Modelos solubles de sistemas de Coulomb: El plasma de dos componentes

Gabriel Téllez
Departamento de Física
Universidad de Los Andes

Modelos solubles de sistemas de Coulomb: El plasma de dos componentes

Introducción.

Modelos solubles de sistemas de Coulomb: El plasma de dos componentes

Introducción.

- El plasma de dos componentes.

Modelos solubles de sistemas de Coulomb: El plasma de dos componentes

Introducción.

- El plasma de dos componentes.

Relación con teorias de campo.

Modelos solubles de sistemas de Coulomb: El plasma de dos componentes

Introducción.

- El plasma de dos componentes.

Relación con teorias de campo.

- El modelo de sine-Gordon (bosones).
- El modelo de Thirring (fermiones).

Modelos solubles de sistemas de Coulomb: El plasma de dos componentes

Introducción.

- El plasma de dos componentes.

Relación con teorias de campo.

- El modelo de sine-Gordon (bosones).
- El modelo de Thirring (fermiones).

Solución exacta

Modelos solubles de sistemas de Coulomb: El plasma de dos componentes

Introducción.

- El plasma de dos componentes.

Relación con teorias de campo.

- El modelo de sine-Gordon (bosones).
- El modelo de Thirring (fermiones).

Solución exacta

- en dos dimensiones y en el punto fermiónico libre.

El plasma de dos componentes

Mecánica estadística clásica de un sistema de dos especies de partículas cargadas $+q$, $-q$.

Potencial de Coulomb:

$$\Delta v(\mathbf{r}) = -s_d \delta(\mathbf{r}) \qquad s_2 = 2\pi, \;\; s_3 = 4\pi$$

$$v(\mathbf{r}) = \begin{cases} -\ln r/L & \text{2D} \\ 1/r & \text{3D} \end{cases}$$

Hamiltoniano:

$$\frac{H}{k_B T} = \sum_{i<j} q^2 v(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) + \sum_{i<j} q^2 v(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) - \sum_{i,j} q^2 v(\mathbf{u}_i - \mathbf{v}_j)$$

Introduciendo la densidad de carga microscópica:

$$\hat{\rho}(\mathbf{r}) = \sum_i q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{u}_i) - \sum_j q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}_j)$$

$$H = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \hat{\rho}(\mathbf{r}) v(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\rho}(\mathbf{r}')$$

Equivalencia con el modelo de sine-Gordon

Se basa en la integral gaussiana:

$$\frac{\int dX e^{-\frac{1}{2}(X,AX)+(B,X)}}{\int dX e^{-\frac{1}{2}(X,AX)}} = e^{\frac{1}{2}(B,A^{-1}B)}$$

Equivalencia con el modelo de sine-Gordon

Se basa en la integral gaussiana:

$$\frac{\int dX e^{-\frac{1}{2}(X,AX)+(B,X)}}{\int dX e^{-\frac{1}{2}(X,AX)}} = e^{\frac{1}{2}(B,A^{-1}B)}$$

- Usando: $A^{-1} = v/\beta$, $B = i\beta\hat{\rho}(\mathbf{r})$ y $X = \phi(\mathbf{r})$ un campo auxiliar. Tenemos: $A = -\beta\Delta/s_d$ ya que $\Delta v = -s_d\delta$.

Equivalencia con el modelo de sine-Gordon

Se basa en la integral gaussiana:

$$\frac{\int dX e^{-\frac{1}{2}(X,AX)+(B,X)}}{\int dX e^{-\frac{1}{2}(X,AX)}} = e^{\frac{1}{2}(B,A^{-1}B)}$$

- Usando: $A^{-1} = v/\beta$, $B = i\beta\hat{\rho}(\mathbf{r})$ y $X = \phi(\mathbf{r})$ un campo auxiliar. Tenemos: $A = -\beta\Delta/s_d$ ya que $\Delta v = -s_d\delta$.

$$e^{-\beta H} = e^{-\frac{\beta}{2}\int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \hat{\rho}(\mathbf{r}) v(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\hat{\rho}(\mathbf{r}')} = \frac{\int \mathcal{D}\phi \; e^{\frac{\beta}{2s_d}\int \phi(\mathbf{r})\Delta\phi(\mathbf{r})d\mathbf{r} + i\beta\int \hat{\rho}(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})d\mathbf{r}}}{\int \mathcal{D}\phi \; e^{\frac{\beta}{2s_d}\int \phi(\mathbf{r})\Delta\phi(\mathbf{r})d\mathbf{r}}}$$

Definiendo

$$Z_0 = \int \mathcal{D}\phi \; e^{\frac{\beta}{2s_d}\int \phi(\mathbf{r})\Delta\phi(\mathbf{r})d\mathbf{r}}$$

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z_0}\int \mathcal{D}\phi \; \mathcal{O} \; e^{\frac{\beta}{2s_d}\int \phi(\mathbf{r})\Delta\phi(\mathbf{r})d\mathbf{r}}$$

Definiendo

$$Z_0 = \int \mathcal{D}\phi \; e^{\frac{\beta}{2s_d}\int \phi(\mathbf{r})\Delta\phi(\mathbf{r})d\mathbf{r}}$$

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z_0}\int \mathcal{D}\phi \; \mathcal{O} \; e^{\frac{\beta}{2s_d}\int \phi(\mathbf{r})\Delta\phi(\mathbf{r})d\mathbf{r}}$$

El resultado anterior se escribe

$$e^{-\beta H} = \left\langle \exp\left[i\beta \int \hat{\rho}(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})d\mathbf{r} \right] \right\rangle$$

Definiendo

$$Z_0 = \int \mathcal{D}\phi \; e^{\frac{\beta}{2s_d}\int \phi(\mathbf{r})\Delta\phi(\mathbf{r})d\mathbf{r}}$$

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z_0}\int \mathcal{D}\phi \; \mathcal{O} \; e^{\frac{\beta}{2s_d}\int \phi(\mathbf{r})\Delta\phi(\mathbf{r})d\mathbf{r}}$$

El resultado anterior se escribe

$$e^{-\beta H} = \left\langle \exp\left[i\beta \int \hat{\rho}(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})d\mathbf{r} \right] \right\rangle$$

Recordando la definición de la densidad de carga $\hat{\rho}$

$$e^{-\beta H} = \left\langle e^{i\beta q \sum_{i=1}^{N_+} \phi(\mathbf{u}_i)} e^{-i\beta q \sum_{j=1}^{N_-} \phi(\mathbf{v}_j)} \right\rangle$$

La función de gran partición es

$$\Xi = \sum_{N_+=0}^{\infty} \sum_{N_-=0}^{\infty} \frac{\zeta_+^{N_+} \zeta_-^{N_-}}{N_+! N_-!} \int e^{-\beta H} \prod_{i=1}^{N_+} d\mathbf{u}_i \prod_{j=1}^{N_-} d\mathbf{v}_j$$

La función de gran partición es

$$\Xi = \sum_{N_+=0}^{\infty} \sum_{N_-=0}^{\infty} \frac{\zeta_+^{N_+} \zeta_-^{N_-}}{N_+! N_-!} \int e^{-\beta H} \prod_{i=1}^{N_+} d\mathbf{u}_i \prod_{j=1}^{N_-} d\mathbf{v}_j$$

$$\Xi = \left\langle \sum_{N_+=0}^{\infty} \sum_{N_-=0}^{\infty} \frac{\zeta_+^{N_+} \zeta_-^{N_-}}{N_+! N_-!} \int \overbrace{e^{i\beta q \sum_{i=1}^{N_+} \phi(\mathbf{u}_i)} e^{-i\beta q \sum_{j=1}^{N_-} \phi(\mathbf{v}_j)}} \prod_{i=1}^{N_+} d\mathbf{u}_i \prod_{j=1}^{N_-} d\mathbf{v}_j \right\rangle$$

La función de gran partición es

$$\Xi = \sum_{N_+=0}^{\infty} \sum_{N_-=0}^{\infty} \frac{\zeta_+^{N_+} \zeta_-^{N_-}}{N_+! N_-!} \int e^{-\beta H} \prod_{i=1}^{N_+} d\mathbf{u}_i \prod_{j=1}^{N_-} d\mathbf{v}_j$$

$$\Xi = \left\langle \sum_{N_+=0}^{\infty} \sum_{N_-=0}^{\infty} \frac{\zeta_+^{N_+} \zeta_-^{N_-}}{N_+! N_-!} \int \overbrace{e^{i\beta q \sum_{i=1}^{N_+} \phi(\mathbf{u}_i)} e^{-i\beta q \sum_{j=1}^{N_-} \phi(\mathbf{v}_j)}} \prod_{i=1}^{N_+} d\mathbf{u}_i \prod_{j=1}^{N_-} d\mathbf{v}_j \right\rangle$$

El problema es ahora el de un gas ideal, sin interacción en un campo externo $\phi(\mathbf{r})$ fluctuante gaussiano.

La función de gran partición es

$$\Xi = \sum_{N_+=0}^{\infty}\sum_{N_-=0}^{\infty}\frac{\zeta_+^{N_+}\zeta_-^{N_-}}{N_+!N_-!}\int e^{-\beta H}\prod_{i=1}^{N_+} d\mathbf{u}_i \prod_{j=1}^{N_-} d\mathbf{v}_j$$

$$\Xi = \left\langle \sum_{N_+=0}^{\infty}\sum_{N_-=0}^{\infty}\frac{\zeta_+^{N_+}\zeta_-^{N_-}}{N_+!N_-!}\int \overbrace{e^{i\beta q\sum_{i=1}^{N_+}\phi(\mathbf{u}_i)}e^{-i\beta q\sum_{j=1}^{N_-}\phi(\mathbf{v}_j)}}\prod_{i=1}^{N_+} d\mathbf{u}_i \prod_{j=1}^{N_-} d\mathbf{v}_j \right\rangle$$

El problema es ahora el de un gas ideal, sin interacción en un campo externo $\phi(\mathbf{r})$ fluctuante gaussiano.

$$\Xi = \left\langle \sum_{N_+=0}^{\infty}\frac{\zeta_+^{N_+}}{N_+!}\left[\int e^{i\beta q\phi(\mathbf{u})}d\mathbf{u}\right]^{N_+}\sum_{N_-=0}^{\infty}\frac{\zeta_-^{N_-}}{N_-!}\left[\int e^{-i\beta q\phi(\mathbf{v})}d\mathbf{v}\right]^{N_-}\right\rangle$$

Reconocemos la serie de Taylor de la exponencial. Finalmente

$$\Xi = \left\langle \exp\left[\zeta_+ \int e^{i\beta q\phi(\mathbf{r})} d\mathbf{r}\right] \exp\left[\zeta_- \int e^{-i\beta q\phi(\mathbf{r})} d\mathbf{r}\right] \right\rangle$$

Reconocemos la serie de Taylor de la exponencial. Finalmente

$$\Xi = \left\langle \exp\left[\zeta_+ \int e^{i\beta q\phi(\mathbf{r})} d\mathbf{r}\right] \exp\left[\zeta_- \int e^{-i\beta q\phi(\mathbf{r})} d\mathbf{r}\right] \right\rangle$$

$$\Xi = \left\langle \exp\left[\int \left(\zeta_+ e^{i\beta q\phi(\mathbf{r})} + \zeta_- e^{-i\beta q\phi(\mathbf{r})}\right) d\mathbf{r}\right] \right\rangle$$

Para un sistema neutro las fugacidades son iguales $\zeta_+ = \zeta_- = \zeta$.

$$\boxed{\Xi = \left\langle \exp\left[2\zeta \int \cos\left(\beta q\phi(\mathbf{r})\right) d\mathbf{r}\right] \right\rangle}$$

La teoría de campos de sine-Gordon

$$\boxed{\Xi_{\text{Coulomb}} = \frac{Z_{\text{sG}}}{Z_0}}$$

con la funcional generatriz de la teoria de sine-Gordon

$$Z_{\text{sG}} = \int \mathcal{D}\phi e^{-\int \mathcal{L}_{\text{sG}}(\phi(\mathbf{r}),\partial_\mu \phi(\mathbf{r}))d\mathbf{r}}$$

cuyo lagrangiano es

$$\mathcal{L}_{\text{sG}} = -\frac{\beta}{2s_d}\,\phi(\mathbf{r})\Delta\phi(\mathbf{r}) - 2\zeta\cos\left(\beta q \phi(\mathbf{r})\right)$$

Ecuación de movimiento clásica y teoría de Poisson–Boltzmann

Las ecuaciones de Euler–Lagrange para la teoria de sine-Gordon son:

$$\Delta\phi = -2 s_d \zeta q \sin\left(\beta q \phi\right)$$

Para $\psi = -i\phi$ es la ecuación de campo medio basada en la aproximación de Poisson–Boltzmann (Debye–Hückel no linearizada).

Modelo de Thirring masivo

Está definido por el Lagrangiano

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Th}} = \bar{\psi} i \gamma_\mu \partial^\mu \psi - \frac{1}{2} g j_\mu j^\mu - m\sigma$$

con ψ un campo fermiónico, $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ y $\sigma = \bar{\Psi}\Psi$. De ahora en adelante trabajaremos en dos dimensiones $\mu = 0, 1$.

Equivalencia entre sine-Gordon y Thirring

Coleman (1975) mostró que la serie de pertubaciones en ζ del modelo de sine-Gordon es igual a la serie de pertubaciones en m del modelo de Thirring a condición de hacer las identificaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \beta q^2 &= \frac{2\pi}{\pi + g} \\ 2\zeta \cos\left(\beta q \phi\right) &= -m\sigma \\ i\frac{\beta q}{2\pi}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu \phi &= j^\mu \end{aligned}$$

Así una teoría de bosones se transforma en una teoría de fermiones y viceversa. Esta transformación conocida como bosonización (o fermionización) puede ocurrir en dos dimensiones.

Consecuencia para el gas de Coulomb

Si $\beta q^2 = 2$ entonces $g = 0$: la teoría de Thirring se vuelve una teoría de Fermiones libres de masa $m = 2Z\zeta$.[1] La teoría libre siendo trivial podemos calcular función de partición gran canónica y correlaciones del gas de Coulomb fácilmente.

[1] Relación dependiente del esquema de renormalización.

Solución exacta del plasma de dos componentes

Haremos una demostración directa sin usar la teoría de campos. Para $\beta q^2 = 2$, en dos dimensiones y teniendo en cuenta la forma original del hamiltoniano, el factor de Bolztmann se escribe

$$
\begin{aligned}
e^{-\beta H} &= L^{2N} \left| \frac{\prod_{i<j}(u_i - u_j) \prod_{i<j}(v_i - v_j)}{\prod_{i,j}(u_i - v_j)} \right|^2 \\
&= L^{2N} \left| \det \left(\frac{1}{u_j - v_k} \right)_{j,k} \right|^2
\end{aligned}
$$

Para evitar el colapso de particulas de signo opuesto inicialmente confinamos las partículas a los sitios de dos redes, una para las positivas y otra para las negativas.

La función de gran partición para configuraciones neutras

$$\Xi = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{L^{2N}}{(N!)^2} \sum_{\{u_i, v_i\}} \left| \det \left(\frac{1}{u_j - v_k} \right)_{j,k} \right|^2 \prod_i \zeta_+(u_i) d\mathbf{u}_i \zeta_-(v_i) d\mathbf{v}_i$$

Se puede mostrar que $\Xi = \det(1+K)$ con

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{L\zeta(u_j)}{u_j - v_k}\right)_{j,k} \\ \left(\frac{L\zeta(v_j)}{\bar{v}_j - \bar{v}_k}\right)_{j,k} & 0 \end{pmatrix}$$

Se puede mostrar que $\Xi = \det(1+K)$ con

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{L\zeta(u_j)}{u_j - v_k}\right)_{j,k} \\ \left(\frac{L\zeta(v_j)}{\bar{v}_j - \bar{v}_k}\right)_{j,k} & 0 \end{pmatrix}$$

Verificación para redes de máximo una particula positiva y una negativa:

$$\begin{aligned} \Xi &= 1 + \frac{\zeta_+(u)\zeta_-(v)L^2}{|u-v|^2} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & \frac{L\zeta(u)}{u-v} \\ \frac{L\zeta(v)}{\bar{v}-\bar{v}} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

El gran potencial es entonces

$$\Omega = -k_B T \; \mathrm{Tr} \ln(1 + K) = -k_B T \sum_{\lambda} \ln(1 + \lambda)$$

en donde λ son los valores propios de K.

El operador K y el operador de Dirac

Usando la identidad

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\bar{z}-\bar{z}'} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{1}{z-z'} = \pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

se puede mostrar que, en el limite continuo en que el area S de la celda elemental de la red tiende a cero, el operador K es el inverso del operador de Dirac[2]

$$mK^{-1} = \gamma_\mu \partial^\mu = \sigma_x\partial_x + \sigma_y\partial_y = \begin{pmatrix} 0 & 2\partial_z \\ 2\partial_{\bar{z}} & 0 \end{pmatrix}$$

[2] $m = (2\pi L/S)\zeta$ es la fugacidad renormalizada (tambien es la “masa” del modelo de Thirring).

De nuevo encontramos la equivalencia entre el gas de Coulomb y una teoria de campos de fermiones libres cuando $\beta q^2 = 2$.

Para obtener el gran potencial $\Omega = -k_B T \,\mathrm{Tr} \ln(1+K)$ basta con resolver el problema de valores propios para el operador de Dirac.

Las correlaciones se obtienen sencillamente calculando el propagador o función de Green G del operador de Dirac

$$\begin{pmatrix} m & 2\partial_z \\ 2\partial_{\bar{z}} & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{++} & G_{+-} \\ G_{-+} & G_{--} \end{pmatrix} = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\mathbb{I}$$

Para un sistema homogeneo e isotrópico

$$G_{++}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = G_{--}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{m}{2\pi}K_0(m|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$$

y las correlaciones son

$$\rho_{++}^{(2)T}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -m^2 G_{++}(\mathbf{r},\mathbf{r}')G_{++}(\mathbf{r}',\mathbf{r}) = -\left[\frac{m^2}{2\pi}K_0(m|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\right]^2$$

Se observa el decaimiento exponencial de las correlaciones en e^{-2mr}. El inverso de la fugacidad renormalisada m^{-1} es la longitud de apantallamiento.

Conclusiones y perspectivas

Estudiamos las relaciones que hay entre el plasma de dos componentes bidimensional, modelo de mecánica estadística clásica, con teorías de campo cuánticas: modelo de sine-Gordon y modelo de Thirring masivo.

Para $\beta q^2 = 2$ exploramos la solución exacta del plasma de dos componentes, posible gracias a su equivalencia con una teoria de fermiones libres.

Cabe anotar que para $\beta q^2 < 2$ el modelo de sine-Gordon es integrable por ansatz de Bethe y se puede calcular la energía de su estado fundamental. Esta está relacionada con el gran potencial del plasma de dos componentes y recientemente gracias a estos resultados de teoria de campos integrables se conocen las funciones termodinámicas del plasma de dos componentes para cualquier valor de $\beta q^2 < 2$.

Sin embargo las correlaciones para valores de $\beta q^2 < 2$ sigue siendo un problema abierto.