Ejercicios Optimización Polinomial 201720

Octubre 9 - Octubre 20 2017

1. (Barvinok, Ej 1 Pág 14):

   Demuestre la identidad de Liouville:

$$(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2+\xi_4^2)^2=\frac{1}{6}\sum_{1\le i<j\le 4}(\xi_i+\xi_j)^4+\frac{1}{6}\sum_{1\le i<j\le 4}(\xi_i-\xi_j)^4.$$

2. (Barvinok, Ej 2 Pág 14):

   Demuestre la identidad de Fleck:

$$(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2+\xi_4^2)^3=\frac{1}{60}\sum_{1\le i<j<k\le 4}(\xi_i\pm\xi_j\pm\xi_k)^6+\frac{1}{30}\sum_{1\le i<j\le 4}(\xi_i\pm\xi_j)^6+\frac{3}{5}\sum_{1\le i\le 4}\xi_i^6,$$

   donde las sumas que contienen $\pm$ son tomadas sobre todas las escogencias independientes posibles de signos más y menos.

3. (Barvinok, Ej 2 Pág 16):

   Dado un polinomio $f\in H_{2k,n}$ de la forma

$$f(x)=\sum_{a=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}\lambda_a\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n}$$

   definimos formalmente el operador diferencial

$$f(\partial)=\sum_{a=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}\lambda_a\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial\xi_1^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial\xi_n^{\alpha_n}}$$

   y la transformación lineal

$$\Phi_s:\left\{\begin{array}{ccc}H_{2k,n}&\to&H_{2k,n}\\ f&\mapsto&g\end{array}\right.$$

   donde la correspondencia $f\mapsto g$ viene dada por la identidad

$$f(\partial)\left(||x||^{2s}\right)=\frac{2^{2k}s!}{(s-2k)!}g(x)\cdot||x||^{2s-2k}\text{ para algún }g\in H_{2k,n}$$

   Verifique que Φ_s converge al operador identidad en $H_{2k,n}$ a medida que s crece.

Proposición 1 Sea $p\in H_{2k,n}$ un polinomio positivo. Entonces existe un entero positivo s y vectores $c_1,\ldots,c_m\in\mathbb{R}^n$ tales que

$$||x||^{2s-2k}p(x)=\sum_{i=1}^{m}\langle c_i,x\rangle^{2s}\text{ para todo }x\in\mathbb{R}^n.$$

4. (Barvinok, Ej 4 Pág 16):

   Construya un polinomio no-negativo $p \in H_{2k,n}$ para el cual la conclusión de la Proposición 1 no sea cierta.

5. (Barvinok, Ej 5 Pág 16):

   Usando la Proposición 1 deduzca el **Teorema de Polya**:

   Sea p un polinomio homogeneo real de grado k en n variables reales $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ y sea

   $$\mathbb{R}^n_+ = \{(\xi_1, \ldots, \xi_n) \mid \xi_i \geq 0 \text{ para } i = 1, \ldots, n\}$$

   el ortante no-negativo en $\mathbb{R}^n$. Suponga que

   $$p(x) > 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n_+ \backslash \{0\}.$$

   Entonces existe un entero positivo s tal que los coeficientes λ_a del polinomio

   $$(\xi_1 + \ldots + \xi_n)^s p(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum_{\substack{a=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \\ \alpha_1+\ldots+\alpha_n=s+k}} \lambda_a \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}$$

   son no-negativos.

6. Demuestre que los siguientes polinomios son no-negativos pero no son SOS:

   1. $x^4y^2 + y^4z^2 + z^4y^2 - 3x^2y^2z^2$.
   2. $x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 + w^4 - 4xyzw$.

7. Demuestre que el cono generado por las expresiones $\langle c, \vec{x} \rangle^{2s}$ es un cono cerrado.

8. Sea $S = \{g_1, \ldots, g_m\} \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] =: R$. Definimos los conjuntos

   $$K_S = \{\alpha \in \mathbb{R}^n \mid g_i(\alpha) \geq 0 \text{ para todo } i = 1, \ldots, m\}$$
   $$M_S = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \sigma_i g_i \text{ donde } g_0 = 1 \text{ y } \sigma_i \in SOS(R) \right\}.$$

   Sea $h(x) \in R$ y $\alpha = min_{x \in K_S} h(x)$. Para aproximar α definimos para cada $k \in \mathbb{N}$:

   $$M_S(k) = \left\{ \sum_{i=0}^{m} \sigma_i g_i \mid \sigma_i \text{ es SOS de polinomios de grado} \leq k \right\}$$
   $$\alpha_k = max\{\gamma \mid h(x) - \gamma \in M_S(k)\}.$$

   1. Verifique que $M_S(k)$ es SDR y que α_k se calcula resolviendo un SDP.
   2. ¿Qué dimensión tiene el problema de 8.1?
   3. Demuestre que $\alpha_k \to \alpha$ a medida que $k \to \infty$.

9. Sea $S = \{x_1, x_2, 1 - x_1 - x_2\}$. ¿Sucede que $x_1 x_2 \in M_S$?