Universidad de los Andes

Departamento de Física

Métodos Matemáticos Avanzados
Tarea 1: Teoría de Sturm–Liouville

Semestre 2020-1

Para entregar el martes 11 de febrero 2020

I. Funciones de Green

Sea

$$L[u] = \frac{d}{dx}(p(x)u') - q(x)u \tag{1.1}$$

un operador diferencial lineal autoadjunto, con $p(x) > 0$ en el intervalo $[a, b]$. Sea $\rho(x) > 0$ una función definida en $[a, b]$. Sean (u_n, λ_n) las funciones propias ortonormales en $L^2([a, b], \rho(x)dx)$ y valores propios de

$$L[u_n] + \lambda_n \rho(x) u_n = 0 \tag{1.2}$$

con condiciones de frontera homogéneas

$$\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = 0 \tag{1.3a}$$

$$\beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = 0 \tag{1.3b}$$

Para $\lambda \neq \lambda_n$ se desea resolver la ecuación diferencial no-homogénea

$$L[\psi] + \lambda \rho(x) \psi = f(x) \tag{1.4}$$

en donde ψ es la función incógnita y f es una función dada. Se imponen las condiciones de frontera (1.3) para ψ.

Para este fin se introduce la función de Green $G(x, x')$ solución de

$$L_x[G] + \lambda \rho(x) G(x, x') = \delta(x - x') \tag{1.5}$$

en donde $L_x = L$ y la notación L_x es para precisar que las derivadas se hacen con respecto a la variable x. La función de Green cumple con las condiciones de frontera (1.3).

1. Demostrar que

   $$\psi(x) = \int_a^b G(x, x') f(x') \, dx' , \tag{1.6}$$

   es solución de (1.4).

2. **Calculo de la función de Green por descomposición espectral.**

   a) Escribir en serie de Sturm–Liouville $\delta(x - x') = \sum_n a_n u_n(x)$ y calcular los coeficientes a_n.

b) Escribiendo $G(x, x') = \sum_n c_n u_n(x)$, resolver la ecuación (1.5) y encontrar los coeficientes c_n.

3. **Calculo de la función de Green en términos de soluciones de la ecuación homogénea.**

   a) Sean u y v dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada a (1.4)
   $$L[y] + \lambda\rho(x)y = 0 \tag{1.7}$$
   Demostrar que el Wronskiano de u y v vale
   $$u'(x)v(x) - u(x)v'(x) = \frac{A}{p(x)} \tag{1.8}$$
   en donde A es una constante.

   b) Supongamos que u cumple con la condición de frontera (1.3a) en $x = a$ y que v cumple con la condición (1.3b) en $x = b$. Dar una expresión explicita de $G(x, x')$ en términos de u, v y A.

II. Substitución de Prüfer

Considere un sistema de Sturm–Liouville regular en forma normal de Liouville
$$u'' + Q(x)u = 0 \tag{2.1}$$
con $Q(x) = \lambda - q(x)$, en el intervalo $[a, b]$ con condiciones de frontera
$$\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = 0 \tag{2.2}$$
$$\beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = 0 \tag{2.3}$$

Supongamos que $Q(x) > 0$ en el intervalo $[a, b]$ y que tanto q como q' permanecen acotadas en $[a, b]$. Definimos $R(x, \lambda)$ y $\phi(x, \lambda)$ por
$$u = \frac{R}{Q^{1/4}} \sin\phi \tag{2.4a}$$
$$u' = RQ^{1/4} \cos\phi \tag{2.4b}$$

1. Suponiendo $u \neq 0$, mostrar que
$$\cot\phi = \frac{u'}{\sqrt{Q}\, u} \tag{2.5}$$
$$R^2 = \sqrt{Q}u^2 + \frac{(u')^2}{\sqrt{Q}} \tag{2.6}$$

2. Mostrar que R y ϕ cumplen con
$$\phi' = \sqrt{\lambda - q} - \frac{q'}{4(\lambda - q)} \sin(2\phi) \tag{2.7}$$
$$\frac{R'}{R} = \frac{q'}{4(\lambda - q)} \cos(2\phi) \tag{2.8}$$
   Este sistema de ecuaciones se conoce como sistema de Prüfer (modificado) asociado al sistema de Sturm–Liouville (2.1) inicial.

3. **Aplicación 1: Comportamiento asintótico para $\lambda \to \infty$**

   a) Demostrar que cuando $\lambda \to \infty$

$$\begin{aligned} \phi(x,\lambda) &= \phi(a,\lambda) + \sqrt{\lambda}(x-a) + O(1/\sqrt{\lambda}) && (2.9) \\ R(x,\lambda) &= R(a,\lambda) + O(1/\lambda) && (2.10) \end{aligned}$$

   b) Deducir que los valores propios cumplen con $\sqrt{\lambda_n} = \pi n/(b-a) + O(1/n)$ cuando $n \to \infty$, con $n \in \mathbb{N}$.

   c) Mostrar que las funciones propias normalizadas verifican

$$u_n(x) = \sqrt{2/(b-a)} \cos \frac{\pi n(x-a)}{b-a} + O(1/n) \qquad n \to \infty \tag{2.11}$$

4. **Aplicación 2: Comportamiento asintótico de las funciones de Bessel para argumento grande.**

   La ecuación diferencial de Bessel es

$$\frac{d}{dx}\left(xu'(x)\right) + \left(k^2 x - \frac{n^2}{x}\right) u = 0 \tag{2.12}$$

   que podemos ver como un sistema de Sturm–Liouville con $p(x) = \rho(x) = x$, $\lambda = k^2$ y $q(x) = n^2/x$. De manera genérica, llamaremos Z_n las soluciones de (2.12).

   a) Demostrar que con un cambio de variable adecuado la ecuación (2.12) se puede reducir siempre al caso $k = 1$. En lo que sigue suponemos $k = 1$.

   b) Mostrar que la forma normal de Liouville de la ecuación (2.12) es

$$w''(x) + \left[1 - \frac{M}{x^2}\right] w = 0 \tag{2.13}$$

   y expresar M en función de n, y w en función de u.

   c) Hacer la substitución de Prüfer modificada (2.4) y mostrar que

$$\phi'(x) = \sqrt{1 - \frac{M}{x^2}} + \frac{M \sin(2\phi)}{2(x^3 - Mx)} \tag{2.14a}$$

   y

$$\frac{R'(x)}{R(x)} = -\frac{M \cos(2\phi)}{2(x^3 - Mx)} \tag{2.14b}$$

   d) Para $x \to \infty$, expandir el segundo miembro de las ecuaciones diferenciales (2.14) despreciando todos los términos de orden $O(1/x^3)$, integrarlas y deducir que el comportamiento asintótico de las funciones de Bessel genéricas Z_n (soluciones de (2.12)) es

$$Z_n(x) = \frac{R_\infty}{\sqrt{x}} \cos\left(x + x_\infty + \frac{n^2 - 1/4}{2x}\right) + O(x^{-5/2}), \qquad x \to \infty \tag{2.15}$$

   en donde R_∞ y x_∞ son dos constantes (de integración).