## Clase Anterior:

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado

y $K \subseteq V$ convexo, $\operatorname{int}(K) \neq \emptyset$

$\vec{0} \in \operatorname{int}(K)$.

$p_K : V \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\boxed{p_K(x) := \inf \{ \lambda > 0 : \lambda K \ni x \}}$$

Funcional de Minkowski de $K$

| | |
|---|---|
| $\|\cdot\|$ | $p_K(\cdot)$ |
| $B$ | $K$ |
| $\|\cdot\|_*$ | ?? |
| $B^*$ | ?? |

**Lema:** Propiedades:

(1) $\infty > p_K(x) \geq 0$

(2) $p_K(\alpha \vec{x}) = \alpha\, p_K(\vec{x}), \quad \forall \alpha > 0 \quad \alpha \in \mathbb{R}$

(1)–(2): seminorma

(3) $p_K$ es convexa

(4) $p_K$ es continua

(5) $\operatorname{int}(K) = \{ x \in V : p_K(x) < 1 \}$

$\overline{K} = \{ x \in V : p_K(x) \leq 1 \}$

[Hahn - Banach geométrico]

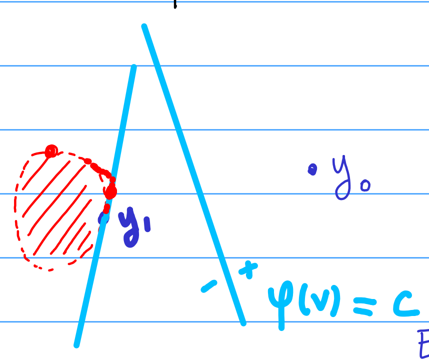
**Teorema** [Hiperplano separador]

Sea $K \subseteq V$ convexo con $\operatorname{int}(K) \neq \emptyset$

Si $y \notin K$ existe $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal continuo con:

$$\varphi(y) > \varphi(x) \quad \forall x \in \operatorname{int}(K)$$

Ejemplo:



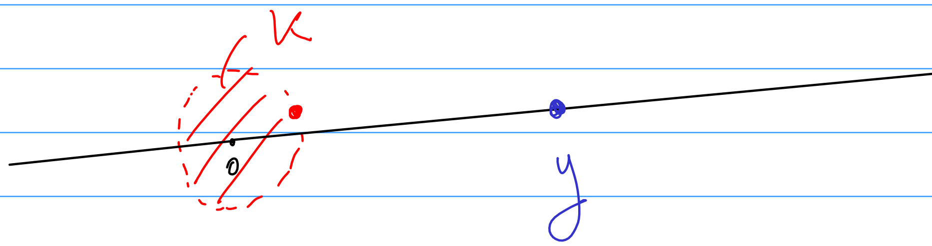

**Dem.**

Recuerde que si $p : V \longrightarrow \mathbb{R}$ es una seminorma continua y $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$ es lineal y satisface $W \subseteq V$

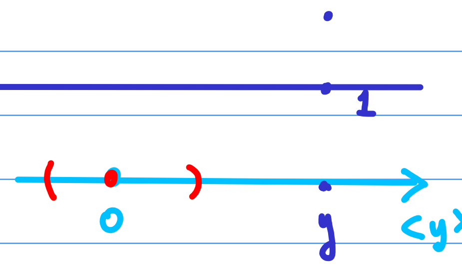
$f(z) \leq p(z) \quad \forall z \in W \implies \exists\, F$ que extiende a $f$

Extensión de Hahn Banach

$F: V \longrightarrow \mathbb{R}$ con $\underbrace{F(v) \leq p(v)}$ $\forall v \in V$.




Como $\text{int}(K) \neq \emptyset$ existe seminorma continua $p_K(x)$.




Si $y \notin K \Rightarrow p_K(y) \geq 1$

$f(\lambda y) = \lambda$

si $\lambda > 0$ $p_K(\lambda y) = \lambda p_K(y) \geq \lambda = f(\lambda y)$

si $\lambda < 0$ $p_K(\lambda y) \geq 0$, $f(\lambda y) = \lambda < 0$ $\Big] \Rightarrow f \leq p_K$ en $\langle y \rangle$

Por Hahn-Banach existe $F: V \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal extensión de $f$

$F(z) \leq p_K(z)$ $\forall z \in V$

de ahí: (1) $F(y) = f(y) = 1$ ✓

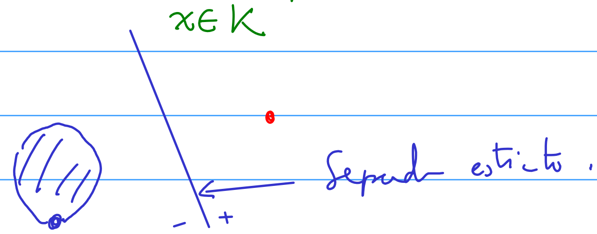
(2) si $v \in \text{int}(K) \Rightarrow p_K(v) < 1$

$F(v) \leq p_K(v) < 1$.

Así que $F$ define nuestro hiperplano separador.

**Ejercicio:** Demuestre que si $y \notin \overline{K}$ y $\vec{0} \in \text{int}(K)$ entonces $\exists$ $\varphi: V \to \mathbb{R}$ lineal continuo con

$$\varphi(y) > \sup_{x \in \overline{K}} \varphi(x)$$



**Ejercicio: [Eidelheit separation Thm]**

Sean $K_1, K_2$ convexos en $V$ que cumplen

(1) $\mathrm{int}(K_1) \neq \emptyset$

(2) $K_2 \cap \mathrm{int}(K_1) = \emptyset$

$\exists\ \varphi \in V^*$ con

$$\sup_{x\in K_1} \varphi(x) \leq \inf_{x\in K_2} \varphi(x)$$

[Hint: Considere $K_1 - K_2$]

**Ejercicio:** Sea $K$ convexo con $\mathrm{int}(K) \neq \emptyset$, $x \notin \mathrm{int}(K)$ $\exists$ hiperplano cerrado $H$ con $H \ni x$ y $K \subseteq H_{\leq 0}$.

**Ejercicio:** $\varphi : V \to \mathbb{R}$ lineal. $\varphi$ es continua $\iff$ $\varphi^{-1}(a)$ es cerrado $\forall a$.

**Consecuencias:**

(1) Todo convexo cerrado ($K = \overline{K}$) con $\mathrm{int}(K) \neq \emptyset$ se puede describir mediante desigualdades lineales. $\displaystyle\bigcap_{\varphi \in K^\vee} \{v : \varphi(v) \leq 1\}$

(2) El conjunto de desigualdades lineales que definen a $K$ tiene estructura de conjunto convexo ("polar" de $K$) $K^\vee$

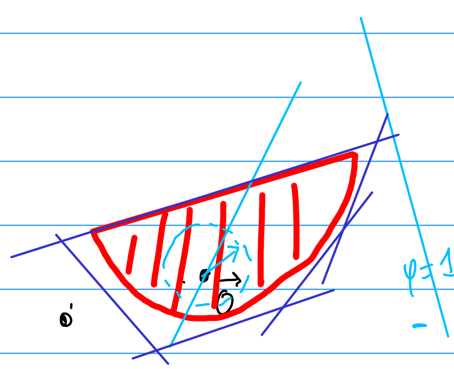
(3) $\varphi \in V^*$ $\left[\max_{x\in K} \varphi(x)\right]$ $\quad h = P_{K^\vee}$

$$h(\varphi) := \max_{x\in K} \varphi(x) \qquad h : V^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

Cómo es $h$?

$\varphi \in V^*$ $\left[\frac{1}{c}\varphi(x) \leq 1\right]$

$[\varphi(x) \leq c]$ $\forall x \in K$




$\varphi = 1$

$\varphi = c$

Si $c=0$ $\varphi(x) \leq 0$ $\forall x \in K$

$\varphi(v) \leq 0$, $\varphi(-v) \leq 0$ $\Rightarrow$ $\varphi \equiv 0$

Considere $K^{\vee} := \{ \varphi \in V^{*} : \varphi(x) \leq 1 \ \ \forall x \in K \}$

note que $K^{\vee}$ es convexo y cerrado

$$K^{\vee} = \bigcap_{x \in K} ev_x^{-1}((-\infty, 1])$$

Af: Si $K$ es cerrado entonces

$$\left[ \overline{K} = \underbrace{\bigcap_{\varphi \in K^{\vee}} \{ v \in V : \varphi(v) \leq 1 \}}_{L} \right]$$

(1) $K \subseteq L$ ✓

Si $\varphi \in K^{\vee}$ y $x \in K$ $\varphi(x) \leq 1 \Rightarrow x \in L$

(2) $y \notin \overline{K}$ por ejercicio $\exists\ \psi \in V^{*}$ con

$\psi(y) > d > \sup_{x \in K} \psi(x)$

normalizando por $d$ demostro, lo que queríamos.

$\psi(y) > 1$ $\psi \in K^{\vee}$

$\Rightarrow y \notin L$