Universidad de los Andes

Departamento de Física

Tópicos en Mecánica Estadística
Tarea 4 : Matrices Aleatorias

Semestre 2018-2

Para entregar el martes 16 de octubre de 2018.

I Repaso : Polinomios de Hermite

Los polinomios de Hermite se definen así :

$$H_k(x) = e^{x^2} \left(-\frac{d}{dx}\right)^k e^{-x^2} \tag{1.1}$$

1. **Función generatriz**. Sea $f(\lambda, x) = e^{-\lambda^2+2\lambda x}$. Mostrar que $f(\lambda, x)$ es la función generatriz de los polinomios de Hermite, es decir que

$$f(\lambda, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} H_n(x) \tag{1.2}$$

   o de manera equivalente : $H_n(x) = \partial^n f(\lambda, x)/\partial\lambda^n|_{\lambda=0}$. Ayuda : considerar primero la función $e^{-(z+\lambda)^2}$, desarrollarla en serie de Taylor alrededor de $\lambda = 0$ y usar la definición (1.1) de los polinomios de Hermite.

2. Expandir explícitamente la función generatriz $f(\lambda, x)$ y demostrar que :

$$H_j(x) = j! \sum_{i=0}^{E(j/2)} (-1)^i \frac{(2x)^{j-2i}}{i!(j-2i)!} \tag{1.3}$$

   en donde $E(j/2)$ es la parte entera de $j/2$.

3. Derivando la función generatriz con respecto a x y luego con respecto a λ, deducir las siguientes ecuaciones de recurrencia :

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x) \tag{1.4}$$
$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x) \tag{1.5}$$

4. Usando las ecuaciones de recurrencia anteriores, demostrar que los polinomios de Hermite obedecen la siguiente ecuación diferencial :

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0 \tag{1.6}$$

5. Demostrar que los polinomios de Hermite son ortogonales en $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2}\,dx)$:

$$\langle H_n, H_m \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_m(x)\, e^{-x^2}\, dx = 0, \text{ si } n \neq m \tag{1.7}$$

6. Calculando $\int_{-\infty}^{+\infty}(f(\lambda,x))^2 e^{-x^2}\,dx$, determinar el cuadrado de la norma de los polinomios de Hermite $\langle H_n, H_n\rangle$.

Ayuda : En el libro "Métodos Matemáticos", G. Téllez, Ediciones Uniandes, 2004, capítulo VI.4, páginas 154–157, pueden consultar el desarrollo explícito de este estudio para los polinomios de Legendre. En este ejercicio hay simplemente que adaptar ese estudio a los polinomios de Hermite.

II El conjunto unitario gaussiano con potencial externo

II.1 Preliminares

En este ejercicio se estudiará una modificación del conjunto unitario gaussiano en el cual se impone un potencial adicional arbitrario u. La densidad de probabilidad propuesta es

$$P(x_1,\ldots,x_N) = C \prod_{1\le j<k\le N}(x_k-x_j)^2 e^{-\sum_{k=1}^{N}(x_k^2+u(x_k))} \tag{2.1}$$

Se definen las siguientes notaciones :

$$\begin{aligned}\Delta(x_1,\ldots,x_N) &= \prod_{1\le j<k\le N}(x_k-x_j) && (2.2)\\ w(x) &= e^{-x^2} && (2.3)\\ a(x) &= e^{-u(x)} && (2.4)\end{aligned}$$

y el producto escalar en $L^2(\mathbb{R}, w(x)\,dx)$

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)w(x)dx\,. \tag{2.5}$$

Sean

$$p_k(x) = x^k + \sum_{j=0}^{k-1} a_{kj}x^j \tag{2.6}$$

los polinomios ortogonales en $L^2(\mathbb{R}, w(x)dx)$

$$\langle p_k, p_j\rangle = \delta_{j,k}c_k\,. \tag{2.7}$$

1. Mostrar que los polinomios p_k son proporcionales a los polinomios de Hermite H_k y encontrar el factor de proporcionalidad entre los dos.
2. ¿Cuánto vale la norma cuadrada c_k de los polinomios p_k ?

II.2 Cálculo de la función de partición

La función de partición es

$$Z = C^{-1} = \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta(x_1,\ldots,x_N)|^2 \prod_{k=1}^{N} w(x_k)a(x_k)\,dx_k \tag{2.8}$$

1. Usando el determinante de Vandermonde

$$\Delta(x_1,\ldots,x_N) = \det(p_{k-1}(x_j)) \tag{2.9}$$

demostrar que

$$Z = \sum_{\sigma \in S_N} \sum_{\sigma' \in S_N} \epsilon(\sigma)\epsilon(\sigma') \prod_{k=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} p_{\sigma(k)-1}(x) p_{\sigma'(k)-1}(x) w(x) a(x)\, dx \tag{2.10}$$

en donde S_N es el grupo de permutaciones de N elementos y $\epsilon(\sigma)$ el signo de la permutación σ.

2. Demostrar que

$$Z = N! \sum_{r \in S_N} \epsilon(r) \prod_{k=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} p_{k-1}(x) p_{r(k)-1}(x) w(x) a(x)\, dx\,. \tag{2.11}$$

¿Cómo se relaciona la permutación r de esta última ecuación con las permutaciones σ y σ' de la pregunta anterior ?

3. Deducir que

$$Z = N! \det(M) \tag{2.12}$$

en donde M es una matriz $N \times N$ cuyos elementos de matriz M_{kj} precisará en función de los polinomios p_l.

4. Si $a(x) = 1$ calcular explícitamente Z y comprobar que se recupera el resultado visto en clase.

III Funciones de correlación

Una de las razones para considerar la generalización del conjunto unitario gaussiano con potencial externo, es que se pueden obtener las funciones de correlación por medio de derivaciones funcionales de la función de partición con respecto a este potencial.

1. A partir de la ecuación (2.8), calcular formalmente

$$\frac{\delta \ln Z}{\delta a(x)} \tag{3.1}$$

y relacionar esta cantidad con la densidad a un cuerpo $n^{(1)}(x)$.

2. Expresar la función de correlación de pares $n^{(2)}(x,y)$ en términos de derivadas funcionales de $\ln Z$ con respecto a $a(x)$ y $a(y)$.

3. Asumiendo el resultado de la ecuación (2.12), calcular la derivada funcional propuesta en (3.1) y encontrar una expresión para la densidad de la forma

$$n^{(1)}(x) = \frac{1}{Z} \sum_{k=1}^{N} \det(A_k) \tag{3.2}$$

en donde A_k son matrices $N \times N$ las cuales dará explícitamente.

4. Para $a(x) = 1$, calcular $\det(A_k)$. Mostrar entonces que se recupera la expresión para la densidad obtenida en clase.