Si V es un e.v.

$$\mathcal{C}(V) = \{A \subseteq V : A \text{ es convexo}\}$$

Teorema (Operaciones que preservan convexidad)

(1) Intersección ($\{A_\alpha : \alpha\in I\} \subseteq \mathcal{C}(V) \Rightarrow \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \in \mathcal{C}(V)$)

(2) Sumas de Minkowski ($A,B\in\mathcal{C}(V) \Rightarrow \underbrace{A+B}_{=\{\vec a+\vec b\,:\,\vec a\in A,\ \vec b\in B\}} \in \mathcal{C}(V)$)

(3) Productos cartesianos ($A\in\mathcal{C}(U),\ B\in\mathcal{C}(V) \Rightarrow A\times B \in \mathcal{C}(U\times V)$)

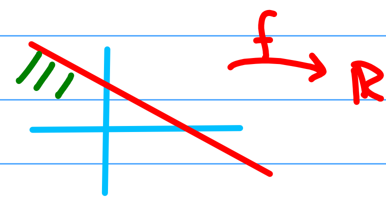
(4) Imagen directa e inversa bajo mapas afines

(Si $f: U\longrightarrow V$ es afín entonces

$A\in\mathcal{C}(U) \Rightarrow f(A)\in\mathcal{C}(V)$

$B\in\mathcal{C}(V) \Rightarrow f^{-1}(B)\in\mathcal{C}(U)$)

Ejercicio: Demuestre el Teo.



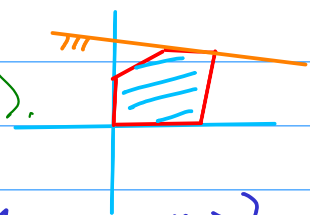
Ejemplos de conjuntos convexos:

(1) $f: V\longrightarrow\mathbb{R}$ afín $\quad H_- := \overset{\{v\in V\,:\,f(v)<0\}}{\overset{\|}{f^{-1}((-\infty,0))}}$

$\overline{H_-} := f^{-1}((-\infty,0]) = H_- \cup H.$

semiespacio es convexo cerrado.

Def: Un poliedro en V es una intersección finita de semiespacios (ó la colección de soluciones de un conjunto finito de desigualdades afines).



Ejercicio: Def. $m\in\mathbb{N}$, $\overset{\text{ortante positivo}}{\mathbb{O}_m} = \{x\in\mathbb{R}^m : x_1\ge 0,\dots, x_m\ge 0\}$

$\mathbb{O}_m = \underbrace{\mathbb{O}_1\times\dots\times\mathbb{O}_1}_{m\text{ veces}}$

Demuestre que $P\subseteq\mathbb{R}^n$ es un poliedro si y sólo si $\exists\, m=m(P)\in\mathbb{N}$ y $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ afín que satisface $P = f^{-1}(\mathbb{O}_m)$.

(2) Bolas unitarias de normas. $\dim(V) < \infty$.

$\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ es una norma si satisface:

(1) $\|v\| \geq 0$ y $\|v\| = 0 \iff v = 0$ (Positiva definida)

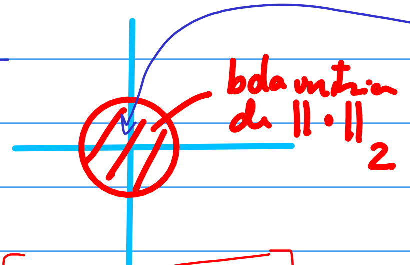
(2) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (desig. triángulo)

(3) $\|\lambda u\| = |\lambda| \, \|u\|$ (posit homogénea)

$\Big\} \rightarrow$ $\|\cdot\|$ es una función convexa

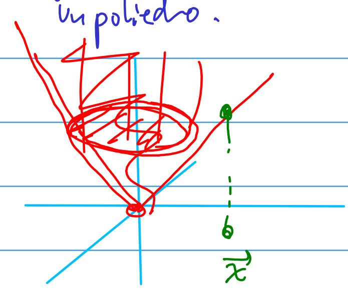
$B_{\|\cdot\|} = \{ v \in V : \|v\| \leq 1 \}$ ~ convexo

Ejemplos:



$\left[\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} \right]$

Ejercicio: Pruebe que no es un poliedro.



Teorema: Hay una correspondencia entre:

$$\left\{ \begin{matrix} \|\cdot\| : V \to \mathbb{R} \\ \text{en } V \end{matrix} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{matrix} K \subseteq V \quad K \text{ compacto}, \\ \text{convexo}, \quad K = -K, \\ 0 \in \operatorname{int}(K) \end{matrix} \right\}$$

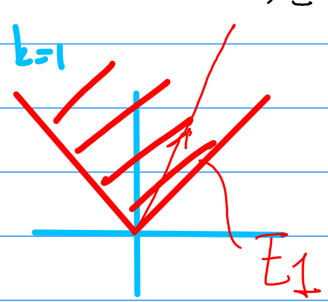
$$\|\cdot\| \longmapsto \{ v : \|v\| \leq 1 \}$$

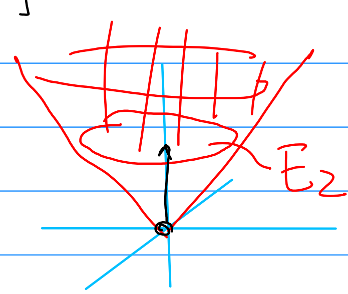
Ejercicio: Demuestre el Teorema

Def: Si $k \in \mathbb{N}$ $\quad V_k \cong \mathbb{R}^k$

$$E_k \subseteq V_k \times \mathbb{R}$$
$$= \{ (v, \alpha) : \|v\|_2 \leq \alpha \}$$

Como $\|\cdot\|$ es convexa E_k es convexo pues es el epigrafo.





E_k — "Conos de segundo orden, ice-cream cones ó conos de Lorentz"

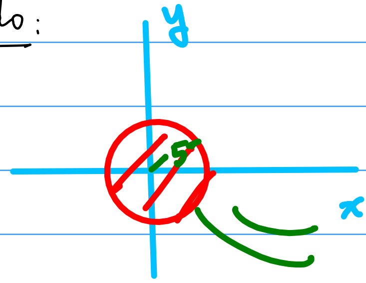
[Def:] $P \subseteq \mathbb{R}^n$ es un "convexo de segundo orden" si $\exists\ \underset{m(P)}{\overset{\shortparallel}{m}} \in \mathbb{N}$, $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$ y

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow (V_{k_1} \times \mathbb{R}) \times (V_{k_2} \times \mathbb{R}) \times \dots \times (V_{k_m} \times \mathbb{R})$$

$$P = f^{-1}(E_{k_1} \times \dots \times E_{k_m})$$

Ejercicio: Demostrar que todo poliedro es un convexo de segundo orden.

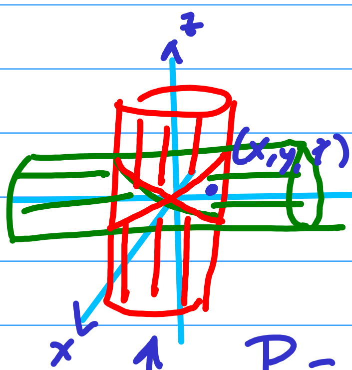
Ejemplo:



$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \supseteq E_2$$

$$(x,y) \xmapsto{f} ((x,y), 5)$$

$$f^{-1}(E_2) = \{(x,y) : \|(x,y)\| \leq 5\}$$



$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f_0} (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$$

$$(x,y,z) \longmapsto (((x,y),1), ((x,z),1))$$

$$P = f_0^{-1}(E_2 \times E_2)$$

$$\left\{(x,y,z) : \begin{array}{l} \|(x,y)\| \leq 1 \\ \|(x,z)\| \leq 1 \end{array}\right\}$$

(3) Polinomios no-negativos:

Fijamos enteros n y d y definimos

$\mathbb{R}[\vec{x}]_d$

$$\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]_d = \left\{ \begin{array}{l} \text{Polinomios homogéneos de grado } d \\ \text{en variables } x_1,\dots,x_n \end{array} \right\}$$

$$P_d^n = \{ f \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]_d : f(\alpha) \geq 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}^n \}$$

$$\mathrm{Sym}^d(V^*)$$

Ejercicio: (a) Demuestre que $\mathbb{R}[\vec{x}]_d$ es un e.v. de dimensión $\binom{n-1+d}{d}$.

(b) Demuestre que $P_d^n \subseteq \mathbb{R}[\vec{x}]_d$ es convexo y cerrado.

Este conjunto convexo es MUY importante porque nos permite modelar muchísimos problemas pero tiene una estructura muy compleja en el sentido en el que dado un polinomio $f \in \mathbb{R}[x_1..x_n]_d$ no es fácil saber si es $\in P_d^n$.

Caso especial ejemplo 4: Matrices PSD:

P_d^n con $d=2$

$$P_2^n = \left\{ \text{Formas cuadráticas no negativas en } \mathbb{R}^n \right\}$$

Ejemplo: $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

$$= (x\ y)\begin{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Toda forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$ se puede escribir de manera única como

$\vec{x}^t A \vec{x}$ donde A es una matriz simétrica

Def: Una matriz simétrica A de $n \times n$ se dice <u>Positiva semidefinida PSD</u> ssi
$$\vec{x}^t A \vec{x} \in P_2^n$$
Notación: $A \succcurlyeq 0$

(i.e. $\vec{x}^t A \vec{x} \geq 0 \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$)

Teorema: (caracterización de matrices PSD)

Las siguientes son equivalentes para A simétrica de $n \times n$:

(1) $A \succcurlyeq 0$ (A es PSD)

(2) Los valores propios de A son reales no-negativos.

(3) $\exists \; B \in \mathbb{R}^{k \times n} : \quad A = B^t B$.

Ejercicio:

(a) Demuestre el Teorema anterior.
(Hint: Repare que toda matriz simétrica$/\mathbb{R}$ es ortogonalmente diagonalizable)

(b) Demuestre que una forma cuadrática es PSD ssi es una suma de cuadrados de formas lineales.

Def: Para $m \in \mathbb{N}$ define

$$S^2(V_m) = \text{"Espacio vectorial de Matrices simétricas de } m\times m\text{"}$$

$$\left(\dim(S^2(V_m)) = \binom{m+1}{2}\right) = m + \frac{m^2-m}{2}$$

$$S^+(V_m) = \{A \in S^2(V_m) : A \succeq 0\}$$

Def: $P \subseteq \mathbb{R}^n$ es un espectraedro

Si $\exists$ $m = m(P) \in \mathbb{N}$, $k_1, \dots, k_m$ y

$$f : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{afín}} S^2(V_{k_1}) \times \dots \times S^2(V_{k_m})$$

$$P = f^{-1}\left(S^+(V_{k_1}) \times \dots \times S^+(V_{k_m})\right)$$

Ejercicio:

* (a) Demuestre que $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$, $R \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{c} \\ (n+1) \end{array}\left.\begin{pmatrix} R\, I_{n\times n} & \vec{w} \\ \vec{w}^t & R \end{pmatrix}\right\}_{(n+1)} \succeq 0$$

$$\iff \|\vec{w}\|_2 \leq R$$

(b) Todo convexo de 2^{do} orden es un espectraedro

Ejercicio: Pruebe que $P \subseteq \mathbb{R}^n$ es un espectraedro $\iff$
$\exists$ $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n \in S^2(V_M)$

$$P = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : A_0 + x_1 A_1 + \dots + x_n A_n \succeq 0\}$$

LMI
Linear Matrix inequality.

Opt de segundo orden

Opt Convexa

$$\text{Poliedros} \subseteq \text{Convexos de } 2^{do} \text{ orden} \subseteq \text{Espectaedros} \subsetneq \text{Convexos}$$

Opt lineal

Opt. semidefinida