Geometria Algebraica I, Examen final.

Reglas:

- Puede discutir la tarea con sus compañeros asi como consultar cualquier libro o referencia en linea (asegúrese de citar sus fuentes de manera precisa).
- Debe entregar los ejercicios por escrito de manera individual (un solo documento por cada estudiante).
- Se asignará una nota de cero a cualquier problema que no esté bien presentado o que esté escrito de manera dificil de leer.

(1) **Series y polinomios de Hilbert:**

(a) Recuerde que si R es una k-álgebra graduada por los enteros no negativos noetheriana entonces la serie de Hilbert de R se define como

$$HS(R,t) := \sum_{j=0}^{\infty} \dim_k(R_j)t^j.$$

Calcule la serie de Hilbert del anillo de coordenadas homogéneo de:

(i) (Veronese) La imagen de $\mathbb{P}^n$ mediante el sistema lineal completo de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ para $d > 0$.

(ii) (Segre) La imagen de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ mediante el sistema lineal completo de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1)$.

(b) Recuerde que si adicionalmente R está generada en grado 1 entonces existe un polinomio, llamado polinomio de Hilbert $p(j)$ tal que $p(j) = dim(R_j)$ para $j >> 0$. Calcule el grado s y el coeficiente a_s que acompaña al término j^s del polinomio de Hilbert de los anillos de coordenadas homogéneas de las subvariedades de las partes (a) y (b). Cuales son los grados de éstas variedades?

(2) **Morfismos hacia el espacio proyectivo:**

Sea X una variedad algebraica,

(a) Suponga que $\mathcal{L} \to X$ es un line bundle sobre X. Si $V \subseteq H^0(X, \mathcal{L})$ es un sistema lineal de dimension $m+1$ y libre de puntos base, demuestre que $(V, \mathcal{L})$ determina un morfismo $\phi_V : X \to \mathbb{P}^m$.

(b) Recíprocamente, si $f : X \to \mathbb{P}^m$ es un morfismo, demuestre que existe una pareja $(V, \mathcal{L})$ cuyo morfismo asociado es f.

(3) **Propiedad universal de Grassmanianos de lineas:**

Demuestre que dar un morfismo de una variedad algebraica X al grassmaniano $Gr(2,4)$ de lineas en $\mathbb{P}^3$ es lo mismo que dar un haz vectorial $\mathcal{F}$ de rango 2 sobre X y un subespacio de dimensión 4 de secciones globales de $\mathcal{F}$ que son linealmente independientes en cada punto de x. (Nota: El resultado es cierto para $Gr(k,n)$ pero quiero ver cálculos muy explícitos asi que por simplicidad haremos este caso).

(4) **Grassmanianos de lineas en $\mathbb{P}^4$:**

(a) Escriba ecuaciones explícitas para el grassmanniano $Gr(2,5)$ de rectas en $\mathbb{P}^4$ en su embebimiento de Plücker.
(b) Demuestre que la colección de rectas que intersectan un 2-plano proyectivo dado en $\mathbb{P}^4$ son la intersección de $Gr(2,5)$ con un hiperplano.
(c) Cuántas rectas intersectan a seis 2-planos proyectivos generales fijos en $\mathbb{P}^4$? (puede, si quiere, usar un computador y las ecuaciones de la parte (a)).