Examen final de Álgebra Conmutativa:

Reglas:

- Puede discutir la tarea con sus compañeros asi como consultar cualquier libro o referencia en linea (asegúrese, eso si de citar sus fuentes de manera precisa).
- Debe entregar los ejercicios por escrito de manera individual (un solo documento por cada estudiante).
- Las tareas se entregan en clase y NO se recibiran despues de la fecha de entrega.
- El monitor calificará un subconjunto aleatorio pequeño de todos los problemas y puede (debe) poner cero en cualquier problema que no este bien presentado o escrito de manera dificil de leer.

El objetivo de estos ejercicios es desarrollar las ideas del curso en el contexto de anillos graduados. Éstos son los anillos más importantes pues corresponden a las variedades algebraicas projectivas que son "compactificaciones" de las algebras afines que hemos estudiado.

Definition 1. *Un anillo $\mathbb{Z}$-graduado R es una suma directa de grupos abelianos $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n$ junto con una multiplicación conmutativa con unidad compatible con la suma que satisface $R_sR_t \subseteq R_{s+t}$ para todo s y t en $\mathbb{Z}$. Se sigue que todo elemento $r \in R$ se puede escribir de manera única como $r = r_{i_1} + \cdots + r_{i_k}$ con $r_{i_k} \in R_{i_k}$. El elemento r_{i_k} se llama componente homogénea de grado i_k de r. R se dice $\mathbb{N}$-graduado (o también positivamente graduado) si $R_d = 0$ para todo $d < 0$.*

(1) Demuestre que un anillo positivamente graduado R es noetheriano ssi R_0 es un anillo noetheriano y R es una R_0-álgebra generada por una colección finita de elementos homogéneos.

Definition 2. *Un R-módulo graduado M es una suma directa de grupos abelianos $\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} M_j$ con una estructura de R-módulo tal que $R_sM_j \subseteq M_{j+s}$ para todo $j, s \in \mathbb{Z}$. Un homomorfismo de R-módulos graduados $f : M \to N$ es de grado p si $f(M_j) \subseteq N_{j+p}$ para todo j.*

(2) (a) Demuestre que un ideal $I \subseteq R$ es un R-módulo graduado ssi $I = (0)$ o I puede ser generado por elementos homogéneos.
(b) Verifique que si I es homogéneo entonces R/I también es un anillo graduado.
(c) Si R_0 es un campo y R es positivamente graduado verifique que hay un único ideal homogéneo maximal $\mathfrak{m}$ en R.
(d) Clasifique los ideales homogéneos maximales de $k[x, y]$ con graduación dada por $\deg(x) = 0$ y $\deg(y) = 1$.

La parte (c) del ejercicio anterior hace que la teoria de anillos locales y de anillos positivamente graduados con R_0 un campo sea semejante. **De ahora**

en adelante asuma que R es positivamente graduado y R_0 es un campo.

(3) (Lema de Nakayama graduado). Si M es un R-módulo graduado noetheriano y $\mathfrak{m}$ es el ideal maximal homogéneo de R entonces $M = \mathfrak{m}M$ ssi $M = 0$. Más generalmente demuestre que todo conjunto homogeneo minimal de generadores de un módulo graduado tiene la misma cardinalidad.

Definition 3. *Si M es un R-módulo graduado defina la serie de Hilbert de M como*

$$H(M,t) := \sum_{d\in\mathbb{Z}} \dim(M_d)t^d$$

dónde $\dim(M_d)$ *quiere decir dimensión de M_d como R_0-módulo (i.e. como espacio vectorial).*

Definition 4. *Si M es un R-módulo graduado y $p \in \mathbb{Z}$, defina el módulo $M[-p]$ como M con la nueva graduación dada por $(M[-p])_s := M_{s-p}$ (como módulo es igual a M pero la graduación tiene indices diferentes).*

(4) (Normalización de Noether graduada) Suponga qur R_0 es un campo infinito y que R es un anillo noetheriano generado en grado 1. Demuestre que existen elementos $\beta_0, \ldots, \beta_d \in R_1$ tales que:
   (a) El subanillo graduado $T := k[\beta_0, \ldots, \beta_d]$ es isomorfo al anillo de polinomios en $d+1$-variables.
   (b) $T \subseteq R$ es una extensión entera.

(5) (Sucesiones exactas graduadas) Si $\beta \in R$ es homogéneo de grado p y M es un R-módulo noetheriano verifique que existen módulos graduados K y L y una sucesión exacta de módulos graduados

$$0 \to K \to M[-p] \to^{\mu_\beta} M \to L$$

con homomorfismos de grado 0 dónde μ_β es multiplicación por β. Verifique además que L y K son $R/(\beta)$-módulos graduados noetherianos.

(6) Cual es la reclación que hay entre la serie de Hilbert de $M[-p]$ y la serie de Hilbert de M?

(7) Use lo anterior para calcular la serie de Hilbert de $R = k[x_0, \ldots, x_n]$ con graduación $\deg(x_i) = 1$.

(8) (Hilbert-Serre graduado)
   (a) Demuestre que si M es un módulo noetheriano y R es generado sobre R_0 por elementos β_i de grado k_i, $1 \le i \le s$ entonces la serie de Hilbert está bien definida y tenemos

$$H(M,t) = \frac{f(t)}{\prod_{i=1}^{s}(1 - t_i^{k_i})}$$

   para algún polinomio $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$.

(b) Adicionalmente, demuestre que si R es generado por elementos de grado uno entonces la función $g(p) := \dim(M_p)$ coincide con un polinomio para $p >> 0$.

Definition 5. *El polinomio de Hilbert de M es el único polinomio cuyos valores coinciden con* $\dim(M_p)$ *para todo* $p >> 0$.

(9) (El grado del polinomio de Hilbert) Suponga que R_0 es un campo infinito y R es un anillo graduado noetheriano generado en grado uno. Use normalización de Noether graduada para demostrar que la dimensión de Krull del anillo R es igual a uno más el grado del polinomio de Hilbert de R. (Sugerencia: Si $T \subseteq R$ es una extension finita, la tasa de crecimiento de la función de Hilbert de T y de la de R no están lejos)