Aplicaciones del espectro de masa del modelo de Sine-Gordon en la mecánica estadística de plasmas y electrolitos.

Gabriel Téllez
Departamento de Física
Universidad de Los Andes

(c) 2004 Gabriel Téllez

Aplicaciones del espectro de masa del modelo de Sine-Gordon en la mecánica estadística de plasmas y electrolitos.

El problema de mecánica estadística clásica

- El plasma de dos componentes.

Teoría de campo cuántica relativista.

- El modelo de sine-Gordon.

Termodinámica de plasmas y electrolitos.

El plasma de dos componentes

Mecánica estadística clásica de un sistema de dos especies de partículas cargadas $+q$, $-q$.

Potencial de Coulomb:

$$\Delta v(\mathbf{r}) = -s_d \delta(\mathbf{r}) \qquad s_2 = 2\pi, \;\; s_3 = 4\pi$$

$$v(\mathbf{r}) = \begin{cases} -\ln r/L & \text{2D} \\ 1/r & \text{3D} \end{cases}$$

Hamiltoniano:

$$\frac{H}{k_B T} = \beta \left[\sum_{i<j} v(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) + \sum_{i<j} v(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) - \sum_{i,j} v(\mathbf{u}_i - \mathbf{v}_j) \right]$$

con $\beta = q^2/(k_B T)$.

Hamiltoniano:

$$\frac{H}{k_B T} = \beta \left[\sum_{i<j} v(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) + \sum_{i<j} v(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) - \sum_{i,j} v(\mathbf{u}_i - \mathbf{v}_j) \right]$$

con $\beta = q^2/(k_B T)$.

Introduciendo la densidad de carga microscópica:

$$\hat{\rho}(\mathbf{r}) = \sum_i q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{u}_i) - \sum_j q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}_j)$$

$$H = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \hat{\rho}(\mathbf{r}) v(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\rho}(\mathbf{r}')$$

Equivalencia con el modelo de sine-Gordon

Se basa en la integral gaussiana:

$$\frac{\int dX e^{-\frac{1}{2}(X,AX)+(B,X)}}{\int dX e^{-\frac{1}{2}(X,AX)}} = e^{\frac{1}{2}(B,A^{-1}B)}$$

Equivalencia con el modelo de sine-Gordon

Se basa en la integral gaussiana:

$$\frac{\int dX e^{-\frac{1}{2}(X,AX)+(B,X)}}{\int dX e^{-\frac{1}{2}(X,AX)}} = e^{\frac{1}{2}(B,A^{-1}B)}$$

- Usando: $A^{-1} = v/\beta$, $B = i\beta\hat{\rho}(\mathbf{r})$ y $X = \phi(\mathbf{r})$ un campo auxiliar. Tenemos: $A = -\beta\Delta/s_d$ ya que $\Delta v = -s_d\delta$.

Equivalencia con el modelo de sine-Gordon

Se basa en la integral gaussiana:

$$\frac{\int dX e^{-\frac{1}{2}(X,AX)+(B,X)}}{\int dX e^{-\frac{1}{2}(X,AX)}} = e^{\frac{1}{2}(B,A^{-1}B)}$$

- Usando: $A^{-1} = v/\beta$, $B = i\beta\hat{\rho}(\mathbf{r})$ y $X = \phi(\mathbf{r})$ un campo auxiliar. Tenemos: $A = -\beta\Delta/s_d$ ya que $\Delta v = -s_d\delta$.

$$e^{-\beta H} = e^{-\frac{\beta}{2}\int d\mathbf{r}\int d\mathbf{r}'\hat{\rho}(\mathbf{r})v(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\hat{\rho}(\mathbf{r}')} = \frac{\int \mathcal{D}\phi\ e^{-\frac{\beta}{2s_d}\int \phi(\mathbf{r})\Delta\phi(\mathbf{r})d\mathbf{r}+i\beta\int \hat{\rho}(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})d\mathbf{r}}}{\int \mathcal{D}\phi\ e^{-\frac{\beta}{2s_d}\int \phi(\mathbf{r})\Delta\phi(\mathbf{r})d\mathbf{r}}}$$

El problema es ahora el de un gas ideal, sin interacciones de pares, en un campo externo $\phi(\mathbf{r})$ fluctuante gaussiano.

La teoría de campos de sine-Gordon

La función de partición gran canónica (fugacidad ζ) del gas de Coulomb es

$$\boxed{\Xi_{\text{Coulomb}} = \frac{Z_{\text{sG}}}{Z_0}}$$

igual a la funcional generatriz de la teoría de sine-Gordon

$$Z_{\text{sG}} = \int \mathcal{D}\phi e^{-\int \mathcal{L}_{\text{sG}}(\phi(\mathbf{r}),\partial_\mu\phi(\mathbf{r}))d\mathbf{r}}$$

cuyo lagrangiano es

$$\mathcal{L}_{\mathrm{sG}} = \frac{1}{16\pi} \left|\nabla\phi(\mathbf{r})\right|^2 - 2\zeta \cos\left(b\phi(\mathbf{r})\right)$$

con $b = \sqrt{\beta/4}$.

Ecuación de movimiento clásica y teoría de Poisson–Boltzmann

Las ecuaciones clásicas de movimiento para la teoría de sine-Gordon son:

$$\Delta\phi = 16\pi\zeta b \sin(b\phi)$$

Para $\psi = ibq^{-1}\phi$ es la ecuación de campo medio basada en la aproximación de Poisson–Boltzmann (Debye–Hückel no linearizada).

Soluciones clásicas de la ecuación de sine-Gordon (2D)

$$(\partial_x^2 - \partial_t^2)\phi = 16\pi\zeta b \sin(b\phi)$$

Simetrías discretas: $\phi \to \phi + 2\pi n/b$

- Solitones y anti-solitones.
- Dobletes ("breather").

Espectro cuántico de la teoría de sine-Gordon [1] [2]

- Solitones y antisolitones de masa M.
- Dobletes ("breather"): Estados ligados solitón–antisolitón de masa

$$m_n = 2M \sin\left(\frac{n\pi\xi}{2}\right) \; ; \quad n = 1, 2, \cdots < 1/\xi$$

con $\xi = b^2/(1-b^2)$.

[1] Dashen, Hasslacher, Neveu, Phys. Rev. D **12**, 3424 (1975).
[2] Zamolodchikov, Zamolodchikov, Ann. Phys. **120**, 253 (1979).

Gran potencial [3]

$$\frac{1}{V}\ln\Xi = \frac{m_1^2}{8\sin(\pi\xi)}$$

Pero falta la relación entre la fugacidad ζ y la masa M del solitón, para obtener la termodinámica del gas de Coulomb.

Problema: en teoría cuántica de campos ζ se renormaliza multiplicativamente. La relación ζ–M depende del esquema de renormalización utilizado.

[3] Destri, Vega, Nucl. Phys. B **358**, 251 (1991).

Relación fugacidad–masa del solitón

A cortas distancias, la función de correlación

$$
\begin{aligned}
n_{qq'}(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= \zeta_q \zeta_{q'} \langle e^{iqb\phi(\mathbf{r})} e^{iq'b\phi(\mathbf{r}')} \rangle \\
&\underset{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\to 0}{\sim} \zeta_q \zeta_{q'} e^{-\beta q q' v(\mathbf{r},\mathbf{r}')} = \zeta_q \zeta_{q'} |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{\beta q q'}
\end{aligned}
$$

Eso fija la normalización del campo $e^{ib\phi}$ y de ζ.

Relación fugacidad–masa del solitón

A cortas distancias, la función de correlación

$$\begin{aligned} n_{qq'}(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= \zeta_q\zeta_{q'}\langle e^{iqb\phi(\mathbf{r})}e^{iq'b\phi(\mathbf{r}')}\rangle \\ &\underset{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\to 0}{\sim} \zeta_q\zeta_{q'}e^{-\beta qq' v(\mathbf{r},\mathbf{r}')} = \zeta_q\zeta_{q'}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{\beta qq'} \end{aligned}$$

Eso fija la normalización del campo $e^{ib\phi}$ y de ζ. En este esquema [4]

$$\zeta = \frac{\Gamma(b^2)}{\pi\Gamma(1-b^2)}\left[M\frac{\sqrt{\pi}\Gamma((1+\xi)/2)}{2\Gamma(\xi/2)}\right]^{2-2b^2}$$

[4] Zamolodchikov, Int. J. Mod. Phys. A **10**, 1125 (1995).

Termodinámica del gas de Coulomb clásico

[5]

Relación densidad–fugacidad

$$\frac{n^{1-\beta/4}}{z} = 2\left(\frac{\pi\beta}{8}\right)^{\beta/4} \frac{\Gamma\left(1-\frac{\beta}{4}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\beta}{4}\right)} \left\{ \frac{\tan\left[\frac{\pi\beta}{2(4-\beta)}\right]}{\frac{\pi\beta}{2(4-\beta)}} \frac{\Gamma^2\left[1+\frac{\beta}{2(4-\beta)}\right]}{\frac{1}{\pi}\Gamma^2\left[\frac{1}{2}+\frac{\beta}{2(4-\beta)}\right]} \right\}^{1-\beta/4}$$

$$\beta < 2$$

[5] Šamaj, Travěnec, J. Stat. Phys. **101**, 713 (2000).

Energía libre por partícula

$$
\begin{aligned}
f(\beta, n) \;=\; & -\left(1-\frac{\beta}{4}\right)+\left(1-\frac{\beta}{4}\right)\ln n-\ln\left[2\left(\frac{\pi\beta}{8}\right)^{\beta/4}\frac{\Gamma\left(1-\frac{\beta}{4}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\beta}{4}\right)}\right] \\
& -\left(1-\frac{\beta}{4}\right)\ln\left\{\frac{\tan\left[\frac{\pi\beta}{2(4-\beta)}\right]}{\frac{\pi\beta}{2(4-\beta)}}\frac{\Gamma^2\left[1+\frac{\beta}{2(4-\beta)}\right]}{\frac{1}{\pi}\Gamma^2\left[\frac{1}{2}+\frac{\beta}{2(4-\beta)}\right]}\right\}
\end{aligned}
$$

Único modelo de mecánica estadística de fluidos (grados de libertad continuos) exactamente resuelto (2D).

Funciones de correlación [6]

$$n_{qq'}(\mathbf{r}) \sim -qq'\lambda \left(\frac{\pi}{2m_1 r}\right)^{1/2} e^{-m_1 r}, \quad r \to \infty$$

con la masa del "breather" más ligero (partícula "elemental" de la teoría de sine-Gordon)

$$m_1 = \kappa \left[\frac{\sin(\pi\beta/(4-\beta))}{\pi\beta/(4-\beta)}\right]^{1/2}$$

y $\kappa^{-1} = (2\pi\beta n)^{-1/2}$ es la longitud de Debye (longitud de apantallamiento en bajo acoplamiento ($\beta \to 0$)).

[6] Šamaj, Jancovici, J. Stat. Phys. **106**, 301 (2002).