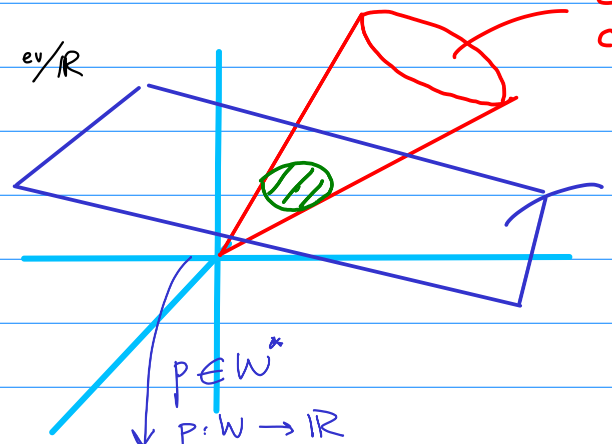
Hoy: Dualidad cónica.

W ev/$\mathbb{R}$



$$\boxed{\alpha^* = \inf \left\{ p(y) : \begin{array}{l} y \in C \\ y \in L_1 \end{array} \right\}}$$

Problema general de opt cónica.

que podemos construir explícitamente.

Todo problema de optimización cónica tiene un problema dual asociado [cuyos puntos factibles nos permiten encontrar cotas inferiores para α^*

dualidad débil

[y bajo ciertas condiciones la cota superior más grande de hecho coincide con α^*

dualidad fuerte

explicación.

Hoy: (1) Construcción del problema dual
(2) Teorema de dualidad débil
(3) Teorema de dualidad fuerte.

$$\alpha^* = \inf_{y \in W} \left\{ p(y) : \begin{array}{l} y \in C \\ y \in L_1 \end{array} \right\}$$

Para construir el dual: (1) tome $\underline{-b \in L_1}$ con $\overset{0}{\overset{\shortparallel}{p(-b)}}$

Recuerde que, si $L_1 \subseteq W$ es subespacio afín y $z \in L_1$

$L_1 - z =: \mathcal{L} \subseteq W$ es un subespacio vectorial

$L_1 = \mathcal{L} + z$ $\left[\mathcal{L} = L_1 - (-b), \boxed{L_1 = \mathcal{L} - b} \right]$

utilidad:

Como L_1 es afín $L_1 = \mathcal{L} + w$

$p(l_1) = p(l + w) = \underbrace{p(l)}_{\text{lineal}} + p(w)$

luego si p no es constante en L_1

$\exists\ v \in L_1 : p(v) = 0$, defina $-b = v$

sin pérdida de generalidad asume que su problema cónico es (P) (V_r).

Def: El problema primal (P) es

$$\boxed{\alpha^* = \inf_{y \in W} \left\{ p(y) : \begin{array}{l} y \in C \\ y \in \mathcal{L} - b \end{array} \right\}}$$

$P \subseteq W$

donde (1) $\mathcal{L} \subseteq W$ subespacio vectorial

(2) $b \in W$ con $p(b) = 0$

α^*

V_r

β^*

Def: El problema dual (D) de (P) es

$$\boxed{\beta^* = \sup_{\varphi \in W^*} \left\{ \varphi(b) : \begin{array}{l} \varphi \in C^* \\ \varphi \in \mathcal{L}^\perp + p \end{array} \right\}}$$

$D \subseteq W^*$

Ejercicio: Para cada uno de los siguientes conos C demuestre que son admisibles y calcule C^*.

(1) $C = \mathbb{R}^n_+ \subseteq \mathbb{R}^n$, $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$

(2) $C = \{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \|x\|_2 \leq \lambda\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

(3) $C = \{A \in S^2(W) : A \succcurlyeq 0\} \subseteq S^2(W)$.

(4) $C = \{(x,\alpha) : \underset{\nwarrow \text{cualquiera}}{\|x\|} \leq \alpha\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Teorema: [Dualidad]

(1) El doble dual es el problema primal ["ser dualidad"]

(2) Si $(y,\varphi) \in P \times D \Rightarrow p(y) \geq \varphi(b)$ y en particular $\alpha^* \geq \beta^*$ [Dualidad débil]

(3) Si $\alpha^* > -\infty$ (primal acotado) y $\underbrace{L_1 \cap \operatorname{int}(C) \neq \emptyset}_{\text{condición de Slater}}$ entonces:

(i) El supremo en el dual se alcanza en algún punto $\varphi^* \in D$ (i.e. $\varphi^*(b) = \beta^*$)

y (ii) $\alpha^* = \beta^*$ [dualidad fuerte]

(4) Si $\beta^* < \infty$ y $(L^\perp + p) \cap \operatorname{int}(C^*) \neq \emptyset$ entonces:

(i) El ínfimo en el primal se alcanza en un punto y^* con $p(y^*) = \alpha^*$

y

(ii) $\alpha^* = \beta^*$

(5) Si ~~las hipótesis de (3) ó (4) se cumplen entonces, una pareja~~ $(\bar{y},\bar{\varphi}) \in P \times D$ es una pareja de soluciones óptimas ssi se cumple alguna (y por lo tanto todas) las siguientes

?

(i) $p(\bar{y}) = \bar{\varphi}(b)$ [No duality gap]

(ii) $\bar{\varphi}(\bar{y}) = 0$ [Complementary Slackness]

$\varphi(b) = -(-\varphi(b))$

$\varphi(-b)$

Para (1)

$$\sup\left\{ \varphi(b) : \begin{array}{l} \varphi \in C^* \\ \varphi \in \mathcal{L}^\perp + p \end{array} \right\} = -\underbrace{\inf\left\{ -\varphi(b) : \begin{array}{l} \varphi \in C^* \\ \varphi \in \mathcal{L}^\perp + p \end{array} \right\}}_{\text{minimizar una función lineal en } C^* \cap (\mathcal{L}^\perp + p)}$$

Af: dual

$-$ (P)

Ejercicio: Complete este argumento y demuestre la parte (1) del Teorema.

(2) $\alpha^* = \inf\left\{ p(y) : \begin{array}{l} y \in C \\ y \in \mathcal{L} - b \end{array} \right\}$ con $\overset{0}{\overset{\parallel}{p(b)}}$

$$\beta^* = \sup\left\{ \varphi(b) : \begin{array}{l} \varphi \in C^* \\ \varphi \in \mathcal{L}^\perp + p \end{array} \right\}$$

Si $[(y, \varphi) \in P \times D]$

$\underbrace{(\varphi - p)}_{\mathcal{L}^\perp} \underbrace{(y + b)}_{\mathcal{L}} = 0$

$\parallel$

$\varphi(y) + \varphi(b) - p(y) - \cancel{p(b)} = 0$

$p(y) - \varphi(b) = \underset{C^*}{\varphi}(\overset{C}{y}) \geq 0 \Rightarrow p(y) - \varphi(p) \geq 0$

$p(y) \geq \varphi(b)$

$\alpha^* \geq \beta^*$

Si $(y, \varphi) \in P \times D$

$$P(y) - \varphi(b) = \varphi(y)$$

Concluimos que para $(\bar{y}, \bar{\varphi}) \in P \times D$

es equivalente

$\to P(\bar{y}) - \bar{\varphi}(b) = 0$

$\to \bar{\varphi}(\bar{y}) = 0$

y en ambos casos es demostración de optimalidad (Si $y \in P$

$P(y) \geq \bar{\varphi}(b)$ por dualidad débil)

luego $\inf_{y \in P} P(y) \geq \bar{\varphi}(b) = P(\bar{y})$

así que $\bar{y}$ es óptimo.)