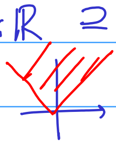
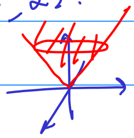
Hoy: Optimización cónica sobre convexos de segundo orden

$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \supseteq E_n = \{ (\vec{x}, \alpha) : \ \|\vec{x}\|_2 \leq \alpha \}$

E_1 

E_2 

Def:

$P \subseteq \mathbb{R}^k$ es de segundo orden si $\exists \ f : \mathbb{R}^k \xrightarrow{\text{afín}} \prod_{i=1}^{M} (\mathbb{R}^{k_i} \times \mathbb{R})$

$P = f^{-1}\left(\prod_{i=1}^{m} E_i\right)$

Vimos que equivalentemente $P \subseteq \mathbb{R}^k$ es de segundo orden si existen

$A_i : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^{k_i}$

$\vec{b}_i \in \mathbb{R}^{k_i}$ $\qquad i = 1 \ldots m$

$a_i \in \mathbb{R}^k$

$c_i \in \mathbb{R}$

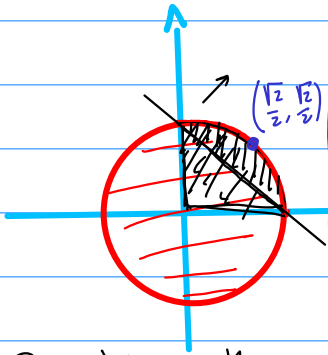
$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^k ; \ \left[\| \underline{A_i} \vec{x} + \underline{\vec{b}_i} \|_2 \leq a_i^t \vec{x} + c_i \right], \ i = 1, \ldots, m \right\}$$

PREGUNTAS: (1) Qué tipo de problema se puede expresar así?

(2) Cómo se resuelven en la práctica? JuMP + ECOS, COSMO, ...

$$\left\| \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_2} \right\|_1 \leq C \iff \|\vec{x}\|_1 \leq \boxed{C} \|x\|_2$$

Ejemplo:



$$\left[C = \left[\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.a.} & \|(x_1, x_2, x_3)\| \leq 1 \end{array} \right] \right]$$

Ejercicio: Si $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ afín

$$\max_{x \in X} f(x) = \max_{x \in \mathrm{Conv}(X)} f(x)$$

Para el solver

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

$$(\underbrace{\alpha}_{\substack{\text{en la} \\ \text{primera componente}}}, \underline{\vec{x}}) \in \text{SecondOrderCone}$$

$$\Updownarrow$$

$$\|\vec{x}\|_2 \leq \alpha$$

$\|(x_1, x_2, x_3)\| \leq 1 \iff (1, x_1, x_2, x_3) \in$ Second Order Cone.

$(1, 1, 1, .., 1)$ es la dir de máximo crecimiento

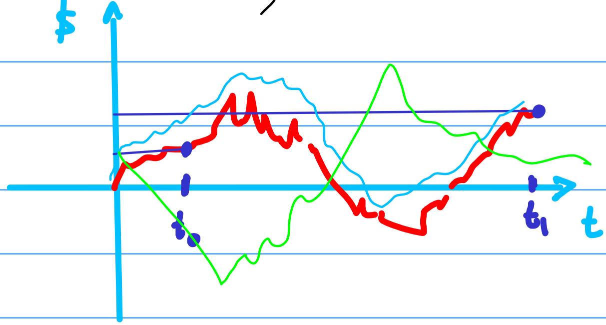
$$\|\lambda(1,..,1)\|_2 = 1 \Rightarrow \sqrt{n\lambda^2} = 1$$

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{\sqrt{n}}}$$

el óptimo se alcanza en $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, .., \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ y la función objetivo vale $n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \boxed{\sqrt{n}}$

Ejemplos de problemas de SOCP ← "Second order cone programming"

Portafolio Markowitz, "Teoría de portafolios".



Def: El retorno del activo entre los instantes t_0 y t_1 es:

$$\left(\overset{\$}{100}\right)\underset{\overset{\shortparallel}{r}}{\left[\frac{p(t_1) - p(t_0)}{p(t_0)}\right]} \sim \text{ganancia "porcentual"}$$

0,02

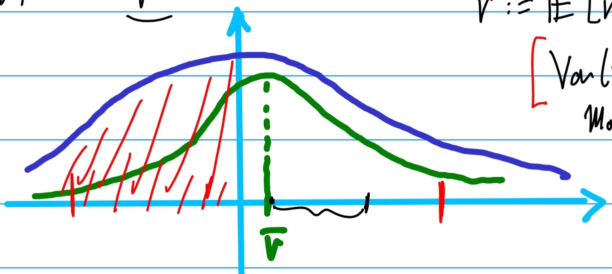
Fijamos una ventana de tiempo — 1 semana

El retorno de un activo es una variable aleatoria $\underline{r}$

$\bar{r} := \mathbb{E}[r]$ $\mathbb{E}\left((r-\bar{r})^2\right)$

[$Var(r)$ ~ Riesgo.]

Momentos, Curtosis, ...

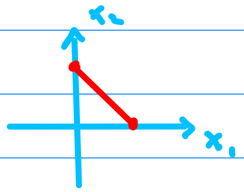


$$\mathbb{P}\{|X-\mu| \geq \alpha\} \leq \frac{Var(X)}{\alpha^2}$$

Un portafolio es una asignación de recursos a un conjunto de activos.

$x_1, x_2 \geq 0$

$x_1 + x_2 = 1$



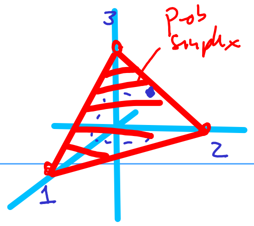
$x_1, .., x_n \geq 0$

x_i — cantidad de dinero invertido en el activo i

El retorno del portafolio es la variable aleatoria

$$\underset{\text{escogemos nosotros}}{\boxed{x_1}}\,\underset{\text{aleatorio}}{\boxed{r_1}} + \cdots + x_n r_n$$

$$\left[\begin{array}{l} x_i \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = \underset{\text{fija}}{\underline{K}} \end{array}\right]$$



Markowitz: ¿Cómo escoger el "mejor" portafolio?

$$\left[\begin{array}{l} \text{tiene un retorno medio} \geq \boxed{y} \leftarrow \text{fijamos} \\ \text{tiene riesgo mínimo para ese retorno medio} \end{array}\right]$$

Retorno medio:

$$\mathbb{E}\left[x_1 r_1 + \cdots + x_n r_n\right] = x_1 \bar{r}_1 + \cdots + x_n \bar{r}_n$$

El riesgo del portafolio

$$\mathbb{E}\left[\left(x_1 r_1 + \cdots + x_n r_n - x_1 \bar{r}_1 - \cdots - x_n \bar{r}_n\right)^2\right] =$$

$$\mathbb{E}\left[\left(x_1(r_1 - \bar{r}_1) + \cdots + x_n(r_n - \bar{r}_n)\right)^2\right] = \sum_{i,j} x_i x_j \mathbb{E}\left[(r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j)\right]$$

$$\| \qquad \vec{x}^{\,t} C \vec{x}$$

Sea C la matriz dada por

$$C_{ij} = \mathbb{E}\left[(r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j)\right]$$

Lema: esto es un SOCP.

Problema de portafolio de Markowitz

$$\min_{\vec{x}} \quad \vec{x}^{\,t} C \vec{x} \quad \text{s.a.} \quad \begin{array}{l} x_i \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = K \\ x_1 \bar{r}_1 + \cdots + x_n \bar{r}_n \geq y \end{array}$$

$$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$$