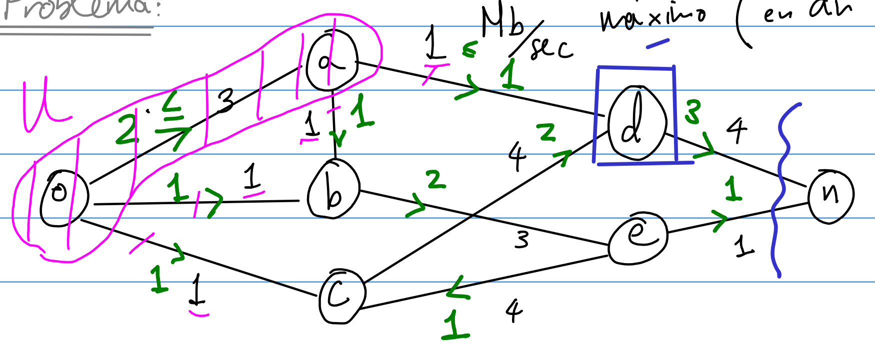
Hoy: Ejemplos problemas de optimización lineal y sus implementaciones en Julia

Problema: Mb/sec máximo (en dir ad o→n)



Problema:
- V – vértices
- E – aristas
- C – capacidades $\{c_e : e \in E\}$

¿Cómo maximizar la tasa de transferencia?

SOL* en verde ↑ flujo 4 Mb/s de (o) a (n).

Porque Sol* ↑ es un flujo máximo?

La suma de los flujos que salen de $\{o,a\}$ a $\{o,a\}^c$

$\leq$ Capacidad de las aristas que conectan a $\{o,a\}$ con $\{o,a\}^c$

Hecho: Esta desigualdad se alcanza, es decir

max flow = min cut (dualidad)

Def: Un corte en un grafo es una partición de los vértices $V = U \sqcup U^c$ con $o \in U$, $n \in U^c$

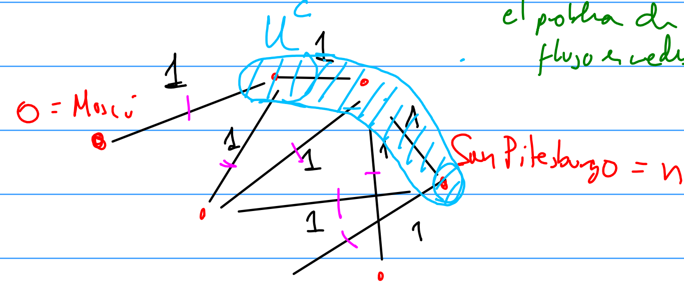
capacidad del corte $\{U, U^c\}$

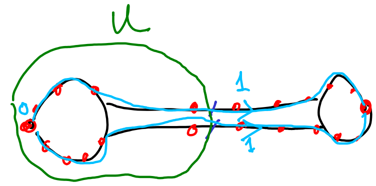
$$c(\{U,U^c\}) = \sum_{\substack{\{a,b\}\in E:\, a\in U \\ b \in U^c}} \text{capacidad}(\{a,b\})$$

$$\left[\min_{\{U,U^c\}:\, U\sqcup U^c = V} c(\{U,U^c\})\right] = \text{MinCut}.$$

$\underbrace{\{U,U^c\}: U\sqcup U^c=V}$ → 2^{n-1} candidatos

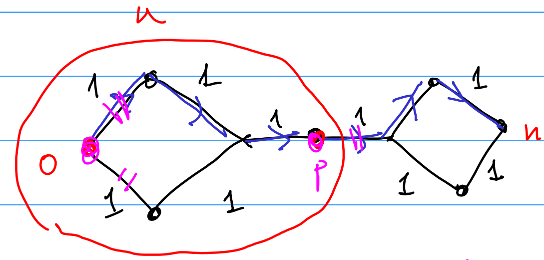
Motivación para el problema de flujo en redes





*: Es posible que el U óptimo sea "disconexo"?

Ejercicio: 5



1

$c(U,U^c)=1$

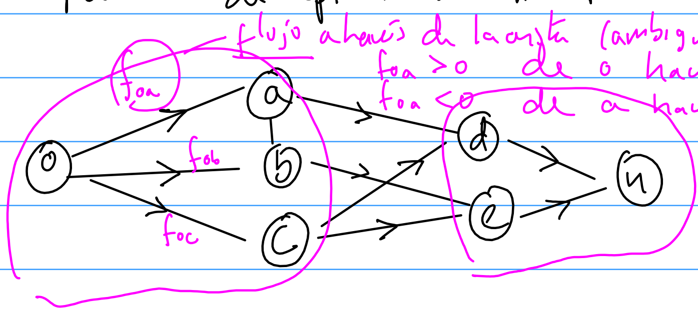
$U = \{0, p\}$ $\quad c(U, U^c) = 4$

Es un problema de optimización lineal

flujo a través de la arista (ambiguo)

$f_{oa} > 0$ de o hacia a

$f_{oa} < 0$ de a hacia o

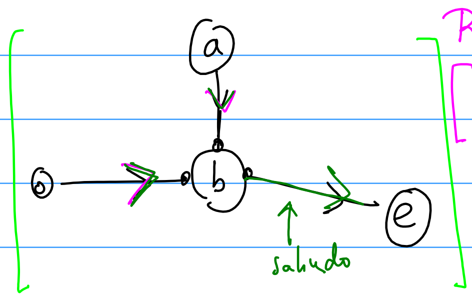


$f_e : e \in E$

$f_e > 0$ si en dirección de e

$f_e < 0$ si en dirección contraria

$V = \text{"o"}, a, b, c, d, e, n$



Restricciones $f_{ab}, f_{ob}, f_{be} \in \mathbb{R}$

$[f_{ob} + f_{ab} = f_{be} \quad = 0]$

A

$[A \vec{f}] = 0$

$v \in V \setminus \{o, n\}$

Definimos matriz de frontera:

$$\begin{array}{c|c} & (i,j)\; e \in E \\ \hline i & -1 \\ \text{Vertices} & 0 \\ & 0 \\ j & +1 \end{array}$$

Ejemplo:

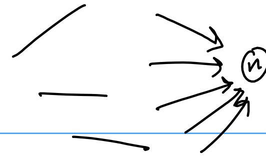
$$\begin{array}{c|ccc} & ob & ab & be \\ \hline o & -1 & 0 & 0 \\ a & 0 & -1 & 0 \\ b & 1 & 1 & -1 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{array} \begin{bmatrix} f_{ob} \\ f_{ab} \\ f_{be} \end{bmatrix}$$

Restricciones Conservación de flujo en vértice v.

Restricciones de capacidad ✓

$-c_e \le f_e \le c_e \qquad e \in E$

$$[Af]_n = \sum_{\substack{a\in V \\ (a,n)\in E}} f_{an}$$



$$f \in \mathbb{R}^E \leftarrow \{f_e : e\in E\}$$

Opt. Lineal.

Maxflow:

$$\max \ [Af]_n$$

$$\text{s.a.} \quad [Af]_v = 0, \quad v \in V\setminus\{o,n\}$$

$$-c_e \le f_e \le c_e \quad \forall e \in E$$

capacidad de e