Dualidad (vista de manera algorítmica)

$x \in \mathbb{R}^n \quad A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad K \subseteq \mathbb{R}^m$ cono admisible

(P) $\left[\alpha^* = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{ c^t x : Ax - b \succeq_K 0 \}\right]$ Asuma que es factible y acotado

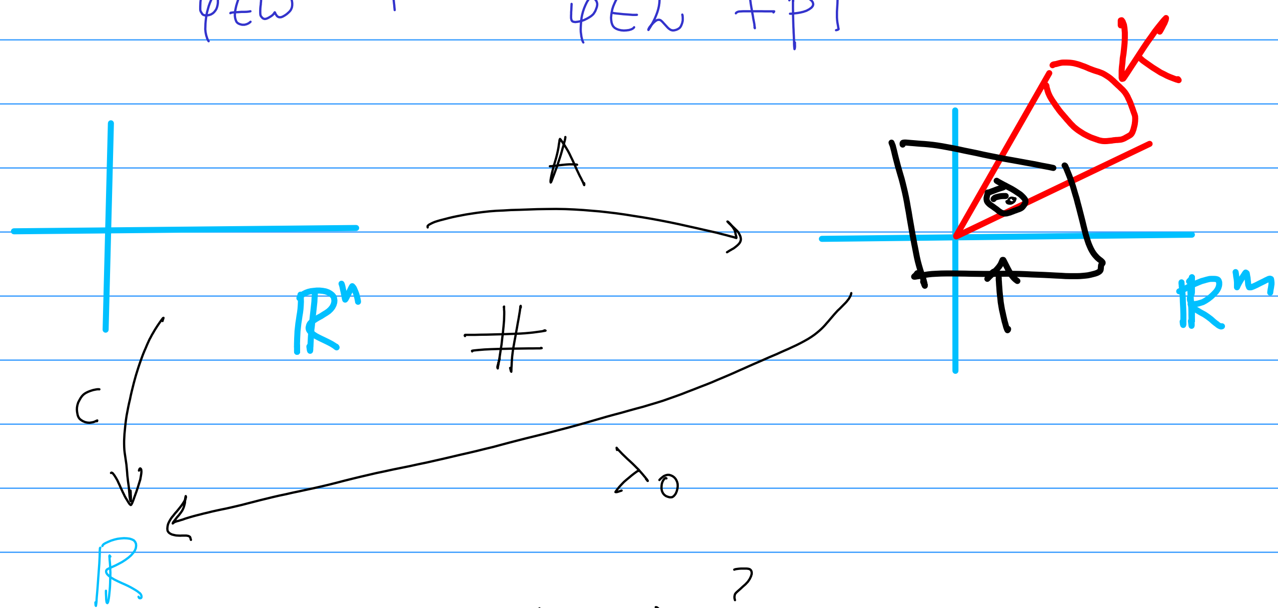
(D) $\boxed{\beta^* = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \left\{ \lambda^t b : \begin{array}{l} \lambda \succeq_{K^*} 0 \\ A^t \lambda = c \end{array} \right\}}$ Aparece mucho

(P) y (D) son problemas duales.

Lema: Los problemas de arriba son equivalentes a una pareja de problemas duales de la forma

$$\alpha^* = \inf_{y \in W} \left\{ p(y) : \begin{array}{l} y \in C \\ y \in L - b \end{array} \right\} \subseteq W \qquad p(b)=0$$

$$\beta^* = \sup_{\varphi \in W^*} \left\{ \varphi(b) : \begin{array}{l} \varphi \in C^* \\ \varphi \in L^\perp + p \end{array} \right\} \subseteq W^*$$



$$\exists\ \lambda_0 : \quad \lambda_0(Ax) \overset{?}{=} c(x)$$

$$A^t(\lambda_0) = c$$

$$c \in \operatorname{im}(A^t) = \ker(A)^\perp$$

Si $c \notin \ker(A)^{\perp}$ $\exists$ $v \neq 0$, $Av = \vec{0}$
$c^t v \neq 0$

$\alpha^* = \inf \{ c^t x : Ax - b \succeq_K 0 \}$

Si x : $Ax - b \succeq_K 0 \Rightarrow A(x+tv) - b \succeq_K 0$

luego $x + tv$ es factible $\forall t \in \mathbb{R}$

$\alpha^* = -\infty$ (porque $\alpha^* \leq c^t(x+tv)$ $\forall t \in \mathbb{R}$)

Así que, como α^* es ACOTADO sabemos que existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$ con $A^t \lambda_0 = c$.

De acá:

$$\alpha^* = \inf \left\{ \lambda_0^t y : \begin{array}{l} y \in \mathrm{im}(A) - b \\ y \in K \end{array} \right\}$$

Primal en $\mathbb{R}^m$.

dualidad geométrica

El dual es:

$$\beta^* = \sup \left\{ \lambda^t b : \begin{array}{l} \lambda \in \mathrm{im}(A)^{\perp} + \lambda_0 \\ \lambda \in K^* \end{array} \right\}$$

$$\lambda \in \ker(A^t) + \lambda_0$$

$$A^t \lambda = A^t \lambda_0 = c$$

$$\Updownarrow$$

$$A^t \lambda = c$$

$$\boxed{\beta^* = \sup \left\{ \lambda^t b : \begin{array}{l} \lambda \succeq_{K^*} 0 \\ A^t \lambda = c \end{array} \right\}}$$

Teorema (Algorithmic conic duality)

(P) $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \vec{c}^{\,t} \vec{x}$

s.a. $P\vec{x} = \vec{p} \quad (P \in \mathbb{R}^{p\times n},\ \vec{p} \in \mathbb{R}^p)$ ← p restr. lineales afines

$A_1\vec{x} - \vec{b}_1 \succcurlyeq_{K_1} 0$

$A_2\vec{x} - \vec{b}_2 \succcurlyeq_{K_2} 0 \qquad \left(A_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n},\ \vec{b}_i \in \mathbb{R}^{m_i} \right)$

$\vdots \qquad\qquad i = 1, \dots, m$

$A_m\vec{x} - \vec{b}_m \succcurlyeq_{K_m} 0$

m desigualdades cónicas.

(D) $\max_{(\nu, \eta_1, \dots, \eta_m)} \vec{p}^{\,t}\nu + \sum_{i=1}^{m} \vec{b}_i^{\,t} \eta_i$

$\nu \in \mathbb{R}^p,\ \eta_1 \in \mathbb{R}^{m_1},\ \dots,\ \eta_m \in \mathbb{R}^{m_m}$

$P^t \nu + \sum_{i=1}^{m} A_i^t \eta_i = \vec{c}$ — en $\mathbb{R}^n$

$\eta_1 \succcurlyeq_{K_1^*} 0$

$\vdots$

$\eta_m \succcurlyeq_{K_m^*} 0$

(P) y (D) son duales.

Obs: (1) Las variables duales están en correspondencia con las restricciones del problema primal.

(2) Correspondencia entre desigualdades del primal y del dual.

Demostración de caso especial

(P) $\left[\alpha^* = \min \left\{ c^t x : \left[\begin{array}{l} Px = p \\ Ax - \vec{b} \succcurlyeq_K 0 \end{array} \right] \right\} \right]$

$\vec{c} \in \mathbb{R}^n$

$A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \vec{b} \in \mathbb{R}^m$

$P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \vec{p} \in \mathbb{R}^m$

Creamos nuevas variables $s \in \mathbb{R}^m$

$$\left[\begin{array}{l} A\vec{x} - \vec{b} = \vec{s} \\ P\vec{x} = \vec{p} \\ s \geq_K 0 \end{array}\right] \quad (\vec{x}, \vec{s}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

$\sim$ cono K $\subseteq$ no admisible

Idea: Reparto $\vec{x} = \vec{u} - \vec{v}$, $(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$\vec{u} \geq 0$ $\vec{v} \geq 0$ (comp. a comp.)

$$\left\{ (\vec{u}, \vec{v}, \vec{s}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : \begin{array}{l} \vec{u} \geq 0 \\ \vec{v} \geq 0 \\ \vec{s} \geq_K 0 \end{array} \right\}$$

cono admisible

$$\alpha^* = - \max_{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{s})} \left\{ -c^t(\vec{u} - \vec{v}) : \begin{array}{l} u \geq 0 \\ v \geq 0 \\ s \geq_K 0 \\ A(\vec{u} - \vec{v}) - \vec{s} = \vec{b} \\ P(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{p} \end{array} \right\} \leftarrow \max\left\{ \lambda^t \tilde{b} : \begin{array}{l} \lambda \geq_{K^*} 0 \\ A^t\lambda = c \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{A}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{s}) = \begin{pmatrix} \vec{b} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\mathcal{A} \quad \begin{array}{c|ccc} & \overset{u}{\mathbb{R}^n} & \overset{v}{\mathbb{R}^n} & \overset{s}{\mathbb{R}^m} \\ \hline \nu \; \mathbb{R}^m & A & -A & -I \\ \oplus & & & \\ \eta \; \mathbb{R}^p & P & -P & 0 \end{array}$$

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} -c \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{b}^t(u, v, s) = -c^t u + cv$$

$$\max \left\{ \begin{pmatrix} -c \\ c \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ s \end{pmatrix} : \begin{array}{l} \mathcal{A}\begin{pmatrix} u \\ v \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{b} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u \\ v \\ s \end{pmatrix} \succeq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ [\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times K^*] \end{array} \right\}$$

$\sim$ admisible.

$$\mathcal{A}^t \begin{pmatrix} \nu \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^t & A^t \\ -P^t & -A^t \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P^t & A^t \\ -P^t & -A^t \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ \eta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -c \\ c \\ 0 \end{pmatrix} \succcurlyeq_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times K} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} P^t\nu + A^t\eta + c \geq 0 \\ -P^t\nu - A^t\eta - c \geq 0 \end{array}\right] \\ \qquad -\eta \succcurlyeq_K 0 \end{array}\right] \leftarrow \mathcal{A}^t \begin{pmatrix} \nu \\ \eta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -c \\ c \\ 0 \end{pmatrix} \succcurlyeq 0$$

$$-\min \begin{pmatrix} \vec{b} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nu \\ \eta \end{pmatrix}$$

así que el dual es:

$$-\max \; b^t\nu + p^t\eta \text{ s.a. } \left[\begin{array}{l} P^t\nu + A^t\eta = -\vec{c} \\ -\eta \succcurlyeq_K 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{l} \min -b^t\nu - p^t\eta \text{ s.a.} \\ P^t\nu + A^t\eta = -\vec{c} \\ -\eta \succcurlyeq_K 0 \end{array}\right]$$

Defino $\begin{array}{l} \nu \leftarrow -\nu \\ \eta \leftarrow -\eta \end{array}$ y resulta así:

$$\boxed{\begin{array}{l} \min\limits_{(\gamma;\eta)} \; b^t\gamma + p^t\eta \quad \text{s.a.} \\ \quad P^t\gamma + A^t\eta = \vec{c} \\ \quad\quad \eta \succeq_K 0 \end{array}}$$

conseguíamos probar.

Ejercicio: Demostrar el Teorema de "Dualidad cónica algorítmica" en su versión general.