Hoy: Problemas de momentos (p. 2)

$K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto $f, g_1, \dots, g_T \in C(K)$ $c_1, \dots, c_T \in \mathbb{R}$

$$\max \int_K f \, d\mu \quad \text{s.a.} \quad \int_K g_j \, d\mu = c_j \quad 1 \leq j \leq T$$

$\mu \in$ Medidas de Borel en K

distribución de una variable aleatoria.

I. Recap de medidas

Teorema: [Rep de Riesz] Si K compacto

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Medidas de Radon en } K \\ (\text{Medidas con signo}) \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1-1} C(K)^*$$

$$\mu \longmapsto L_\mu(f) = \int_K f \, d\mu$$

Teorema: [Riesz-Markov]

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Medidas de Radon positivas} \\ (\text{Medidas positivas}) \end{array} \right\}$$

$$\updownarrow$$

$$\left[\left\{ L \in C(K)^* : L(f) \geq 0 \ \forall \, \begin{array}{c} f \in C(K) \\ f(y) \geq 0 \ \forall y \in K \end{array} \right\} \right]$$

$$\max_{L \in C(K)^*} \left[L(f) : \begin{array}{l} L(g_j) = c_j \quad j = 1, \dots, T \\ \left[L(h) \geq 0 \quad \forall h \in C(K) \text{ con } h(z) \geq 0 \ \forall z \in K \right] \end{array} \right]$$

Dificultad: Tiene dim infinita!

Obs: Tanto las restricciones lineales como la func. objetivo dependen de $\langle f, g_1, \dots, g_T \rangle =: V \subseteq C(K)$

dim finita

[¿Será posible reducir la restricción cónica a $h \in V$ que sean ≥ 0? SI = Teorema de Tchakaloff.]

El Teorema de Tchakaloff nos va a permitir demostrar que el problema de momentos es equivalente a:

K — compacto en $\mathbb{R}^n$

$$V = \langle f, g_1, \dots, g_T \rangle \subseteq C(K)$$

$$P_V(K) = \{ h \in V : h(z) \geq 0 \ \forall z \in K \}$$

Si V contiene una constante no nula entonces

$$\left[\beta^* = \max_{T \in V^*} \left\{ T(f) : \begin{array}{l} T(g_j) = c_j, \ j = 1, \dots, T \\ \left[T(h) \geq 0 \ \forall h \in P_V(K) \right] \end{array} \right\} \right] \leftarrow \text{en dim finita!!}$$

$$T \in P_V(K)^*$$

$(T(f), T(g_1), \dots, T(g_T))$ — momentos de la medida T soportados en V.

Más precisamente el Teorema de Tchakaloff dice:

Teorema: Si $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto y $V \subseteq C(K)$ contiene al menos una constante y $\dim(V) < \infty$ entonces

"fácil"
$$\boxed{P_V(K)^*} = \mathcal{M}_V(K) \subseteq V^*$$

donde:
$$P_V(K) = \{ h \in V : h(z) \geq 0 \ \forall z \in K \}$$

medidas positivas en K

$$\mathcal{M}_V(K) = \left\{ T \in V^* : \exists \ L \in \mathcal{M}(K) \text{ con } T(h) = L(h) \ \forall h \in V \right\}$$

Ejemplo: Describa los vectores $(\mathbb{E}[1], \mathbb{E}[X], \mathbb{E}(X^2))$ posibles para variables aleatorias en $[0,1]$.

$$(\underset{\overset{1}{\parallel}}{L}, \beta, \gamma)$$

$$V = \langle 1, x, x^2 \rangle$$

$$P_V([0,1]) = \{ \overset{h(x)}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2} : h(x) \geq 0 \ \forall x \in [0,1] \}$$

$$x s_0 + (1-x) s_1(x) + s_2(x)$$

$$\left\{ x c_0 + (1-x) c_1 + \underset{\text{sos}}{p(x)} : \begin{array}{l} c_0 \geq 0 \\ c_1 \geq 0 \end{array} \right\}$$

$a_2 \geq 0 \quad -\frac{a_1}{2a_2} \geq 0$

$$\mathcal{M} = P_V([0,1))^* \qquad [(a_0 + a_1 x)^2]$$

$$(1, \beta, \gamma) = L \qquad L(c_0 x) = c_0 L(x) = c_0 \beta \geq 0 \implies \beta \geq 0$$

$$(L(1), L(x), L(x^2)) \qquad L(1-x) \geq 0$$

$$1 - \beta \geq 0 \qquad \beta \leq 1$$

$$L[(a_0 + a_1 x)^2] \geq 0 \qquad a_0^2 + 2 a_0 a_1 \beta + a_1^2 \gamma \geq 0$$

$\forall\, a_0, a_1 \in \mathbb{R}$

$$(a_0, a_1) \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & \gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & \gamma_1 \end{pmatrix} \succeq_C 0 \qquad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & \beta & \gamma \end{pmatrix} \succeq_C 0$$

$$\left\{ (1, \alpha, \beta) : \begin{array}{c} 0 \leq \alpha \leq 1 \\ \left[\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \succeq 0 \right] \end{array} \right\} = \underbrace{\mathcal{M}_V(K)}_{\uparrow \text{ espectraedro,}}$$

Ejercicio: [Dual de momentos]

$$\beta^* = \max_{T \in V^*} \left\{ T(f) : \begin{array}{l} T \in P_V(K)^* \\ \mathcal{A}^*(T) = \vec{c} \end{array} \right\}$$

$\mathcal{A}^* : V^* \longrightarrow \mathbb{R}^T$

$T \longmapsto (T(g_1), \dots, T(g_T))$

$\alpha^* \geq \beta^*$ (dualizo)

demuestre que al calcular el adjunto obtenemos:

$$\alpha^* = \min \left\{ c^t x : \mathcal{A}(x) - b \in P_V(K) \right\}$$

momentos ↔ funciones no negativas

$$\boxed{\alpha^* = \min_{x \in \mathbb{R}^T} \left\{ \begin{array}{l} c_1 x_1 + \dots + c_T x_T : \\ \left[x_1 g_1 + \dots + x_T g_T - f \right] \geq 0 \text{ en } K \end{array} \right\}}$$

Teorema: Si $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto y $V \subseteq C(K)$ contiene al menos una constante y $\dim(V) < \infty$ entonces

"fácil" $\boxed{P_V(K)}^* = \mathcal{M}_V(K) \subseteq V^*$

donde:

$P_V(K) = \{ h \in V : h(z) \geq 0 \ \forall z \in K \}$

medidas positivas en K

$\mathcal{M}_V(K) = \left\{ T \in V^* : \exists \ L \in \mathcal{M}(K) \text{ con } T(h) = L(h) \ \forall h \in V \right\}$

Dem: Si $p \in K$, p define una medida en $\mathcal{M}_V(K)$ así: $ev_p(h) := h(p)$ (δ_p)

$$K \longrightarrow \mathcal{M}_V(K)$$
$$p \longmapsto ev_p$$

$$\text{Cone}(\{ev_p : p \in K\}) \subseteq \mathcal{M}_V(K)$$

[**Af:** Estos conos coinciden, es decir, para cualquier medida μ existe una "regla de cuadratura", es decir un conjunto $p_1, \dots, p_N$ y coeficientes $w_1, \dots w_N$ con

$$\left(\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^{N} w_i f(p_i)\right) \forall f \in V$$]

$\exists$ una "$N \leq \dim(V)+1$ por Carathéodory.

Aún: $V^* \supseteq \overline{\text{Cone}(\{ev_p : p \in K\})} \supseteq \mathcal{M}_V(K)$ dualidad

Aún: $[\text{Cone}(ev_p)^* \subseteq \mathcal{M}_V(K)^* \subseteq V]$

Sea $f \in V$, $f \in \text{Cone}(ev_p)^*$, entonces $\forall p \in K$ $f(p) = ev_p(f) \geq 0$

por def de dual

$f \in P_V(K)$

por Riesz-Markov

$L(f) \geq 0 \Rightarrow f \in \mathcal{M}_V(K)^*$

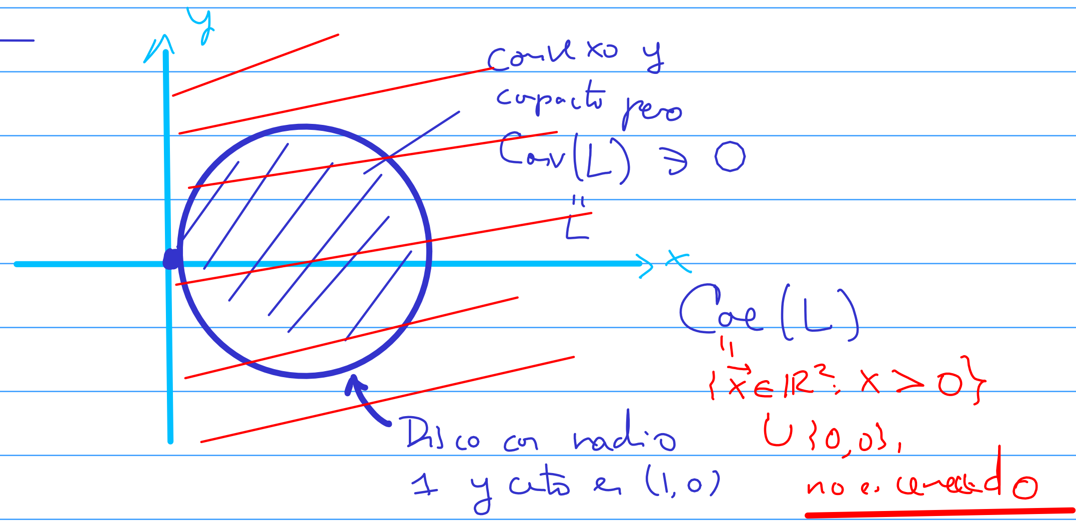
Cambiando temas

$$\mathrm{Cone}(ev_p) \subseteq \mathcal{M}_V(K) \subseteq \overline{\mathcal{M}_V(K)} \subseteq \overline{\mathrm{Cone}(ev_p)}$$

Af: $\mathrm{Cone}(ev_p) \subseteq V^*$ es cerrado.

Lema: Si L es compacto y $\mathrm{Conv}(L)$ no contiene al 0 entonces $\mathrm{Cone}(L)$ es cerrado.

Obs:



Aplicamos el Lema a $\mathrm{Conv}\{ev_p : p \in K\}$

$$i: K \xrightarrow{\text{continuo}} V^*, \quad p \longmapsto ev_p$$

y por eso $i(K)$ es compacto

Af: $\vec{0} \in V^* \notin \mathrm{Conv}(i(K))$

de lo contrario $\left[\vec{0} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i ev_{p_i}\right] \in V^*$

Si $h \in V$ y es constante c y no nula $\quad 0 \neq c$

$$0 = \vec{0}(h) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i h(p_i) = \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i\right) c = c$$

así que $\mathrm{Conv}(ev_p : p \in K)$ es cerrado. demostrado la igualdad.