Universidad de los Andes

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

# Tópicos en Mecánica Estadística
# Tarea 3 : Matrices Aleatorias

Semestre 2018-2

Para entregar el jueves 27 de septiembre de 2018.

## I Conjunto Simpléctico Gaussiano

### I.1 Preliminares : Cuaterniones

El grupo de los cuaterniones es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensión 4 con una operación de multiplicación no conmutativa. $(1, e_1, e_2, e_3)$ es la base canónica de este espacio y las reglas de multiplicación son :

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1. \tag{1.1}$$

$$e_1 e_2 = -e_2 e_1 = e_3, \quad e_2 e_3 = -e_3 e_2 = e_1, \quad e_3 e_1 = -e_1 e_3 = e_2. \tag{1.2}$$

Un cuaternión en general se escribe $q = q^{(0)} + q^{(1)} e_1 + q^{(2)} e_2 + q^{(3)} e_3 = q^{(0)} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{e}$, con $q^{(i)} \in \mathbb{C}$. La notación $\mathbf{q}$ es una notación abreviada para un vector tridimensional de componentes $(q^{(1)}, q^{(2)}, q^{(3)})$ y lo mismo para $\mathbf{e}$.

Una representación matricial posible del grupo de cuaterniones es

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

1. Comprobar que las reglas de multiplicación se cumplen con esta representación.
2. Mostrar que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(a+d)1 - \frac{i}{2}(a-d)e_1 + \frac{1}{2}(b-c)e_2 - \frac{i}{2}(b+c)e_3 \tag{1.4}$$

Se puede definir el cuaternión conjugado de $q$ por la fórmula $\bar{q} = q^{(0)} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{e}$, que es diferente del complejo conjugado de $q$ que seria $q^* = q^{(0)*} + \mathbf{q}^* \cdot \mathbf{e}$, en donde $q^{(j)*}$ denota el complejo conjugado de $q^{(j)}$. Decimos que un cuaternión es real si $q^* = q$, imaginario puro si $q^* = -q$ y escalar si $\bar{q} = q$. El hermiciano conjugado de $q$ se define como $q^\dagger = \bar{q}^* = q^{(0)*} - \mathbf{q}^* \cdot \mathbf{e}$.

3. Mostrar que si a $q$ le corresponde una matriz $2 \times 2$ entonces a $q^\dagger$ le corresponde la matriz hermítica conjugada. Así se justifica el nombre de hermiciano conjugado.
4. Mostrar que

$$\overline{(q_1 q_2 \cdots q_n)} = \bar{q}_n \cdots \bar{q}_2 \bar{q}_1, \quad \text{y que} \quad (q_1 q_2 \cdots q_n)^\dagger = q_n^\dagger \cdots q_2^\dagger q_1^\dagger \ . \tag{1.5}$$

Toda matriz A, $2N \times 2N$, de complejos se puede escribir como una matriz Q, $N \times N$, de cuaterniones, considerando que los bloques $2 \times 2$ forman cuaterniones. Por ejemplo, para $N = 2$, a la matriz compleja $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ le corresponde una matriz de cuaterniones $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$ con $q_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $q_{12} = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$, $q_{21} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}$, $q_{22} = \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$. Podríamos escribir en abreviado

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} q_{11} & q_{12} \\ \hline q_{21} & q_{22} \end{array}\right) \tag{1.6}$$

5. Mostrar que las siguientes operaciones matriciales sobre $A$ se traducen para $Q$ de la siguiente forma :
   (a) Transposición : $({}^tQ)_{kj} = -e_2 \bar{q}_{jk} e_2$.
   (b) Conjugación hermítica : $(Q^\dagger)_{kj} = q^\dagger_{jk}$.

## I.2 Inversión temporal

Para sistemas de espín *impar* el operador de inversión temporal, $T = KC$, tiene la propiedad $KK^* = -\mathbb{I}$.

1. Explicar por qué necesariamente el espacio de Hilbert debe tener dimensión par en este caso.
2. Comprobar que la siguiente representación para $K$ es válida : $K = Z$ con

$$Z = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right) \tag{1.7}$$

3. Mostrar que una vez escogida esta representación se pueden hacer aún transformaciones unitarias, $B$, sobre los estados, $\psi \mapsto B\psi$, con la condición que $Z = BZ({}^tB)$.

El grupo de matrices $N \times N$ unitarias $B$ que verifican $Z = BZ({}^tB)$ se conoce como el grupo simpléctico de dimensión $N$ y se denota por $\mathrm{Sp}(N)$.

4. ¿Conoce usted algún otro campo de la física en que aparece el grupo simpléctico $\mathrm{Sp}(N)$ ?

El álgebra del grupo simpléctico resulta más sencilla de expresar si se usa la representación cuaterniónica para las matrices $2N \times 2N$.

5. Muestre que en notación cuaterniónica $Z = e_2\mathbb{I}$.
6. Muestre que la operación de inversión temporal $A^R = K{}^tAK^{-1}$ se traduce : $(Q^R)_{kj} = \bar{q}_{jk}$

La matriz cuaterniónica $Q^R$ definida por la expresión anterior se llama *dual* de Q. Una matriz que verifica $Q^R = Q$ se llama *auto-dual*.

7. Mostrar que si $Q = (q_{jk})$ es auto-dual entonces

$$a_{jk} = d_{kj}, \; b_{jk} = -b_{kj}, \text{ y } c_{jk} = -c_{kj} \; . \tag{1.8}$$

8. Mostrar que si $Q^R = Q^\dagger$ entonces todos los elementos de $Q$ son cuaterniones reales.

9. Mostrar que toda matriz unitaria simpléctica $B \in \mathrm{Sp}(N)$ verifica $B^R = B^\dagger = B^{-1}$. Esta relación sirve también como definición del grupo simpléctico.
10. Explicar por qué para que un sistema de espín impar tenga invariancia por inversión temporal su hamiltoniano $H$ debe ser auto-dual y hermiciano.
11. Mostrar que en ese caso los elementos de matriz del hamiltoniano $H$ en representación cuaterniónica, $H_{kj} = H_{kj}^{(0)} + H_{kj}^{(1)} e_1 + H_{kj}^{(2)} e_2 + H_{kj}^{(3)} e_3$, son cuaterniones reales.

## I.3 Definición del conjunto simpléctico gaussiano

El conjunto simpléctico gaussiano está compuesto por las matrices aleatorias auto-duales y hermicianas y verifica las propiedades siguientes :

1. El conjunto es invariante por transformaciones $H \mapsto H' = W^R H W$ para cualquier $W$ simpléctica, es decir $W^R W = \mathbb{I}$. La probabilidad $P(H)dH$ es invariante : $P(H)dH = P(H')dH'$. El elemento $dH$ es $dH = \prod_{k\leq j} dH_{kj}^{(0)} \prod_{\lambda=1}^{3} \prod_{k<j} dH_{kj}^{(\lambda)}$
   — ¿Por qué en la definición de $dH$ hay un producto $k \leq j$ para $H_{kj}^{(0)}$ y un producto $k < j$ $(k \neq j)$ para las otras componentes de los cuaterniones ?
2. Los elementos de matriz son independientes : $P(H) = \prod_{k\leq j} f_{kj}^{(0)}(H_{kj}^{(0)}) \prod_{\lambda=1}^{3} \prod_{k<j} f_{kj}^{(\lambda)}(H_{kj}^{(\lambda)})$.

# II Conjunto Unitario Gaussiano : Densidad de probabilidad de los valores propios

— Mostrar que la densidad de probabilidad de los valores propios es de la forma :

$$P(\theta_1, \cdots, \theta_N) = C \prod_{\alpha<\beta} (\theta_\beta - \theta_\alpha)^2 \exp\left(-a \sum_\alpha \theta_\alpha^2 + b \sum_\alpha \theta_\alpha\right) \tag{2.1}$$

Indicaciones : $H$ es de la forma

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & \cdots & H_{kj}^{(0)} + iH_{kj}^{(1)} & \cdots \\ \vdots & H_{22} & \vdots & \vdots \\ H_{kj}^{(0)} - iH_{kj}^{(1)} & \vdots & H_{33} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

y la matriz jacobiana es $N^2 \times N^2$ de la forma

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial H_{jj}}{\partial \theta_\gamma} & \dfrac{\partial H_{kj}^{(0)}}{\partial \theta_\gamma} & \dfrac{\partial H_{kj}^{(1)}}{\partial \theta_\gamma} \\ \\ \dfrac{\partial H_{jj}}{\partial p_\mu} & \dfrac{\partial H_{kj}^{(0)}}{\partial p_\mu} & \dfrac{\partial H_{kj}^{(1)}}{\partial p_\mu} \end{pmatrix} \tag{2.3}$$