Universidad de los Andes

Departamento de Física

Métodos Matemáticos Avanzados
Tarea 2: Polinomios ortogonales

Semestre 2020-1

Para entregar el jueves 27 de febrero de 2020

I. Representaciones con determinantes

Sea $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. Definimos el determinante de Vandermonde así:

$$\Delta_N(\mathbf{x}) = \prod_{1 \leq j < k \leq N} (x_k - x_j) \tag{1.1}$$

1. Mostrar que
$$\Delta_N(\mathbf{x}) = \det(x_k^{j-1})_{1 \leq k, j \leq N} \tag{1.2}$$

2. Mostrar que
$$\Delta_N(\mathbf{x}) = \det(P_{j-1}(x_k))_{1 \leq k, j \leq N} \tag{1.3}$$
en donde $P_n(x)$ es un polinomio completamente arbitrario, de grado n y cuyo coeficiente de grado más alto es uno: $P_n(x) = x^n + \cdots$.

Sea un intervalo $[a, b]$ y una función $\rho(x)$ positiva definida en $[a, b]$. Definimos los siguientes polinomios por medio de una integral n-múltiple:

$$p_n(x) = \int_{[a,b]^n} \prod_{i=1}^{n} (x - x_i) \prod_{1 \leq j < k \leq n} (x_k - x_j)^2 \prod_{i=1}^{n} \rho(x_i) \, dx_i \tag{1.4}$$

3. Usando las propiedades demostradas anteriormente para el determinante de Vandermonde, demostrar que los $p_n(x)$ son polinomios ortogonales con respecto al peso $\rho(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

II. Aplicación de los polinomios de Hermite para un conjunto de osciladores harmónicos fermiónicos

Considere una colección de N fermiones idénticos independientes (en una dimensión) sometidos a un potencial armónico $V(x) = m\omega^2 x^2/2$, siendo m la masa de cada fermión.

1. Exprese la función de onda normalizada $\phi_n(x)$ de un sólo fermión en el nivel n de energía $\hbar\omega(n + 1/2)$ en el potencial armónico en términos de polinomios de Hermite. Será muy útil trabajar con una longitud reducida $\hat{x}$ que definirá.

2. Expresar la función de onda normalizada $\Psi(x_1, \ldots, x_N)$ del estado fundamental de los N fermiones como un determinante (de Slater).

3. Mostrar que la función de onda $\Psi(x_1, \ldots, x_N)$ es proporcional al producto $\Delta_N(\mathbf{x}) = \prod_{1 \leq j < k \leq N}(x_k - x_j)$.

La densidad de probabilidad de encontrar una partícula en x es

$$n(x) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\Psi(x, x_2, \ldots, x_N)|^2 \, dx_2 \ldots dx_N \tag{2.1}$$

y más generalmente la densidad de probabilidad de encontrar p partículas en las posiciones $x_1, \ldots, x_p$ es

$$n^{(p)}(x_1, \ldots, x_p) = \int_{\mathbb{R}^{N-p}} |\Psi(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_N)|^2 \, dx_{p+1} \ldots dx_N \tag{2.2}$$

En lo que sigue queremos calcular $n^{(p)}$ explícitamente.

4. **Lema preliminar.** Sea una matriz J_N, $N \times N$, cuyos elementos matriciales (i, j) son de la forma $f(x_i, x_j)$, en donde f es una función que cumple con las siguiente propiedades:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x, z) f(z, y) \, dz = f(x, y) \tag{2.3}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x, x) \, dx = c \tag{2.4}$$

   Demostrar que

$$\int_{\mathbb{R}} \det J_N \, dx_N = (c - N + 1) \det J_{N-1} \tag{2.5}$$

   en donde J_{N-1} es la matriz $(N-1) \times (N-1)$ que se obtiene eliminando la última linea y la última columna de J_N.

5. Usando la propiedad $|\det(M)|^2 = \det(M^\dagger M)$, mostrar que

$$|\Psi(x_1, \ldots, x_N)|^2 = \frac{1}{N!} \det K \tag{2.6}$$

   en donde K es una matriz con elementos de matriciales $K_{ij} = \sum_{k=0}^{N-1} \phi_k(x_i) \phi_k(x_j)$.

6. Usando el lema preliminar, expresar $n^{(p)}(x_1, \ldots, x_p)$ como un determinante.

7. Estudiar los casos $p = 1$ y $p = 2$, en detalle. Usar la fórmula de Christoffel–Darboux, para simplificar al máximo el resultado.