r/d)$ , donde  $d$  es una longitud irrelevante. La constante de acoplamiento coulombica es  $\Gamma = \beta q^2$ . Para bajas temperaturas, la atracción entre partículas de cargas opuestas hace inestable al sistema. Por esta razón, la función de gran partición no está bien definida para  $\Gamma \geq 2$ .

Revisemos rápidamente el método descrito por Jancovici y Cornu [5] para el plasma de dos componentes. Comenzamos con la función de gran partición

$$\Xi = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \lambda_0^N \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \dots \int d\mathbf{r}_N \exp(-\beta H), \quad (1)$$

donde  $N$  es el número de partículas y  $\lambda_0$  es la fugacidad constante relacionada con la energía cinética y el potencial químico. Un potencial externo se puede describir mediante una fugacidad dependiente de la posición  $\lambda(\mathbf{r}_i) = \lambda_0 \exp(-\beta U_{ext}(\mathbf{r}_i))$ . Para evitar divergencias se comienza con un modelo discreto. El vector posición  $\mathbf{r} = (x, y)$  se representará con un número complejo  $z = x + iy$ . Las partículas estarán en dos subredes entrelazadas  $U$  y  $V$ . Las partículas positivas (negativas) permanecerán en la subred  $U(V)$  con coordenadas  $u_i(v_i)$ . Cada casilla de la red se caracterizará con una coordenada compleja  $z$ , por un vector que vale  $(1, 0)$  para las partículas positivas y  $(0, 1)$  para las negativas y la fugacidad de las partículas de signo  $s$  se denominará  $\lambda_s$ . En el límite continuo, se puede mostrar [7] que  $\Xi = \det(1 + K)$ , donde se definió la siguiente matriz

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 2\partial_z \\ 2\partial_{\bar{z}} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} m_+(\mathbf{r}) & 0 \\ 0 & m_-(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

donde  $m_s = \frac{2}{S} \lambda_s$  ( $S$  es el área de cada casilla). La película es de grosor  $W$ . La región lípida tiene un grosor  $\delta$ , mientras que la parte acuosa mide  $2L$ . El origen se colocó en la mitad de la película. Recordemos que  $m_s \propto \exp(-\beta U_{ext}(\mathbf{r}))$ . En nuestro modelo  $m_+(r) = m$  y  $m_-(r) = m + \alpha(\delta(x-L) + \delta(x+L))$ . El parámetro  $\alpha$  mide que tanto son atraídos los aniones a las superficies.

## LA PRESIÓN

El cálculo de la presión,  $p = -\partial\omega/\partial W$  se reduce a encontrar los valores propios de  $K$ . El problema de valores propios es el siguiente

$$m_-(r)\chi(r) = 2\lambda\partial_z\psi(r) \quad \text{y} \quad m_+(r)\psi(r) = 2\lambda\partial_z\chi(r) \quad (3)$$

donde  $(\psi, \chi)$  son los vectores propios y  $\lambda$  son los valores propios de  $K$ . De las Eqs. (3) y de las fugacidades se encuentra que  $\chi$  es continua mientras que  $\psi(x, y)$  es discontinua en  $x = \pm L$ ,  $\psi|_{x=\pm L^+} = \frac{\alpha}{\lambda}\chi(x = \pm L)$ . Para  $-L < x < L$ , las

Eqs. (3) se pueden combinar para llegar a  $\Delta\chi = \left(\frac{m}{\lambda}\right)^2 \chi$ . Mientras que, fuera de la película las Eqs. (3) se reducen a  $\partial_z\psi = 0$  y  $\partial_z\chi = 0$ . Resolviendo el problema de valores propios se llega a que los  $\lambda$  deben satisfacer la siguiente ecuación

$$\cosh(2\kappa^*L) + \left(k + \frac{\alpha m}{\lambda^2}\right) \sinh(2\kappa^*L)/\kappa^* = 0. \quad (4)$$

donde  $\kappa^* = (k^2 + (m/\lambda)^2)^{1/2}$ . Empleando una función analítica relacionada con la ecuación anterior y reescribiendola como un producto de Weierstrass [6, 7], se puede escribir el gran potencial por unidad de longitud como

$$\beta\omega = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk \left[ -2kL + \ln \left( \cosh(2\kappa L) + \frac{k + \alpha m}{\kappa} \sinh(2\kappa L) \right) \right] \quad (5)$$

donde  $\kappa = (k^2 + m^2)^{1/2}$ . Como la integral anterior diverge se impone una cota superior  $k_{\max} \simeq 1/R$  donde  $R$  es el diametro de las partículas.

La presión de disyunción está definida como la diferencia entre la presión dentro de la película y la presión de una película infinita:  $p_d = p - p_b$  [4]. Usando la Eq. (5) para el gran potencial encontramos que

$$\beta p_d = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{2\kappa(-\kappa + k + m\alpha)e^{-2\kappa W}}{\kappa + k + m\alpha + (\kappa - k - m\alpha)e^{-2\kappa W}} dk. \quad (6)$$

En el limite  $W \rightarrow 0$ , para  $\alpha \neq 0$ , la presión de disyunción  $p_d \rightarrow +\infty$ . El caso  $\alpha = 0$  es especial ya que la presión de disyunción  $p_d \rightarrow -\infty$  cuando  $W \rightarrow 0$ . La Fig. (1) muestra varias gráficas de la presión de disyunción como función del grosor  $W$ , para diferentes valores de  $\alpha$ . Se observan dos comportamientos diferentes. Para  $\alpha = 1$  y  $\alpha = 2$ , la presión es una función monótona decreciente. Esto indica que la película es estable para todo grosor. Para  $\alpha = 0.3$  y  $\alpha = 0.5$ , se observa que la presión ya no es función monotona del grosor. En el caso  $\alpha = 0$ , la presión de disyunción es siempre negativa y aumenta si  $W$  aumenta. La película es inestable para todo grosor cuando  $\alpha = 0$ . Estudiando el signo de  $\partial p_d / \partial W$  se encuentra que para  $\alpha \geq 1$  la presión de disyunción es una función decreciente del grosor y, por ende, siempre es estable. Para  $\alpha < 1$ , existe un grosor crítico  $W_c$ ; y para  $W > W_c$  la presión es una función creciente del grosor. Esto indica que la película es inestable para  $W > W_c$ . En esa región un pequeño cambio en la presión externa de la película resulta en un colapso a un grosor menor que el grosor crítico  $W_c$ . Esta transición es discontinua (de primer orden). El valor exacto de  $W_c$  donde  $\partial p_d / \partial W$  cambia de signo no se puede encontrar analíticamente de manera sencilla. Sin embargo, se puede determinar numéricamente. En la Fig. (2) graficamos  $W_c$  como función de  $\alpha$ .

### CONCLUSIONES

Hemos estudiado un modelo muy simple para películas de jabón electrolíticas. A pesar de sólo aportar información cualitativa sobre las películas de jabón reales

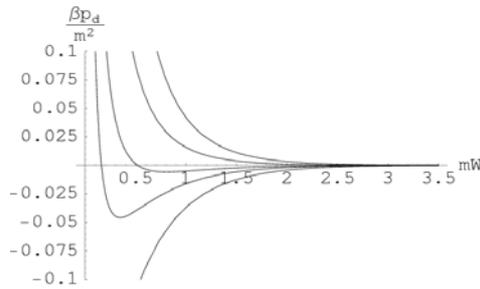


Figure 1: La presión de disyunción  $p_d$  como función del grosor  $W$  para varios valores de  $\alpha$ . De arriba a abajo  $\alpha = 2, 1, 0.5, 0.3, 0$ .

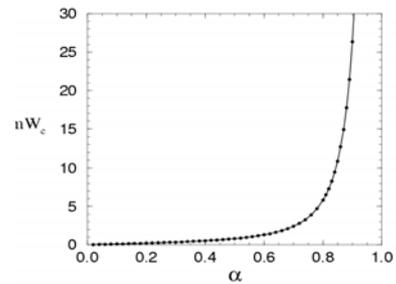


Figure 2: El grosor crítico  $W_c$  de la película como función del parámetro  $\alpha$ . Películas con grosor mayor que  $W_c$  son inestables.

este modelo es muy interesante ya que se puede estudiar analíticamente. Nuestro estudio de la presión de disyunción muestra que la carga en las fronteras es responsable de la estabilidad de la película. Para una atracción fuerte  $\alpha \geq 1$  la película es estable, pero para atracción débil  $\alpha < 1$  las películas gruesas no son estables. Para  $0 < \alpha < 1$ , las películas gruesas colapsan a un grosor diferente de cero. Estas podrían ser el equivalente de las películas negras comunes para nuestro caso bidimensional. Para  $\alpha = 0$ , las películas gruesas inestables colapsan a un grosor nulo que podrían ser el equivalente de las películas negras de Newton. Podemos concluir que la interacción de Coulomb juega un rol importante en la estabilidad de las películas gruesas. Éste también es el caso en el modelo unidimensional presentado en la Ref. [4]. Así que es natural suponer que para películas tridimensionales la interacción de Coulomb también juega un papel importante en su estabilidad. Claro está que en las películas reales existen otras interacciones importantes que ciertamente también contribuyen a la estabilidad de las películas negras y que no fueron tenidas en cuenta en este modelo. Más detalles sobre este estudio y en particular de las densidades de carga y las correlaciones en la película de jabón se pueden encontrar en Ref. [7]. Los autores reconocen la ayuda financiera parcial de COLCIENCIAS y del BID a través del proyecto # 1204-05-10078.

## REFERENCIAS

- [1] O. Belorgey y J. J. Benattar, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 313 (1991).
- [2] D. Sentenac y J. J. Benattar, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 160 (1998).
- [3] D. S. Dean y D. Sentenac, *Europhys. Lett.* **38** 645 (1997)
- [4] D. S. Dean, R. R. Horgan y D. Sentenac, *J. Stat. Phys.* **90**, 899 (1998).
- [5] F. Cornu y B. Jancovici, *J. Chem. Phys.* **90**, 2444 (1989).
- [6] B. Jancovici y G. Téllez, *J. Stat. Phys.* **82**, 609 (1996).
- [7] G. Téllez y L. Merchan, *A solvable model for electrolytic soap films: the two-dimensional two-component plasma*, cond-mat/0109377