Hoy: Conos (parte 1) $C \subseteq \mathbb{R}^n$

$\underset{\substack{\| \\ \mathbb{R}^n}}{V}$

Def: $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es un cono convexo si satisface:

(1) $x, y \in C \Rightarrow x + y \in C$

(2) $x \in C, \lambda \in \mathbb{R}_{>0} \Rightarrow \lambda x \in C$.

Adicionalmente decimos que C es puntudo ("pointed") si $\forall a \in V$ $a, -a \in C \Rightarrow a = 0$.

(C no contiene a ningún segmento de recta con 0 en su interior relativo).

Def: Si $C \subseteq V$ es un subconjunto definimos

$$C^* = \{ \varphi \in V^* : \varphi(c) \geq 0 \ \forall c \in C \}$$

$\dim(V) < \infty$

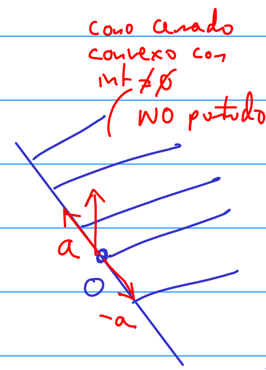
Teorema: Sea $C \subseteq V$ un cono. Las siguientes afirmaciones son ciertas:

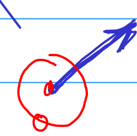
(1) C^* es un cono convexo cerrado

(2) $\operatorname{int}(C) \neq \emptyset \Rightarrow C^*$ es puntudo

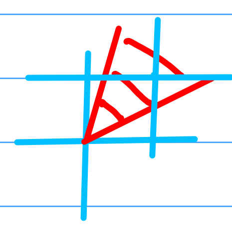
(3) Teorema de bi-dualidad para conos

$$(C^*)^* = \overline{C}$$





Ejercicio: Si $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es cerrado y puntudo $\Rightarrow C^*$ tiene interior no vacío.



Def: $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es un cono admisible si C es un cono convexo cerrado, puntudo y con interior no vacío.

Dem del Lema:

C^* = "Desigualdades válidas en C"

$$C^* = \bigcap_{v \in C} \underbrace{\{\varphi \in V^* : \varphi(v) \geq 0\}}_{\text{semiespacios cerrados}}$$

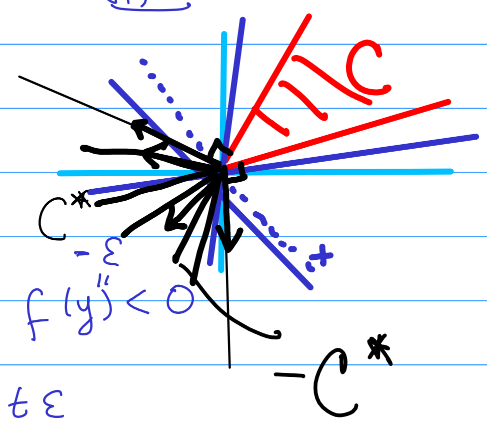
$(f, d) \in V^* \times \mathbb{R}$ es válida para C

$\forall x \in C \; (f(x) \geq d)$

Obs: Si C es cono (f,d) es válida $\iff$ $(f,0)$ es válida

$f(x) \geq d \quad \forall x \in C$

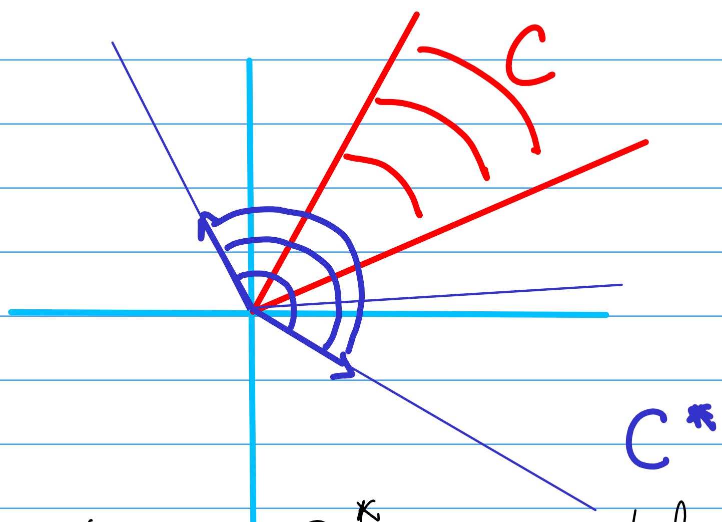
$$\underbrace{\inf_{x \in C} f(x)}_{\alpha} \geq d \qquad \text{si } \alpha \geq 0$$



Si $\alpha < 0 \quad \exists\, y \in C : f(y) < 0$ $\quad -\varepsilon$

$\forall t \quad f(ty) < t f(y) < -t\varepsilon$

luego $\inf_{y \in C} f(y) = -\infty$ $\boxtimes$



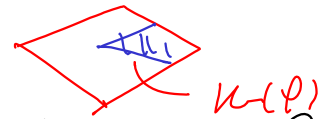
(2) $\operatorname{int}(C) \neq \emptyset \Rightarrow C^*$ es puntado

C^* no puntado $\Rightarrow \operatorname{int}(C) = \emptyset$

$\Downarrow$

$\exists\, \varphi \neq 0 : \varphi, -\varphi \in C^*$

$$\varphi(x) \geq 0 \quad \forall x \in C$$
$$-\varphi(x) \geq 0 \quad \forall x \in C$$



$\Rightarrow \varphi \equiv 0$ en C

$C \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$ luego $\mathrm{int}(C) = \emptyset$.

(3) $$\underbrace{(C^*)^*}_{V^{**}} = \underbrace{\overline{C}}_{V}$$

$$V^{**} \longleftarrow V$$

$$V \xrightarrow{1-1} V^{**}$$
$$v \longmapsto ev_v$$

y por dim finita es isomorfismo.

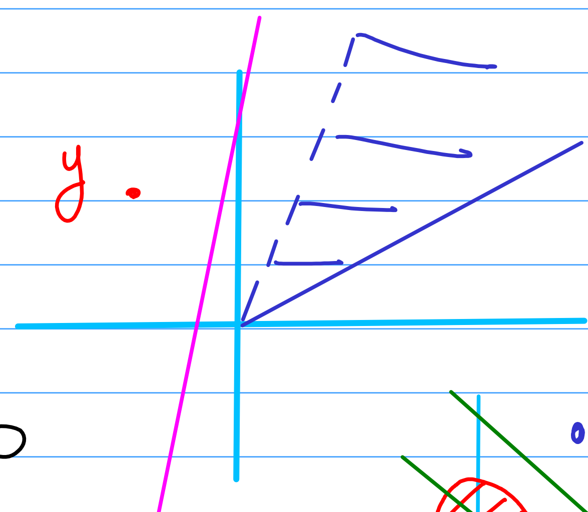
Si $v \in C$ y $\varphi \in C^*$ entonces

$$ev_v(\varphi) = \varphi(v) \geq 0$$ luego $ev_v \in (C^*)^*$

$C \subseteq (C^*)^*$

$$\overline{C} \subseteq (C^*)^*$$ porque todo dual es cerrado.

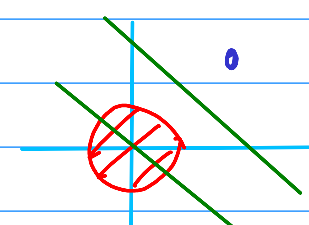
Sea $y \notin \overline{C}$



Por Hahn-Banach geométrico + Ejercicio $\exists\ \varphi : V \to \mathbb{R}$

$$\varphi(y) < \inf_{v \in C} \varphi(v) = 0$$

Como C es cono $\inf_{v \in C} \varphi(v) \geq 0$



$$\sup_{y \in B} \varphi(y) < \inf_{z \in A} \varphi(z)$$

$\underline{\varphi(y) < 0}$ y $\underbrace{\left[\begin{matrix}\varphi(v) \geq 0 \\ \forall v \in C\end{matrix}\right]}_{\varphi \in C^*}$

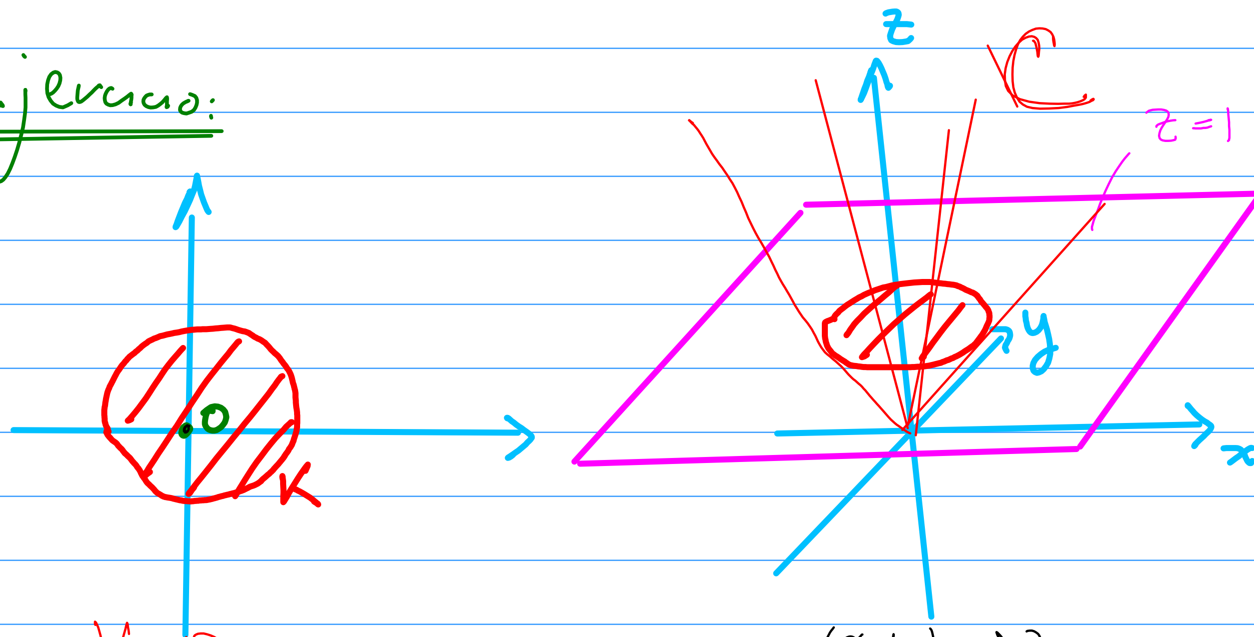
$ev_y(\varphi) < 0$

$\Rightarrow ev_y \notin (C^*)^*$

$$V \xrightarrow{i} V^{**}$$

$$i(\overline{C}) = (C^*)^*.$$

Ejercicio:



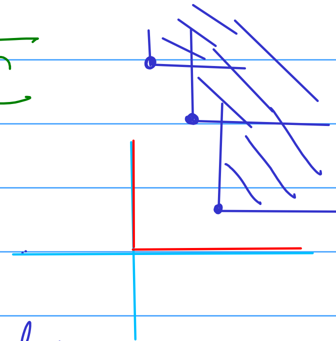
$C \subseteq V \times \mathbb{R}$ viene equipado con: (1) $grad_h : C \to \mathbb{R}$

(2) $\underline{(\vec{0}, 1) \in \mathrm{Int}(C)}$

Calculamos $K^\vee \cong V^*$ $C^* \subseteq V^* \times \mathbb{R}^\circ$

(1) Demostrar que $\{\varphi \in C^{\circledast} : \varphi(\vec{0},1) = 1\}$ (1|2) $K^{\vee}$

(2) $(K^{\vee})^{\vee} = \overline{K} \overset{\text{relacionar}}{\longleftrightarrow} (C^{\circledast})^{\circledast} = \overline{C}$



Optimización cónica: (Conic programming).

Sea $K \subseteq V$ un cono admisible. Esto define un orden parcial en V

$$\vec{a} \succeq_K \vec{b} \iff \vec{a} - \vec{b} \in K$$

Ejercicio:

K es un cono convexo puntudo con $0 \in K$ $\iff$ $\succeq_K$ satisface:

(1) Reflexiva

(2) Antisimétrica

(3) Transitiva

(4) Aditividad $a \succeq_K b$ y $c \succeq_K d$ $\Rightarrow$ $a + c \succeq_K b + d$

(5) homogeneidad $a \succeq_K b \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ $\lambda a \succeq_K \lambda b$

Sea $C \subseteq W$ un cono admisible.

Un problema de programación cónica en V es

$$\min \{ c(x) : \overbrace{A x \succeq_C b}^{Ax - b \in C} \}$$

donde $A : V \longrightarrow W$

$b \in W$ y $c : V \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal afín

Veremos que