Ejercicios de Álgebra Conmutativa:

Reglas:

- Puede discutir la tarea con sus compañeros asi como consultar cualquier libro o referencia en linea (asegúrese, eso si de citar sus fuentes de manera precisa).
- Debe entregar los ejercicios por escrito de manera individual (un solo documento por cada estudiante).
- Las tareas se entregan en clase y NO se recibiran despues de la fecha de entrega.
- El monitor calificará un subconjunto aleatorio pequeño de todos los problemas y puede (debe) poner cero en cualquier problema que no este bien presentado o escrito de manera dificil de leer.

Grupo I:

(1) Sea S la subálgebra de $k[s,t]$ generada por s^3, s^2t, st^2, t^3. Demuestre que S es isomorfa a $k[x_0, x_1, x_2, x_3]/J$ dónde J es el ideal generado por los tres subdeterminantes dos por dos de la matriz

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

(2) Demuestre que para el homomorfismo cociente $q : R \to R/I$, la funcion continua q^* es un homeomorfismo entre $\mathrm{Spec}(R/I)$ y $V(I)$.

(3) **Campos finitos:**

(a) Si p es un primo y $r(x) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x]$ es un poliniomio, dé un procedimiento para encontrar el mínimo entero n tal que toda raíz de $r(x)$ está en el campo de cardinal p^n.

(b) Demuestre que $\mathbb{F}_{p^n} \subseteq \mathbb{F}_{p^m}$ ssi $n|m$.

(c) Verifique que $K := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{F}_{p^{n!}}$ es la clausura algebraica de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

(d) Describa el grupo de Galois G de K sobre $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de la manera más concreta que pueda (nota: lo importante de una buena descripcion es que entienda como actuan los elementos de G en elementos de K.

(e) Describa la relación entre $\mathrm{Spec} K[x]$ y $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x]$.

(4) Clasifique módulo isomorfismo todas las parejas (V, T) dónde V es un grupo abeliano finitamente generado y $T : V \to V$ es un homomorfismo de grupos que satisface $T^2 = -Id$.

(5) Sea k un campo. Demuestre que $M := k[x,y]/(x,y)$ no es un $k[x,y]$ módulo libre y construya una presentación para M.