Hoy: Optimización cónica y intro a dualidad.

Sean V, W e.v. $/\mathbb{R}$ $\quad \dim(V), \dim(W) < \infty$

$A: V \longrightarrow W$ lineal

y $S \subseteq V$ subespacio lineal

Def: $V \xrightarrow{A} W \rightsquigarrow W^* \xrightarrow{A^*} V^*$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "A"] \arrow[dr, "\varphi \circ A"'] & W \arrow[d, "\varphi \text{ lineal}"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd} \qquad \varphi \longmapsto A^*(\varphi)(v) = \varphi(Av)$$

$\varphi \circ A = A^*(\varphi)$

$\mathcal{B}, \mathcal{B}'$

Ejercicio: (1) Fije bases de V y W y ponga sus bases duales $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ en V^* y W^*

$$[A]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = [A^*]^t_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$$

(por eso a veces se escribe A^t)

(2) Si V, W son de Hilbert $[\forall \varphi, x \; \langle A^*\varphi, x\rangle = \langle \varphi, Ax\rangle]$ Demuestre que está bien y que determina A^* de manera única.

Def: $S \subseteq V$ subespacio lineal, $\quad S^\perp = \{\varphi \in V^* : \varphi(s) = 0 \;\forall s \in S\}$

Lema: (1) $\dim(S^\perp) = \dim(V) - \dim(S)$

(2) $(S^\perp)^\perp = S$ $\qquad\qquad A: V \longrightarrow W$

[(3) $\operatorname{im}(A)^\perp = \ker(A^*)$]

(4) $\operatorname{im}(A^*) = \ker(A)^\perp$

Dem: $S = \langle\{s_1, \dots, s_k\}\rangle$ con $k = \dim(S)$

Completamos a una base para V $\quad s_1, \dots, s_k, v_1, \dots, v_{n-k}$

Considere la base dual a la escogida $\{\delta_1, \dots, \delta_k, w_1, \dots, w_{n-k}\}$

$$S^\perp = \{\varphi \in V^* : \varphi(s) = 0 \;\forall s \in S\}$$
$$= \{\varphi = \sum_{i=1}^{k} a_i \delta_i + \sum_{j=1}^{n-k} b_j w_j : \varphi(s) = 0 \;\forall s \in S\}$$

$\varphi(s_j) = a_j = 0$ así que

$S^{\perp} = \langle w_1, \dots, w_{n-k} \rangle$ y estos son l. indep.

$\dim(S^{\perp}) = n-k$ ✓

(2) $S \subseteq (S^{\perp})^{\perp}$ $\left(\begin{array}{l} \varphi \in S^{\perp} \text{ y } s \in S \\ \varphi(s) = 0 = ev_s(\varphi) \end{array} \text{ luego } ev_s \in (S^{\perp})^{\perp} \right)$

$\dim((S^{\perp})^{\perp}) = n - \dim(S^{\perp}) = n - (n - \dim(S)) = \dim(S)$

luego hay igualdad.

(3) $V \xrightarrow{A} W$

$\varphi \in \operatorname{im}(A)^{\perp} \iff \begin{array}{l} \varphi \in W^{*} \\ \varphi(Ax) = 0 \ \forall x \in V \end{array} \iff \begin{array}{l} \varphi \in W^{*} \\ A^{*}(\varphi) \equiv 0 \end{array}$

$\iff \varphi \in \ker(A^{*})$

(4) $\operatorname{im}(A^{*}) \overset{?}{=} \ker(A)^{\perp}$

De (3) $\operatorname{im}(A^{*})^{\perp} = \ker(A^{**}) = \ker(A)$

aplicando perp a ambos lados

$\operatorname{im}(A^{*}) = \ker(A)^{\perp}$ ✓

Def: Sea W un ev$/\mathbb{R}$ y sea $\mathcal{C} \subseteq W$ un cono admisible (convexo cerrado puntado con interior). Un problema de programación $\mathcal{C}$-cónica es

$A\vec{x} - b \in \mathcal{C}$

$$\boxed{\alpha^{*} = \min \{ c(x) : Ax \succeq_{\mathcal{C}} b \}}$$

donde $x \in V$ ev$/\mathbb{R}$

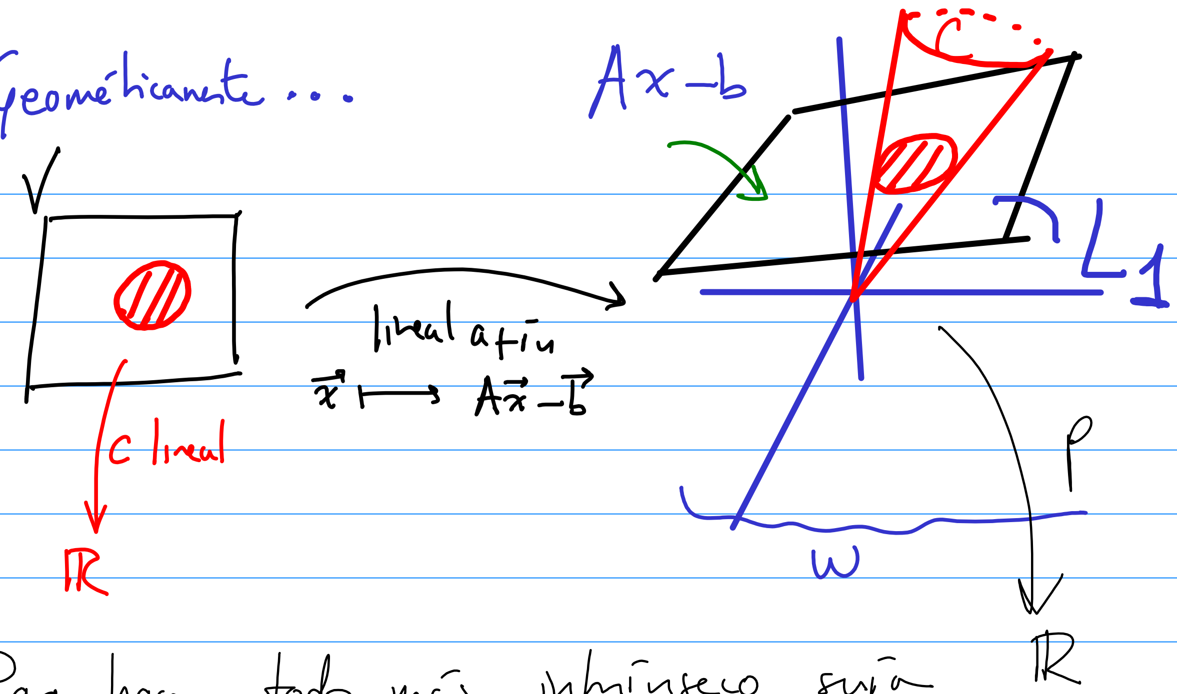
$c : V \to \mathbb{R}$ lineal

$A : V \longrightarrow W$

$\vec{b} \in W$ fijo.

$\mathcal{C} \subseteq W$ cono admisible

Geométricamente ...



Para hacer todo más intrínseco sería deseable encontrar $p \in W^*$ que coincidiera con C en los puntos del subespacio afín L_1. ¿Será esto posible?

$$\boxed{\min \left\{ p(y) : \begin{array}{l} y \in L_1 \\ y \in C \end{array} \right\}}$$

(1) $\exists\, x : Ax \succeq_{\mathcal{C}} \vec{b}$?

NO → $+\infty$ NO interesante

Sí ($\exists\, x_0 : Ax_0 - \vec{b} \in \mathcal{C}$) → $c \in \ker(A)^{\perp} = \mathrm{im}(A^*)$?

NO → $\exists\, v \in \ker(A)$: $c(v) \neq 0$

$$A(x_0 + tv) - b = Ax_0 - b \in \mathcal{C}$$

$x_0 + tv$ es fact $c(x_0 + tv) = c(x_0) + t\,c(v)$ → $-\infty$

Sí → $\exists\, p \in W^*$ $A^*(p) = c$. !!

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{\quad A \quad} & W & \xrightarrow{\quad -b \quad} & W \\ x & \longmapsto & Ax & \longrightarrow & Ax-b \end{array}$$

c

$$\exists\, p \in W^*:\ p(Ax) = c(x)\ \forall x \in V\ ?$$

$$A^*(p)(x) = c(x)$$

$$¿\, c \in \operatorname{im}(A^*)\ ?$$

$$\| $$

$$\ker(A)^{\perp}$$

$$\exists\, p \in W^*:\ A^*(p) = c$$

$$y\ \ p(-b) = 0\ ?$$

Soluciones $[A^*(z) = c]$ son:

$$p + \ker(A^*) \leftarrow \varphi : \varphi(b) = 0$$

$$\exists\, \psi \in \ker(A^*):\ \psi(b) \neq 0 \qquad p - \frac{p(b)}{\psi(b)}\psi$$

$$\operatorname{im}(A)^{\perp} = \ker(A^*) \not\subseteq \langle b \rangle^{\perp}\ ?$$

$$\operatorname{im}(A) \not\supseteq \langle b \rangle$$

Algoitmo: (1) Encuente p_0: $A^*(p_0) = c$

(2) Encuente $\psi \in \ker(A^*)$: $\psi(b) \neq 0$

Depina $p = p_0 - \dfrac{p_0(b)}{\psi(b)} \psi$

$$(P) \quad \min \left\{ p(y) : \begin{array}{l} y \in L_1 \\ y \in C \end{array} \right\}$$

donde $L_1 = \{ Ax - b : x \in V \}$

y $p(b) = 0$

Obs: [α^* = mínmo de (P)]