(1)

Optimización convexa:

Def: $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo si $\forall \alpha, \beta \in C \ \forall t \in [0,1]$ $(t\alpha + (1-t)\beta \in C.)$

Def: $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es un cono convexo si C es convexo y $\forall \alpha \in C \ \forall t > 0 \ (t\alpha \in C)$

Teorema: (del hiperplano de separación)

Si A, B son conjuntos convexos no vacíos en $\mathbb{R}^n$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \exists \ \underset{\in \mathbb{R}^n}{\vec{g}} \neq 0, \ b \in \mathbb{R} \quad \begin{array}{l} \vec{g}^t x \leq b \quad \forall x \in A \\ \vec{g}^t x \geq b \quad \forall x \in B. \end{array}$$

Consecuencia Todo conjunto cerrado y convexo es la intersección de los semiespacios que lo contienen.

$$C = \bigcap_{(\alpha, H) \in I} \{x : H(x) \leq \alpha\}.$$

Def. Si C es un conjunto convexo y $z \in \overline{C} \setminus (C^\circ)$ y $\vec{a} \neq 0$ satisface $a^t x \leq a^t z \ \forall x \in C$

$\Rightarrow \{x : a^t x = a^t z\}$ es un hiperplano de soporte de C

Consecuencia: Si (C es convexo y no vacío) y $z \in \partial C \Rightarrow$ existe un hiperplano de soporte en z.

Def: K es un cono propio si es convexo, cerrado, puntudo y sólido.

$x \preceq_K y$ ssi $y - x \in K$

$$K^* = \{y \in \mathbb{R}^n : y^t x \geq 0, \ \forall x \in K\}.$$

Teorema: Si K es un cono propio $\Rightarrow$ $(K^*)^* = K$ y el dual es propio

Ejemplos: **Def**: Un $\mathcal{V}$-polihedro es un conjunto de la forma $\mathrm{Conv}(\{p_1,\dots,p_m\}) + \mathrm{Cone}(\{q_1,\dots,q_s\})$ (2)

Def: Un poliedro es el conjunto de soluciones de una colección finita de desigualdades lineales

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} = P \quad \leftarrow \mathcal{H}\text{-descripción}$$

Teorema (Eliminación de Fourier-Motzkin)
Todo $\mathcal{H}$-polihedro es un $\mathcal{V}$-polihedro y sabemos pasar, algorítmicamente, de una descripción a la otra.

Consecuencia: Todo polihedro acotado es la clausura convexa de finitos puntos. #

- Todo polihedro es la intersección de algún ortante positivo con un subespacio lineal.

Ejemplo:

$$\{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : |x| \leq t\} = C_{\|\cdot\|}$$

$$\{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : |x|_* \leq t\} = C_{\|\cdot\|_*} \qquad \|y\|_* = \sup\{y^t x : |x| \leq 1\}.$$

Si $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ $\quad C_{\|\ \|_2}$ se llama el cono de Lorentz.

~~Ejemp~~ Los rayos extremales de $\mathcal{L}$ son los puntos de la bola unitaria $\{(x,1) : |x|_2 = 1\}$.

Ejemplo. $S_+(V) = \{p(x) \in \mathrm{Sym}^2(V) : p(x) \geq 0\}$ ← polinomios cuadráticos no negativos

$p(x) = x^t A x$, para A simétrica

$A \succeq 0$. $\qquad \{x : x^t B^{-1} x \leq 1\}$

Todo elemento de $S_+(V)$ es una suma de cuadrados $vv^t : v \in \mathbb{R}^n$ y hay infinitos rayos extremales. ‖

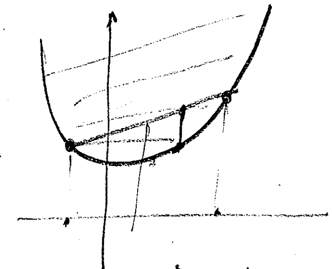
Orden: $A \succeq_{S_+} sI \iff \lambda_{\min}(A) \geq s$. $\qquad A \preceq B \iff \mathcal{E}_A \subseteq \mathcal{E}_B$

$\{x : x^t A^{-1} x \leq 1\}$

$(v,1) \succeq_{\mathcal{L}}$

II. Funciones convexas:

3



Def: $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es convexa ssi

1. $dom(f)$ es un conjunto convexo
2. $\forall\ \alpha, \beta \in dom(f) \quad \forall t \in [0,1] \quad f(t\alpha + (1-t)\beta) \leq tf(\alpha) + (1-t)f(\beta)$.

Obs: Si $x \in dom(f)$ define $g_x(t) = f(x + tv)$, $v \in \mathbb{R}^n$
f es convexa ssi g_x lo es $\forall x$.

Def: $Epi(f) = \{(x,y) : y \geq f(x)\}$
Teo: f convexa

Teorema: Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función con dominio abierto y convexo.

1. Si f es diferenciable entonces
f convexa ssi $\forall y, x \in dom(f) \left(f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^t (y - x) \right)$
2. Si f es dos veces diferenciable entonces
f convexa ssi $\mathcal{H}_f(x) \succcurlyeq 0 \quad \forall x \in dom(f)$.
3. f es convexa ssi $\{(x,y) : y \geq f(x)\}$ es convexo.

Obs: La desigualdad de Jensen es la definición de convexidad

$$f(\theta_1 x_1 + \dots + \theta_n x_n) \leq \theta_1 f(x_1) + \dots + \theta_n f(x_n)$$

$$f(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[f(X)].$$

Cómo construir funciones convexas?

Teorema:

1. Si $\{g_\alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ dom(g_\alpha)\ conv\}$ son funciones convexas $\Longrightarrow g(x) = \sup_{\alpha \in I} g_\alpha(x)$ es convexa
2. Si $f(x,y) : \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \longrightarrow \mathbb{R}$ es convexa
$\Longrightarrow g(x) = \inf_{y \in D} f(x,y)$ D convexo
es una función convexa.

Reglas de composición: ④

Si $h: \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ después $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$g_i: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciables $f(x) = h(g_1(x), \dots, g_k(x))$

tenemos:

$$\boxed{\mathcal{H}(f)(x) = g'(x)^t \left[\mathcal{H}(h)(g(x))\right] g'(x) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial h}{\partial y_i}(g(x)) \cdot \mathcal{H}(g_i)(x)}$$

luego, (Cuando la composición es convexa)

Teorema:

① Si h es convexa y no decreciente en cada argumento (i.e. $\frac{\partial h}{\partial y_i} \geq 0 \ \forall i$) y las g_i son convexas $\Longrightarrow$ f es convexa

② Si h es convexa y no creciente en cada argumento (i.e. $\frac{\partial h}{\partial y_i} \leq 0 \ \forall i$) y las g_i son cóncavas $\Longrightarrow$ f es convexa.

Convexidad respecto a conos:

Suponga $K \subseteq \mathbb{R}^m$ es un cono propio

Def: $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una función K-convexa si

① $\mathrm{dom}(f)$ es convexo

② $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{dom}(f)$, $\forall t \in [0,1]$

$$f(t\alpha + (1-t)\beta) \preccurlyeq_K t f(\alpha) + (1-t) f(\beta)$$

Note que Jensen también tiene ~~sentido~~ en conos

$$\boxed{f(\mathbb{E}[X]) \preccurlyeq_K \mathbb{E}[f(X)]}$$

Lema: (Reducción a convexidad usual)

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es K-convexa ssi

$\forall \lambda \in K^*$ $h_\lambda: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es convexa

$h_\lambda(x) = \lambda^t f(x)$

Ejemplos:

1. Las normas son convexas

2. $f(x) = \log(e^{x_1} + \dots + e^{x_n})$ es convexa

[Note que $\max\{x_1, \dots, x_n\} \leq f(x) \leq \max\{x_1, \dots, x_n\} + \log(n)$
así que $f(x)$ es una "versión diferenciable" del máximo]

Dem de convexidad:

Calculamos

$$\mathcal{H}(f)(x) = \frac{1}{\Sigma^2}\left[\underbrace{\Sigma}_{:= e^{x_1} + \dots + e^{x_n}} \begin{bmatrix} e^{x_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{x_n} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e^{x_i} e^{x_j} \end{bmatrix}\right]$$

Vemos la forma cuadrática asociada $v^t \mathcal{H}(f)(x) v$:

$$\frac{1}{\Sigma^2}\left[\left(\sum_{i=1}^n e^{x_i}\right)\left(v_1^2 e^{x_1} + \dots + v_n^2 e^{x_n}\right) - \left(\sum_{i=1}^n v_i e^{x_i}\right)^2\right]$$

no negativa por Cauchy-Schwartz ó porque

$$v_1^2 \frac{e^{x_1}}{\Sigma} + \dots + v_n^2 \frac{e^{x_n}}{\Sigma} = \mathbb{E}[Z^2]$$

Jensen

donde $\mathbb{P}\{Z = v_i\} = \dfrac{e^{x_i}}{\Sigma}$ y $\mathbb{E}[Z^2] \geq \mathbb{E}[Z]^2$

3. $f(X) = \lambda_{max}(X)$ para X una matriz simétrica.
es convexa

Dem: $\lambda_{max}(X) = \sup\{v^t X v : \|v\|_2 \leq 1\}$
y la función $X \longrightarrow v^t X v$ para v fijo
es lineal y luego convexa en X.

④ **Lema del complemento de Schur:** ⑥

Suponga que $X = \begin{bmatrix} A & B \\ B^t & C \end{bmatrix}$ simétrica

entonces $X \succ 0$ ssi $A \succ 0$ y $\boxed{S = C - B^t A^{-1} B} \succ 0$

Complemento de Schur de C en X.

Dem: Si $A \succeq 0$ entonces para todo v

la función $u^t A u + 2 v^t B^t u + v^t C v = g(u)$

es convexa y por lo tanto alcanza su mínimo cuando

$\nabla g(u) = 0$, es decir si $u = -A^{-1} B v$.

sustituyendo tenemos $\inf_u g(u) = v^t S v$.

Luego $A \succ 0$ y $S \succ 0 \Rightarrow X \succ 0$.

Recíprocamente si $X \succ 0 \Rightarrow \binom{u}{v}^t X \binom{u}{v}$ es una

función convexa en (u,v) luego $\inf_u g(u) = v^t S v$

es convexa y concluimos $S \succeq 0$. Como el ínfimo

se alcanza $X \succ 0 \Rightarrow S \succ 0$.

⑤ Si $g_1(x), \dots, g_k(x)$ son funciones convexas $\forall$ dupla para $r \in \mathbb{N}$ fijo

$f(x) = [g(x)]_{[1]} + \dots + [g(x)]_{[r]}$ donde $g(x)_{[i]}$ = "i-ésima componente más grande del vector $g(x) = (g_1(x), \dots, g_k(x))$"

$f(x)$ es convexa.

Dem: $h(z_1, \dots, z_k) := z_{[1]} + \dots + z_{[r]} = \max\left(z_{i_1} + \dots + z_{i_r} : \begin{array}{l} \{i_1, \dots, i_r\} \subseteq [1, \dots, k] \\ |\{i_1, \dots, i_r\}| = r \end{array} \right)$

es convexa porque es supremo de funciones lineales y

h es no decreciente en cada argumento.

Como las g_i son convexas la composición

$f(x) = h(g_1(x), \dots, g_k(x))$ es convexa.

⑥ La función $f(X) = XX^t$ con $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$

es $S_+(n)$ - convexa.

<u>Dem:</u> Basta probar que $\lambda^t f$ es convexa para los rayos extremales del cono $S_+(n)^* = S_+(n)$. estos corresponden a las matrices zz^t

$$\lambda^t f = tr\left(zz^t X X^t\right) = \| Xz \|_2$$

ésta es una composición de la función convexa $\| \cdot \|_2$ y una función lineal $X \longrightarrow Xz$ luego convexa en X y el resultado se sigue

Def: Un problema de optimización en $\mathbb{R}^n$ consiste en calcular $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(P) \qquad p_* = \inf \left\{ f_0(x) : \begin{array}{ll} f_i(x) \leq 0 , & 1 \leq i \leq m \\ h_i(x) = 0 , & 1 \leq i \leq p \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{D} = \bigcap_{i=0}^{m} \mathrm{dom}(f_i) \cap \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{dom}(h_i)$$

El problema se dice <u>factible</u> si $\underbrace{\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} f_i(x) \leq 0 \\ h_i(x) = 0 \\ x \in \mathcal{D} \end{array} \right\}}_{F} \neq \emptyset$

<u>soluble</u> si el ínfimo se alcanza en algún punto de F.

p_* es el <u>valor óptimo</u> y cualquier punto factible donde p_* se alcance es una <u>solución óptima</u>

Def: (P) es convexo si

1. $f_i(x)$, $0 \leq i \leq m$ son funciones convexas
2. $h_i(x)$ $1 \leq i \leq p$ son funciones afines.

¿En qué sentido son especiales los problemas convexos?

<u>Teorema:</u> Si (P) es un problema convexo, entonces

1. <u>Todo óptimo local es un óptimo global</u>
(i.e. si x es factible y existe un $R > 0$:
$f_0(x) = \inf \{ f_0(z) :$ z es factible $\|z - x\|_2 < R \}$
$\Rightarrow$ x es una solución óptima)
2. Si f_0 es diferenciable entonces un punto factible x es óptimo $\boxed{\text{ssi}}$

$$\nabla f_0(x)^t (y - x) \geq 0 \qquad \forall y \in F.$$

Ejemplos: (Condiciones de optimalidad permiten encontrar algunas veces la solución) 9

① Sin restricciones, $f_0(x)$ convexa y diferenciable con dominio abierto.

$x \in dom(f_0)$ es óptimo ssi $\nabla f(x_0) \equiv 0$ (equivalente en $dom(f_0)$ con $\nabla f(x_0)^t (y-x_0)$ $\forall y \in dom(f)$)

Ej: $f_0(x) = -\sum_{i=1}^{m} \log(b_i - a_i^t x)$

con $dom(f_0) = \{x : Ax < b\}$ ← abierto.

x^* es óptimo ssi x^* satisface:

$$Ax^* < b, \quad \nabla f_0(x^*) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{b_i - a_i^t x^*} \vec{a_i} = 0$$

② Optimización sobre el ortante positivo

$p_* = \inf \{ f_0(x) : x \geq 0 \}$, f_0 convexa $dom(f_0) = \mathbb{R}^n$

Optimalidad

$\nabla f_0(x^*)^t (y - x^*) \geq 0 \quad \forall y \geq 0 \implies$ (i) $\nabla f_0(x^*) \geq 0$ (ii) $\nabla f_0(x^*)^t x^* \geq 0$

y $x^* \geq 0$

$\Rightarrow \forall i \; x_i (\nabla f_0(x))_i = 0$

• Ésta idea es muy útil para minimización parcial (sólo con respecto a algunas de las variables):

(*) Ejemplo: Si $\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^t & P_{22} \end{bmatrix} \geq 0$, encuentre

$$\boxed{\min \; \underbrace{x_1^t P_{11} x_1 + 2 x_1^t P_{12} x_2 + x_2^t P_{22} x_2}_{f_0(x_1, x_2)} \quad \text{s.a.} \quad f_i(x_1) \leq 0, \; 1 \leq i \leq m}$$

$$\inf \{ f_0(x_1, x_2) : f_i(x_1) \leq 0, \; 1 \leq i \leq m \} = \inf \{ \tilde{f}_0(x_1) : f_i(x_1) \leq 0 \}$$

con $\boxed{\tilde{f}_0(x_1) = \inf_{x_2} f_0(x_1, x_2)}$

en este caso $\inf_{x_2} (f_0(x_1, x_2)) = x_1^t [P_{11} - P_{12} P_{22}^{-1} P_{12}^t] x_1$ Calcula analíticamente

Porque $\nabla_{x_2} f_0(x_1, x_2) = 2[P_{22} x_2 + P_{12}^t x_1] = 0$

$\Rightarrow x_2^* = -P_{22}^{-1} P_{12}^t x_1 \Rightarrow \tilde{f}_0(x_1) = f_0(x_1, x_2^*)$

y el problema se reduce a:

$$\boxed{\min \; x_1^t [P_{11} - P_{12} P_{22}^{-1} P_{12}^t] x_1 \; : \; f_i(x_1) \leq 0, \; 1 \leq i \leq m.}$$

Algunos problemas de optimización convexa:

I. Optimización lineal $\min\{c^t x : Ax \preceq b\}$.

Ejemplos: 0 Problema de la dieta.

1 (Centro de Chebyshev) ¿Cuál es la bola euclídea de máximo radio que cabe en un poliedro?

Variables $(\vec{x}_c, r)$ centro y radio de la bola.

$B(\vec{x}_c, r) \subseteq \{x : a^t x \leq \alpha\}$ ssi

$a^t(\vec{x}_c + ry) \leq \alpha \quad \forall y : \|y\|_2 \leq 1$ ssi $\boxed{r\,|a^t|_2 \leq \alpha - a^t \vec{x}_c}$

desigualdad LINEAL.

2 (Desigualdades de Chebyshev para distribuciones discretas)

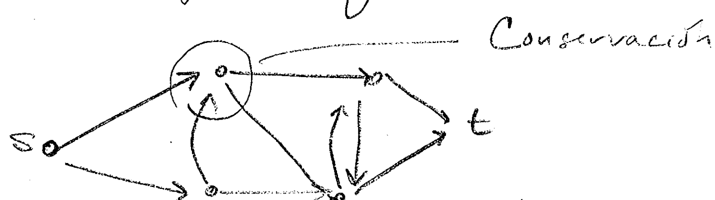
Si $p_i = \mathbb{P}\{X = u_i\}$, $X(\omega) \in [n]$.

$\{(p_1, \dots, p_n) : p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1\}$ es el simplex de distribuciones de probabilidad

y para cualquier función f, $\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{i=1}^n p_i f(u_i)$

es lineal dándonos objetivos y restricciones.

3 (Max-flow)



¿Cuál es el máximo flujo de s a t si tenemos capacidades límite conocidas c_{ij} en cada arista?

II. Optimización cuadrática $\min\left\{x^t P x + q^t x + r : \begin{array}{l} Gx \preceq h \\ Ax = b \end{array}\right\}$

Ejemplos:

$x^t b =$

1 (mínimos cuadrados) $\min \|Ax - b\|_2^2 = \langle Ax - b, Ax - b\rangle =: f_0(x) = x^t A^t A x - 2b^t A x + b^t b$

$\nabla f_0(x) =$

$\nabla f_0(x) = 2A^t A x - 2b^t A = 0$

$\boxed{x^* = [A^t A]^{-1} A^t b}$

$x_1 p_1 + \dots + x_n p_n = \frac{x_i}{P_{0_i}} (P_{f_i} - P_{0_i})$

unidades de acción i

2 (Portafolio de Markowitz:) n activos

p_i — Δ precio relativo $\dfrac{P_f - P_0}{P_0}$

x_i — monto en USD en dólares del portafolio a cada activo.

Asumimos que p es V.A. con media $\overline{p}$ y (11)

$$0 \leq \mathbb{E}\left[\left[\alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_n p_n - \alpha_1 \overline{p_1} - \cdots - \alpha_n \overline{p_n}\right]^2\right] = \alpha^t \Sigma \alpha$$

$$\min_{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n} \left\{ \cancel{\alpha}^t \Sigma \cancel{\alpha} \; : \; \begin{array}{l} \overline{p}^t x_i \geq q \\ x_i \geq 0 \\ \sum x_i = B \end{array} \right\}.$$

$$\Sigma$$

$$\left[\alpha_1 (p_1 - \overline{p_1}) + \cdots + \alpha_n (p_n - \overline{p_n})\right]^2 = \alpha_i \alpha_j \mathbb{E}\left[(p_i - \overline{p_i})(p_j - \overline{p_j})\right]$$

$\boxed{\cancel{\text{B}}\text{ A. Second order cone programs}}$

$$\min \left\{ c^t x \; : \; \|A x_i + b_i\|_2 \leq c_i^t x + d_i \atop Fx = g \right\}$$

Ejemplos:

① Robust Linear programming

$$\min \{ c^t x : a_i^t x \leq b_i \quad 1 \leq i \leq m \} +$$

Incertidumbre en los parámetros $\vec{a_i}$. sólo conocidas

Sabemos que $\vec{a_i} \in \mathcal{E}_i := \{ \boxed{\overline{a_i}} + \boxed{P_i} u_i : |u|_2 \leq 1 \}$

(Programa lineal robusto

$$\begin{array}{ll} \min & c^t x \\ \text{s.a.} & \sup\limits_{\cancel{a_i \in \mathcal{E}_i}} (a_i^t x : a_i \in \mathcal{E}_i) \leq b_i \end{array} \quad u^t P^t x$$

$$\sup (a_i^t x : a_i \in \mathcal{E}_i) = \sup \left\{ \overline{a_i}^t x + (P_i u)^t x : |u|_2 \leq 1 \right\}$$

$$= \boxed{\overline{a_i}^t x + \|P_i^t x\|_2 \leq b_i}$$ ⟵ Second order cone constraint en x.

② Superficies minimales:

Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable

$$A = \iint_C \sqrt{1 + |\nabla f|^2}\, dA \qquad \min \left\{ A(f) : f|_{\partial D} = g \right\}.$$

Resolveremos mediante discretización:

$$\nabla f(x) \approx \frac{1}{K}\begin{bmatrix} f_{i+1,j} - f_{i,j} \\ f_{i,j+1} - f_{ij} \end{bmatrix} \quad \left\| \begin{pmatrix} \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{K} \\ \frac{f_{i,j+1} - f_{ij}}{K} \end{pmatrix} \right\|$$

$$A(f) \approx \sum_{i,j=0}^{K-1} \frac{1}{K^2} \left\| (1, \operatorname{disc} \nabla f) \right\|$$

Valores de la frontera son restricciones en f_{ij}.

$$\min \sum t_{ij} :$$

$$\frac{1}{K^2} \left\| \begin{pmatrix} \operatorname{disc} \nabla f \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \leq t_{ij} \qquad i,j = 0, \dots K$$

$$\left.\begin{array}{l} f_{0j} = l_j \\ f_{Kj} = r_j \end{array}\right] \longleftarrow \text{condiciones de frontera.}$$

$\lim_{K \to \infty} h$ es el óptimo.

Problemas variacionales en gral?

IV Programación semidefinida

$$\min \left\{ tr(CX) : \begin{array}{l} tr(A_i X) = b_i \\ X \succeq 0 \end{array} \right\}$$

$$\min \{ c^t x : x_1 A_1 + \dots + x_n A_n \preceq B \}.$$

Ejemplo:

(1) Encuentre el valor mínimo que puede tomar el máximo valor propio de una matriz simétrica en el espacio vectorial $\langle A_1, \dots, A_m \rangle$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \min \ s \\ \quad x_1 A_1 + \dots + x_n A_n - sI \preceq 0 \end{array}}$$

(2) Si (FMMC) A es una matriz doblemente estocástica (13)

$$\left(\sum_j A_{ij} = \sum_i A_{ij} = 1, \quad A_{ij} \geq 0\right)$$

entonces el vector de unos es un vector propio con valor propio 1.

$$1 \geq \boxed{\lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n}$$

$$SLEM = \max\left(|\lambda_i| : i \geq 2\right).$$

Dado un grafo G.

P_{ij} simétrica, no negativa $\mathbb{1}^t P = \mathbb{1}$

$P_{ij} = 0$, $ij \notin E(G)$. $\left[P - \frac{1}{n} 1 1^t\right]$

restricción al complemento ortogonal, sigue siendo simétrica.

$$\begin{cases} \min \quad t : \\ \left[\begin{array}{l} -tI \leq P - \frac{1}{n} 1 1^t \leq t I \\ P \mathbb{1} = \mathbb{1} \\ P_{ij} \geq 0 \end{array}\right] \end{cases}$$

lineal restricciones.

pued hacerl en un espectrahedro

$$\begin{bmatrix} P & \vdots \\ 1 \cdots & 1 \end{bmatrix} \succeq 0 \iff P \succeq 0 \text{ y}$$

$$\begin{bmatrix} n & 1 \cdots \\ \vdots & P \end{bmatrix} \succeq \quad P - \frac{\vec{1}\vec{1}^t}{n} \succeq 0$$

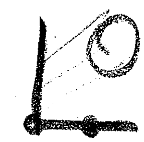
[illegible]

$\boxed{\text{Optimización vectorial}}$

Fijo $K \subseteq \mathbb{R}^m$ cono propio

$$K\text{-}\min \left\{ f_0(x) : \begin{array}{ll} f_i(x) \leq 0, & 1 \leq i \leq m \\ h_i(x) = 0, & 1 \leq i \leq p \end{array} \right\} \quad (PV)$$

$$\mathcal{O} = \{ f_0(x) : x \in F \} \subseteq \mathbb{R}^m$$



Def: x^* es un punto óptimo si $f_0(x^*)$ es mínimo de $\mathcal{O}$

Def: x^* es óptimo en el sentido de Pareto si $f_0(x^*)$ es minimal en $\mathcal{O}$.

Cómo encontrar óptimos de Pareto?

Lema ① Si $\lambda \in \operatorname{int}(K^*)$ ($\lambda \succ 0$) y el problema escalarizado

$$\min \left\{ \lambda^t f_0(x) : \begin{array}{ll} f_i(x) \leq 0, & 1 \leq i \leq m \\ h_i(x) = 0, & 1 \leq i \leq p \end{array} \right\}$$

tiene una solución óptima x^* $\Rightarrow$ x^* es óptimo de Pareto del problema vectorial.

② Si (PV) es convexo (i.e. f_0 K-convexo y f_i convexas) $\Rightarrow$ todo óptimo de Pareto puede calcularse a partir de escalarización con algún $\lambda \succeq_{K^*} 0$.

Ejemplo:

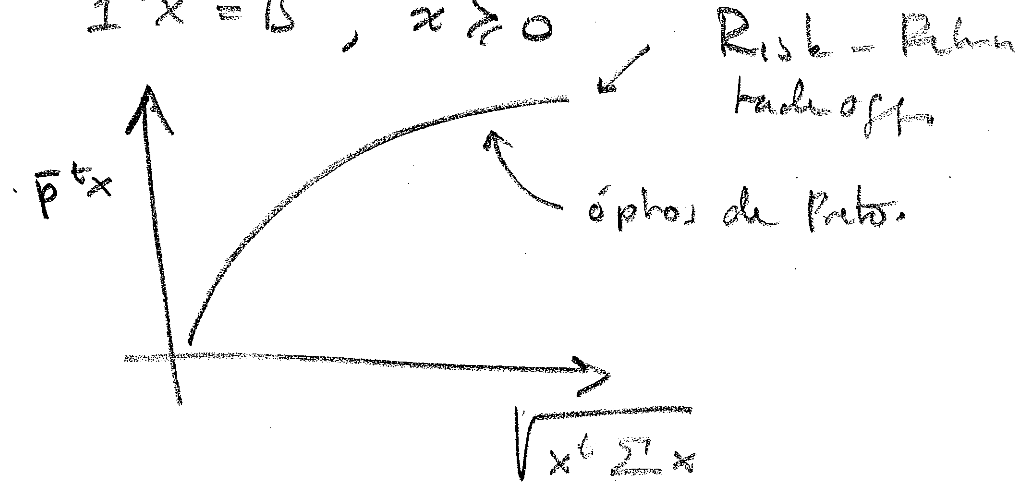
$$\min \ (\text{w.r.t } \mathbb{R}_+^2) \ \Big(\overbrace{-\bar{p}^t x}^{\text{pérdida}}, \ \overbrace{x^t \Sigma x}^{\text{riesgo}}\Big)$$

$$\text{s.a.} \quad \mathbb{1}^t x = B \ , \ x \geq 0$$

Escalarizamos:

$$\min \ \lambda_1 \left(-\bar{p}^t x\right) + \lambda_2 \left(x^t \Sigma x\right)$$

$$\text{s.a.} \quad \mathbb{1}^t x = B \ , \ x \geq 0$$



Dualidad: Considere el problema de optimización general

Def $$P_* = \inf \left\{ f_0(x) : \begin{array}{l} f_i(x) \leq 0 \quad 1 \leq i \leq m \\ h_i(x) = 0, \quad 1 \leq i \leq p \end{array} \right\} \quad (PG)$$

$$\mathcal{D} = \bigcap_{i=0}^{m} \operatorname{dom}(f_i) \cap \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{dom}(h_i).$$

Def: • El Lagrangiano de (PG) es

$$L(x, \lambda, \nu) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$= f_0(x) + \sum \lambda_i f_i(x) + \sum \nu_i h_i(x)$$

• El problema dual Lagrangiano

$$d^* = \sup \left\{ g(\lambda, \nu) : \begin{array}{l} \lambda \geq 0 \text{ en } \mathbb{R}^m \\ \nu \in \mathbb{R}^p \end{array} \right\}$$

$$g(\lambda, \nu) = \inf \{ L(x, \lambda, \nu) : x \in \boxed{\mathcal{D}} \}$$

Sobre TODO el dominio, no el conjunto factible.

Teorema (Dualidad)

① $d^* \leq P_*$ (dualidad débil)

[El valor de la función objetivo en cualquier punto factible del dual Lagrangiano es $\leq P_*$]

② Si (PG) es convexo y se cumple la hipótesis de Slater ($\exists \tilde{x} \in \operatorname{relint}(\mathcal{D})$: $f_i(\tilde{x}) < 0$, $1 \leq i \leq m$) $\Longrightarrow \boxed{d^* = P_*}$

Caso especial $\min f_0(x)$ s.a. $Ax \leq b$, con f_0 convexa.
Si el problema es factible $\Rightarrow$ cumple la hipótesis de Slater
$\Rightarrow$ hay dualidad fuerte.

Dem:

$$\mathcal{G} = \{(f_1(x), \dots, f_m(x), h_1(x), \dots, h_p(x), f_0(x)) : x \in \mathcal{D}\}.$$

$$\mathcal{A} = \left\{ (u, v, t) : \begin{array}{l} f_i(x) \le u_i \\ h_i(x) = v_i \\ f_0(x) \le t \end{array} \right\}$$ ← Convexo

Disyuntos.

$$\mathcal{B} = \{(0, 0, s) : s \le p_*\}$$ ← Convexo

Obs: $g(\lambda, \nu) = \inf \{ (\lambda, \nu, 1)^t (u, v, t) : (u, v, t) \in \mathcal{A} \}$
(Support pts of $\mathcal{B}$).

Is there a hyperplane which supports $(0, 0, p_*) \in \overline{\mathcal{A}}$

$$g(\lambda, \nu) \le (\lambda, \nu, 1)^t (0, 0, p_*) = p_* \checkmark$$

Separat Thm + Slater's qualification imply that the supporting hyperplane (λ', ν', μ') has $\mu' \neq 0$

$$\left(\frac{\lambda'}{\mu'}, \frac{\nu'}{\mu'}, 1\right) \checkmark$$

Teorema (Perturbación de problemas convexos) Suponga que hay dualidad fuerte y ambos son solubles.

$$p_*(u, v) := \inf \left\{ f_0(x) : \begin{array}{ll} f_i(x) \le u_i & 1 \le i \le m \\ h_i(x) = v_i & 1 \le i \le p \end{array} \right\}.$$

$p_*(u, v)$ es convexa y

$$p_*(u, v) \ge p_*(0, 0) - (\lambda^*)^t u - (\nu^*)^t v$$

p_* a primer orden. Cuales son los términos de orden superior??

$$\frac{\partial p_*}{\partial u_i} = -\lambda_i^*$$

$$\frac{\partial p_*}{\partial v_i} = -\nu_i^*$$

Condiciones KKT:

Si el primal y el dual son soluble y no hay duality gap entonces:

$$f_0(x^*) = g(\lambda^*, \nu^*) = \inf\{L(x, \lambda^*, \nu^*) : x \in D\}$$

$$\wedge\!\!|$$

$$L(x^*, \lambda^*, \nu^*) \leq f_0(x^*)$$

$\Rightarrow$ [x^* minimizes the Lagrangian
$\lambda_i^* f_i(x^*) = 0 \quad \forall i$]

Si f_i y h_i son diferenciables

KKT: ① Factibilidad primal y dual
② Complementary slackness
③ $\nabla_x [L(x, \lambda^*, \nu^*)]_{(x^*)} = 0$

← si el problema es convexo son necesarias y suficientes.

Dualidad en el caso generalizado.

$$\inf\{f_0(x) : f_i(x) \succeq_{K_i} 0,\ h_i(x) = 0\}$$

Def: $L(x, \lambda, \nu) = f_0(x) + \lambda_1^t f_1(x) + \dots + \lambda_m^t f_m(x) + \nu_1 h_1(x) + \dots + \nu_p h_p(x)$

vectores $\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_m$ — escalares $\nu_1 \dots \nu_p$

$$\inf\{L(x, \lambda, \nu) : x \in D\} = g(\lambda, \nu)$$

Problema dual: $d^* = \sup\{g(\lambda, \nu) : \lambda \succeq_{K_i^*} \vec{0}\}$.

Teorema de dualidad análogo.