Optimización Convexa:

Evaluación:

- Proyecto (Software) (MOSEK, GUROBI) 50%
  - Entrega 1 5%
  - Entrega 2 20%
  - Entrega final (ex. final) 25%
- 2 Parciales 50%
  - 25%
  - 25%

Fechas en la web

Ejercicios clase a clase (Semana 1 y 2 Emilio)

¿Qué es la optimización convexa?

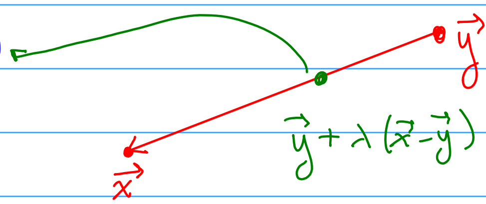
R: Es el arte de minimizar funciones convexas sobre conjuntos convexos.

Sea V un espacio vectorial real (si $\dim(V) = n < \infty$, $V \cong \mathbb{R}^n$)

Def: Un subconjunto $C \subseteq V$ es convexo si

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in C \quad \forall \lambda \in \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{(0,1)}} \left[\lambda \vec{x} + (1-\lambda)\vec{y} \in C \right]$$

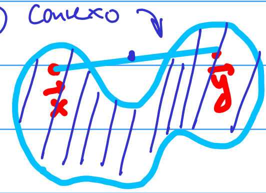
$$\lambda \vec{x} + (1-\lambda)\vec{y} = \vec{y} + \lambda(\vec{x} - \vec{y})$$



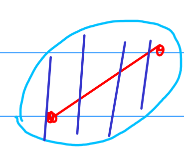
mientras $\lambda \in (0,1)$ parametrizamos el interior del segmento de recta que une a $\vec{x}$ y $\vec{y}$

$C \subseteq V$ es convexo ssi $\forall \vec{x}, \vec{y} \in C$ el segmento de recta que une a $\vec{x}$ y $\vec{y}$ está contenido en C

NO convexo



Sí es convexo

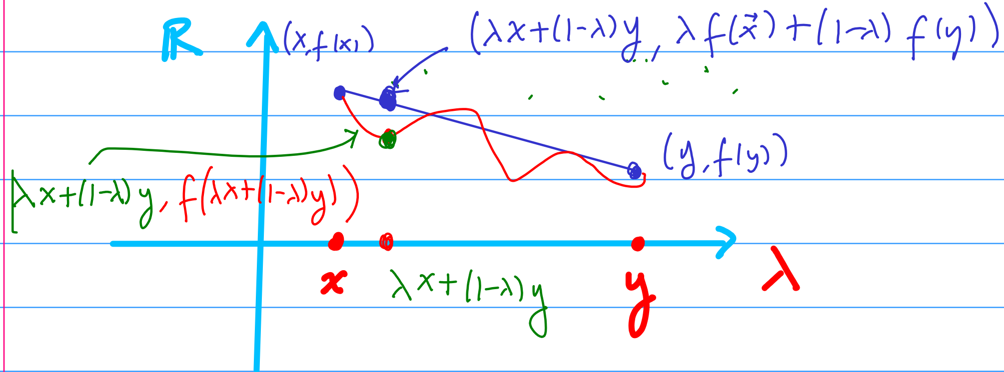


Def: Una función $f : V \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ se dice convexa si:

(1) $\operatorname{dom}(f) := \{v\in V : f(v)<\infty\} \subseteq V$ es un conjunto convexo y

(2) $\forall\, \vec{x},\vec{y} \in \operatorname{dom}(f)\ \ \forall\, \lambda\in(0,1)$

$$f\left(\lambda\vec{x}+(1-\lambda)\vec{y}\right) \leq \lambda f(\vec{x})+(1-\lambda)f(\vec{y})$$



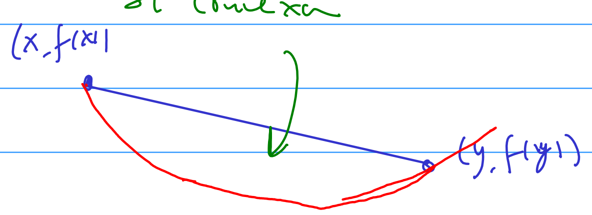
$$t\left(x,f(x)\right)+(1-t)\left(y,f(y)\right)=\left(\lambda x+(1-\lambda)y\,,\ ?\right)$$

tomando $t=\lambda$

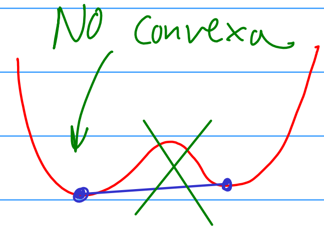
$$\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

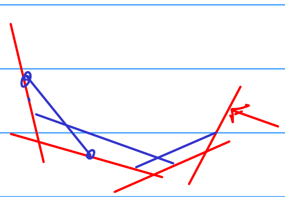
Una función es convexa si la recta que une a $(x,f(x))$ y a $(y,f(y))$ esta encima de la gráfica de f.

Sí convexa

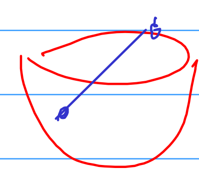


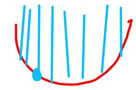
NO convexa





gráfica de f convexa y no diferenciable.





Ejercicio: Si $f: V \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{\infty\}$

Def: $\mathrm{epi}(f) = \left\{(v,\alpha) : \begin{array}{l} v\in \mathrm{dom}(f) \\ \alpha \geq f(v)\end{array}\right\} \subseteq V\times\mathbb{R}$

"Epígrafo de f"

Demuestre que f es convexa ssi $\mathrm{epi}(f) \subseteq V\times\mathbb{R}$ es un conjunto convexo.

Buscamos

$\alpha = \inf\{f(x) : x\in C\}$ Valor óptimo

$\left\{\begin{array}{l} C \subseteq V \text{ convexo dado} \\ f: V\to\mathbb{R}\cup\{\infty\} \text{ función convexa}\end{array}\right.$ ¿Por qué?

Buscamos $\mathrm{argmin}\{f(x) : x\in C\} = \{x^*\in C : f(x^*) = \alpha\}$

óptimos ó minimizadores

Hay 3 razones por las que es natural enfatizar a los problemas de optimización convexa

(1) Ubicuidad: Los problemas de optim. convexa están en TODAS partes.

→ Obj: Aprender a formular problemas convexos.
Cultura sobre sus aplicaciones.

(Opt. lineal ⊆ Opt. semidefinida ⊆ Opt. Convexa)

(2) Solubilidad: Muchos problemas de opt. convexa pueden resolverse eficientemente

- En teoría ($\exists$ algos. polinomiales para resolver muchos problemas convexos [GLS])
- En la práctica (GUROBI, MOSEK)

(3) Admiten una teoría unificada, principalmente la Teoría de dualidad que nos permite:

(1) Pensar en problemas de O.C. de maneras inesperadas.
(2) Permite convexificar. (aproximar problemas NO convexos mediante problemas convexos)