METODOS MATEMATICOS AVANZADOS

SOLUCIÓN TAREA 2

I) 1) Para $N=2$: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$ se cumple.

Hipótesis de recurrencia: $\prod_{1\leq j<k\leq N-1} (x_k - x_j) = \det\left(x_k^{j-1}\right)_{1\leq k,j\leq N-1} = \Delta_{N-1}(x)$

Para N:

$$\Delta_N(x_1 \dots x_N) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & & x_N \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{N-1} & & x_N^{N-1} \end{vmatrix} = x_N^{N-1} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_{N-1} \\ \vdots & & \\ x_1^{N-2} & \cdots & x_{N-1}^{N-2} \end{vmatrix} + x_N^{N-2} c_{N-2} + \cdots + x_N c_1 + c_0$$

es un polinomio de grado $N-1$ de x_N.

Claramente sus raices son (x_j) para $j \leq N-1$, puesto que $\Delta(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N) = 0$ pues si $x_N = x_j$ la columna N y la columna j son iguales.

Entonces: $\Delta_N(x_1 \dots x_N) = C \prod_{k=1}^{N-1} (x_N - x_k)$. con C independiente de x_N.

Pero C es el coeficiente de x_N^{N-1}: $C = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_{N-1} \\ \vdots & & \\ x_1^{N-2} & \cdots & x_{N-1}^{N-2} \end{vmatrix} = \Delta_{N-1}(x_1, \dots x_{N-1})$

Por hipótesis de recurrencia: $C = \prod_{1\leq j<k\leq N-1} (x_k - x_j)$

Así queda demostrado que $\Delta_N(x_1 \dots x_N) = \prod_{1\leq j<k\leq N-1} (x_k - x_j)$

---

2) Agregando una combinación lineal de las columnas k para $k<j$ a la columna j deja el determinante invariante. Así

(1.3) $\Delta_N(x) = \det\left(P_{j-1}(x_k)\right)_{1\leq k,j\leq N}$ con $P_{j-1}(x_k) = x_k^{j-1} + \cdots$ polinomio de grado $j-1$ de x_k.

(3) En el resultado (1.3), los polinomios $P_n(x)$ son completamente arbitrarios. Escojamos los polinomios $\tilde{p}_n(x) = x^n + \dots$ ortogonales con respecto al peso $\rho(x)$.

Así:

$$\int_{[a,b]^n} \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)\,\left(\Delta_n(x)\right)^2 \prod_{i=1}^{n}\rho(x_i)\,dx_i = \int_{[a,b]^n} \Delta_{n+1}(x_1,\dots x_n, x)\,\Delta_n(x_1,\dots x_n) \prod_{i=1}^{n}\rho(x_i)\,dx_i$$

$$= \int_{[a,b]^n} \det\left(\tilde{p}_{j-1}(x_k)\right)_{1\le j,k\le n+1} \det\left(\tilde{p}_{j-1}(x_k)\right)_{1\le j,k\le n} \prod_{i=1}^{n}\rho(x_i)\,dx_i$$

en donde usamos la convención $x_{n+1} = x$ en el primer determinante.

Pero $\det\left(\tilde{p}_{j-1}(x_k)\right)_{1\le j,k\le n} = \sum_{\sigma\in\sigma_n}^{!} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} \tilde{p}_{\sigma(k)-1}(x_k)$

Así la integral vale:

$$\int_{[a,b]^n} \sum_{\sigma\in\sigma_n} \varepsilon(\sigma) \sum_{\sigma'\in\sigma_{n+1}} \varepsilon(\sigma') \left(\prod_{k=1}^{n} \tilde{p}_{\sigma(k)-1}(x_k)\,\tilde{p}_{\sigma'(k)-1}(x_k)\,\rho(x_k)\,dx_k\right) p_{\sigma'(n+1)-1}(x_{n+1})$$

las integrales se separan y valen cero a menos que ~~$p_{\sigma(k)-1} = p$~~
$\sigma(k) = \sigma'(k)$ para $1 \le k \le n$.

Sea $\|\tilde{p}_k\|^2 = \int |\tilde{p}_k(x)|^2 \rho(x)\,dx$. La integral vale:

$$\sum_{\sigma\in\sigma_n}^{!} \varepsilon(\sigma) \sum_{\sigma'\in\sigma_{n+1}} \varepsilon(\sigma') \prod_{k=1}^{n} \delta_{\sigma(k),\sigma'(k)} \|\tilde{p}_{\sigma(k)}\|^2 \;\tilde{p}_{\sigma'(n+1)-1}(x)$$

Solo quedan términos con $\sigma(k) = \sigma'(k)$ para todo $1 \le k \le n$. Eso obliga a que $\sigma'(n+1) = n+1$. Finalmente la integral vale:

III 1) En clase vimos que, definiendo $\hat{x} = \frac{x}{\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}}$, la ecuación de Schrödinger para φ_n se reduce a la ecuación de Hermite con solución:

$$\varphi_n(x) = \underbrace{\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}}_{\text{prefactor de normalización } \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_n(x)|^2 dx = 1} e^{-\hat{x}^2/2} H_n(\hat{x}).$$

2) $$\Psi(x_1, \dots x_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \det\left(\varphi_{j-1}(x_k)\right)_{1 \le j,k \le N}$$

3) $$J_N = \left(f(x_i, x_j)\right)_{1 \le i,j \le N}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \det J_N \, dx_N = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \epsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{N} f(x_k, x_{\sigma(k)}) \, dx_N$$

En la productoria hay dos tipos de términos:

1) cuando $\sigma(N) = N$ hay un término $f(x_N, x_N)$ que al integrarlo da $\int f(x_N, x_N) dx_N = c$

2) Cuando $\sigma(N) \neq N$ hay dos términos con x_N:

$$f(x_N, x_{\sigma(N)}) \, f(x_j, x_N)$$

para cierto j tal que $\sigma(j) = N$. Al integrar se obtiene:

$$\int f(x_N, x_{\sigma(N)}) f(x_j, x_N) \, dx_N = f(x_j, x_{\sigma(N)})$$

En ambos casos queda un producto de $N-1$ términos $f(x_k, x_{\sigma(k)})$:

1) En el caso 1 queda $c \prod_{k=1}^{N-1} f(x_k, x_{\sigma(k)})$

Este último es de la forma $\prod_{k=1}^{N} f(x_k, x_{\sigma'(k)})$ con una nueva permutación σ' definida por:

$$\begin{cases} \sigma'(k) = \sigma(k) & \text{para } 1 \le k \le N-1 \text{ y } k \neq j \\ \sigma'(j) = \sigma(N) \end{cases}$$

σ' es una permutación de $N-1$ elementos con signo ~~igual~~ opuesto al de σ : $\varepsilon(\sigma') = -\varepsilon(\sigma)$

Así queda:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \det J_N \, dx_N = C \sum_{\sigma \in \sigma_{N-1}} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{N} f(x_k, x_{\sigma(k)}) + \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{\sigma' \in \sigma_{N-1}} -\varepsilon(\sigma') \prod_{k=1}^{N} f(x_k, x_{\sigma'(k)})$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \det J_N \, dx_N = \big(C - (N+1)\big) \det J_{N-1}}$$

4) ~~det~~ $|\Psi(x_1 \dots x_N)|^2 = \frac{1}{N!} |\det(\varphi_{k-1}(x_j))|^2 = \frac{1}{N!} \det(K)$ en donde

$$K = \left((\varphi_{k-1}(x_j))_{kj} \right)^{+} (\varphi_{k-1}(x_j))_{kj} = M^{+} M \quad \text{en donde} \quad M = (\varphi_{k-1}(x_j))_{kj}$$

la matriz K tiene elementos: $K_{ij} = \sum_{k=1}^{N} (M^{+})_{ik} M_{kj}$

$$\boxed{K_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \overline{\varphi_{k-1}(x_i)} \, \varphi_{k-1}(x_j)}$$

(pero aquí $\overline{\varphi_k} = \varphi_k$ es real).

$$\boxed{K_{ij} = \sum_{k=0}^{N-1} \varphi_k(x_i) \varphi_k(x_j)}$$

5) $\cancel{\lambda^{(p)}(x_1, \dots, x_p)} =$ Sea $K_m = (K_{ij})_{1\le i,j\le m}$

$$n^{(N-1)}(x_1, \dots x_{N-1}) = \frac{1}{N!}\int \det K_N \, dx_N = (C-N+1)\det K_{N-1}$$

Con $C = \int \sum_{k=0}^{N-1} |\varphi_k(x)|^2 dx = N$

Así

$$n^{(N-1)}(x_1, \dots x_{N-1}) = \frac{1}{N!}\det (K_{ij})_{1\le i,j\le N-1}$$

$$n^{(N-2)}(x_1, \dots, x_{N-2}) = \frac{1}{N!}\int \det K_{N-1}\, dx_{N-1} = \frac{1}{N!}(N-(N-1)+1)\det K_{N-2}$$

$$= \frac{2}{N!}\det K_{N-2}$$

Así sucesivamente obtenemos:

$$n^{(N-k)}(x_1, \dots, x_{N-k}) = \frac{k!}{N!}\det (K_{N-k})$$

Si $p = N-k$ $\quad k = N-p$

$$\boxed{\begin{array}{l} n^{(p)}(x_1, \dots, x_p) = \dfrac{(N-p)!}{N!}\det (K(x_i, x_j))_{1\le i,j\le p} \\ \text{Con } K(x,y) = \sum_{l=0}^{N-1} \varphi_l(x)\varphi_l(y). \end{array}}$$

---

6) $p=1$: $\boxed{n^{(1)}(x) = \frac{1}{N} K(x,x)}$

Con $K(x,x) = \sum_{l=0}^{N-1} \varphi_l(x)\varphi_l(x) = N\varphi_N^2(x) - (N(N+1))^{1/2}\varphi_{N-1}(x)\varphi_{N+1}(x)$

$p=2$

$$n^{(2)}(x,y) = \frac{1}{N(N-1)} \det \begin{vmatrix} K(x,x) & K(x,y) \\ K(y,x) & K(y,y) \end{vmatrix} = \frac{1}{N(N-1)} \Big(K(x,x)K(y,y) - K(x,y)K(y,x) \Big)$$

$$\cancel{n^{(2)}(x,y) = \frac{1}{N(N-1)}}$$

$$\boxed{n^{(2)}(x,y) = \frac{1}{N-1}\, n^{(1)}(x)\, n^{(1)}(y) - \frac{1}{N(N-1)} \big(K(x,y)\big)^2}$$

Con

$$\boxed{K(x,y) = \sum_{l=0}^{N-1} \varphi_l(x)\varphi_l(y) \underset{\text{Christoffel-Darboux}}{=} \left(\frac{N}{2}\right)^{1/2} \frac{\varphi_N(x)\varphi_{N-1}(y) - \varphi_N(y)\varphi_{N-1}(x)}{x-y}.}$$