Algunas aplicaciones de dualidad:

$$\alpha^* = \inf \{ c^t x \ : \ Ax - b \in C \}$$

$$\left[\beta^* = \sup \left\{ b^t y \ : \ \begin{array}{l} y \in C^* \\ A^t y = c \end{array} \right\} \right] \leftarrow \text{Más común}$$

Ejemplo 0: Aprox de funciones.

"Queremos aproximar $\beta(t)$, $0 \le t \le 1$ mediante combinaciones lineales de funciones dadas $\alpha_j(t)$, $0 \le t \le 1$"

$$\min_{\vec{x} \in \mathbb{R}^N} \left\| \beta(t) - \sum_{j=1}^{N} x_j \alpha_j(t) \right\|$$

norma en el esp de funciones

Muy común: $\| \beta - \beta' \|_\infty = \left[\sup_{t \in [0,1]} | \beta(t) - \beta'(t) | \right]$

aproximamos el problema escogiendo un grid en $[0,1]$ $\quad T \in \mathbb{N}$

$t_i = \frac{i}{T}$, $\quad i = 1, \dots, T$

$$\vec{b} = \underbrace{\begin{bmatrix} | \\ \beta(t_i) \\ | \end{bmatrix}}_{\in \mathbb{R}^T}, \qquad A = T \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ \alpha_1(t_i) & \cdots & \alpha_N(t_i) \\ | & & | \end{bmatrix}}_{N} \right.$$

$$\min_{\vec{x} \in \mathbb{R}^n} \left[\| \vec{b} - A\vec{x} \|_\infty \right] = \min_{\vec{x} \in \mathbb{R}^n} \left[\max_j | b_j - (Ax)_j | \right]$$

Obs: Si tomamos $\| \cdot \|_\infty$ se puede resolver con opt lineal $(*)$

Más generalmente queremos norma en $\mathbb{R}^T$

$$\left[\min_{x \in \mathbb{R}^n} \| A\vec{x} - \vec{b} \| \right] \leftarrow \text{problema convexo.}$$

Plan: (1) Reescribimos esto como un problema cónico

(2) Calculamos el problema dual.

$$(*) \quad \min_{\vec{x} \in \mathbb{R}^n} \left[\max_j | b_j - (Ax)_j | \right] = \min w \quad \forall_j \left\{ \begin{array}{l} b_j - (Ax)_j \le w \\ (Ax)_j - b_j \le w \end{array} \right.$$

opt lineal.

$$\left[\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax-b\|\right]$$

$\|Ax-b\| \leq w$

$$\min_{(x,w)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} \left\{ w \ : \ (Ax-b, w) \in C_{\|\cdot\|} \right\}$$

donde $C_{\|\cdot\|} = \{ (y,s) : \|y\| \leq s \}$ ← epígrafo de la norma.

$$\alpha^* = \min_{(x,w)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} \left\{ (x,w)\cdot \overbrace{(\vec{0},1)}^{c} : \begin{pmatrix}Ax\\w\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix} \in C_{\|\cdot\|} \right\}$$

$$\begin{array}{c} \lambda \\ u \end{array} \begin{pmatrix}A & 0\\ 0^t & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\w\end{pmatrix} - \boxed{\begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix}} \in C_{\|\cdot\|}$$

$$\beta^* = \max_{(\vec{\lambda},u)} \left\{ b^t\lambda : \begin{array}{l} (\vec{\lambda},u) \in \left[C^*_{\|\cdot\|}\right] = C_{\|\cdot\|^*} \\ \begin{pmatrix}A^t & 0\\ 0^t & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\u\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{0}\\1\end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

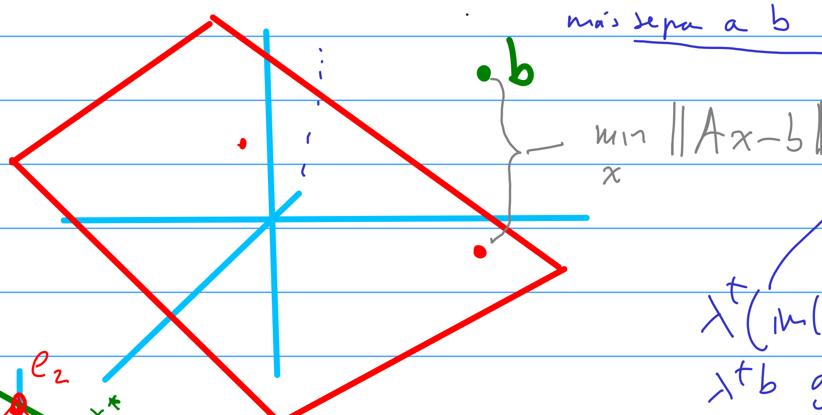
$$\beta^* = \max_{(\vec{\lambda},u)} \left\{ b^t\lambda : \begin{array}{l} A^t\lambda = \vec{0} \\ u = 1 \\ \|\lambda\|_* \leq u \end{array} \right\}$$

$$\boxed{\beta^* = \max_{\vec{\lambda}} \left\{ \lambda^t b : \begin{array}{l} \lambda^t A = 0 \\ \|\lambda\|_* \leq 1 \end{array} \right\}}$$

$\lambda : \lambda^t A y = 0$

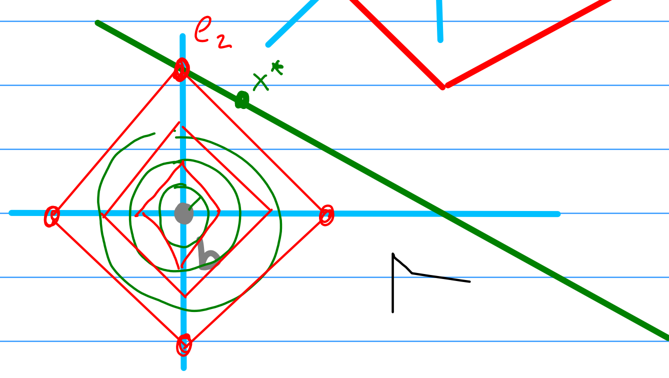
Entre las muchas λ con $\|\lambda\|_* \leq 1$ busque la que más separa a b de $im(A)$

(P)



$\lambda^t(im(A)) = 0$

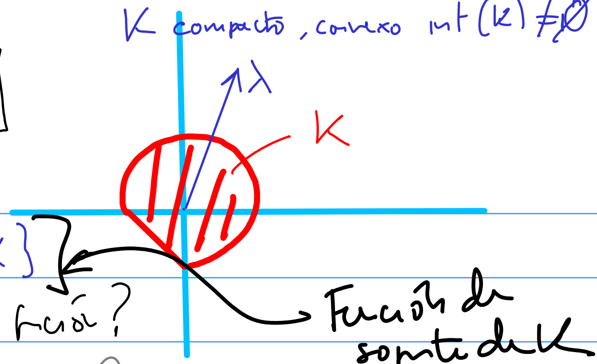
$\lambda^t b$ grande!



$\min \|Ax\|_2$

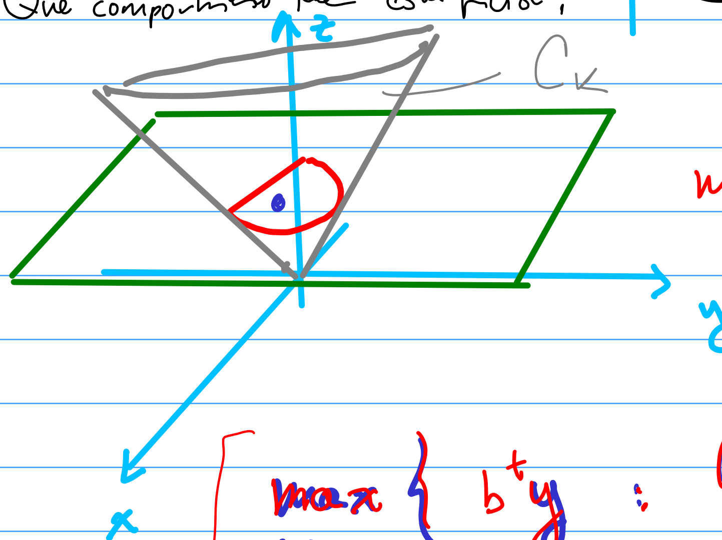
$\min \left[\|Ax\|_1\right]$

Ejemplo: [Funciones de soporte.]



$$\left[h(b) = \max \{ b^t y : y \in K \} \right]$$

Qué comportamiento tiene esta función?



$$\max \left\{ b^t y : \begin{array}{l} y \in C^* \\ A^t y = c \end{array} \right\}$$

$$\downarrow$$

$$\left[\max_{(y,z)} \left\{ b^t y : \begin{array}{l} (y,z) \in C_K \\ z = 1 \end{array} \right\} \right]$$

$$A^t \to \begin{pmatrix} 0^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = 1$$

Queremos calcular su dual:

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\min_{w \in \mathbb{R}} \left\{ w : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} w - \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \in C_K^* \right\}$$

$$\min_{w \in \mathbb{R}} \left\{ w : \begin{pmatrix} -b \\ w \end{pmatrix} \in C_K^* \right\} \qquad C_K^* = C_{K^\vee}$$

$$\min_{w \in \mathbb{R}} \left\{ w : (-b, w) \in C_{K^*} \right\}$$

$$\Longleftrightarrow w K^\vee \ni -b$$

notación

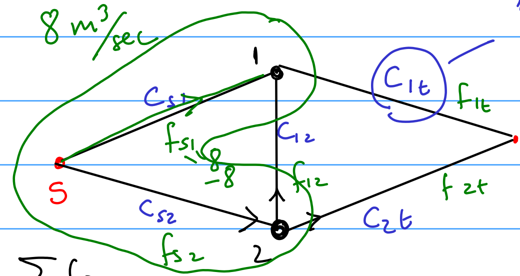
$$\min_{w \in \mathbb{R}} \left\{ w : w K^\vee \ni -b \right\} = \underbrace{p_{K^\vee}(-b)}_{\text{Funcional de Minkowski de } K^\vee}$$

De ahí por ejemplo concluimos que

$$h_k(b) \text{ es convexa en } b.$$

Teorema de

Ejemplo 3: Max Flow = Min Cut



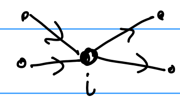
"diámetro del tubo, capacidad por segundo"

$c_{ij} \geq 0$

f_{ij} — $i<j$, $f_{ij}>0$ ó $f_{ij}<0$

$$\max \sum_{k:(s,k)\in E} f_{sk}$$

$$-c_{ij} \leq f_{ij} \leq c_{ij}$$



$$\forall i \in V(G)\setminus\{s,t\} \left(\sum_{k<i} f_{ki} - \sum_{j>i} f_{ij} = 0 \right)$$

Ejercicio:
(1) Resumir formulación de arriba
(2) Calcular el dual.
(3) Probar maxflow mincut ← los mínimos del dual se alcanzan en "cortes"