Hoy: Dualidad parte (2)

W e.v. $/\mathbb{R}$
$C \subseteq W$ cono admisible
$p \in W^*$, $\mathcal{L} \subseteq W$ subespacio vect.

$$\boxed{\alpha^* = \inf_{y \in W} \left\{ p(y) : \begin{array}{l} y \in C \\ y \in \mathcal{L} - b \end{array} \right\}}$$

con $\underline{\underline{p(b)=0}}$

(P)

$$\beta^* = \sup_{\varphi \in W^*} \left\{ \varphi(b) : \begin{array}{l} \varphi \in C^* \\ \varphi \in \mathcal{L}^\perp + p \end{array} \right\}$$

(D)

Clase anterior $\forall (\bar{y}, \bar{\varphi}) \in P \times D$ $[p(\bar{y}) \geq \bar{\varphi}(b)]$

$\alpha^* \geq \beta^*$ dualidad débil

$\alpha^* - \beta^* =$ duality gap.

[Dualidad fuerte]

$\boxed{\text{Hoy:}}$ Si (1) $\alpha^* > -\infty$ (primal acotado) y

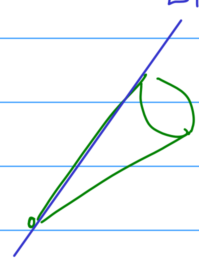
(2) $\text{int}(C) \cap (\mathcal{L} - b) \neq \emptyset$ (condición de Slater)

entonces: (a) $\exists\ \varphi^* \in D$: $\varphi^*(b) = \beta^*$ (el dual es soluble)

(b) $\alpha^* = \beta^*$ (no hay duality gap)

Ejemplo:

L_1



$L_1 \cap C$

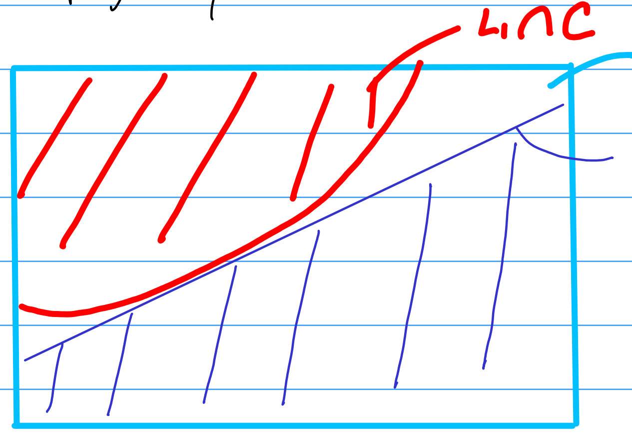
tiene interior en L_1

pero $L_1 \cap \text{int}(C) = \emptyset$

Dem. Suponga que $\alpha^* > -\infty$

$L_1 \cap C$

$L_1 = \mathcal{L} - b$

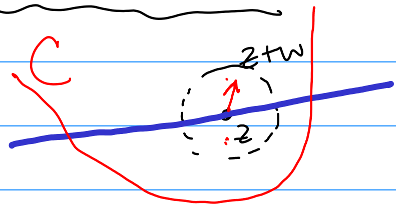


$\{ y \in L_1 : p(y) \leq \alpha^* \}$
M

Note que $C \subseteq W$ es convexo y que M también

Claim: $M \cap \text{int}(C) = \emptyset$

Si $z \in M \cap \text{int}(C)$ $\qquad p(z) \le \alpha^* = \inf\left\{p(y) : \begin{matrix} y \in C \\ y \in L_1 \end{matrix}\right\}$



$p(z) = \alpha^*$

$p(z+w) \neq \alpha^* \iff p(w) \neq 0$

$p(z+w)$ ó $p(z-w) < \alpha^*$

luego $\inf\left\{p(y) : \begin{matrix} y \in C \\ y \in L_1 \end{matrix}\right\} < \alpha^*$

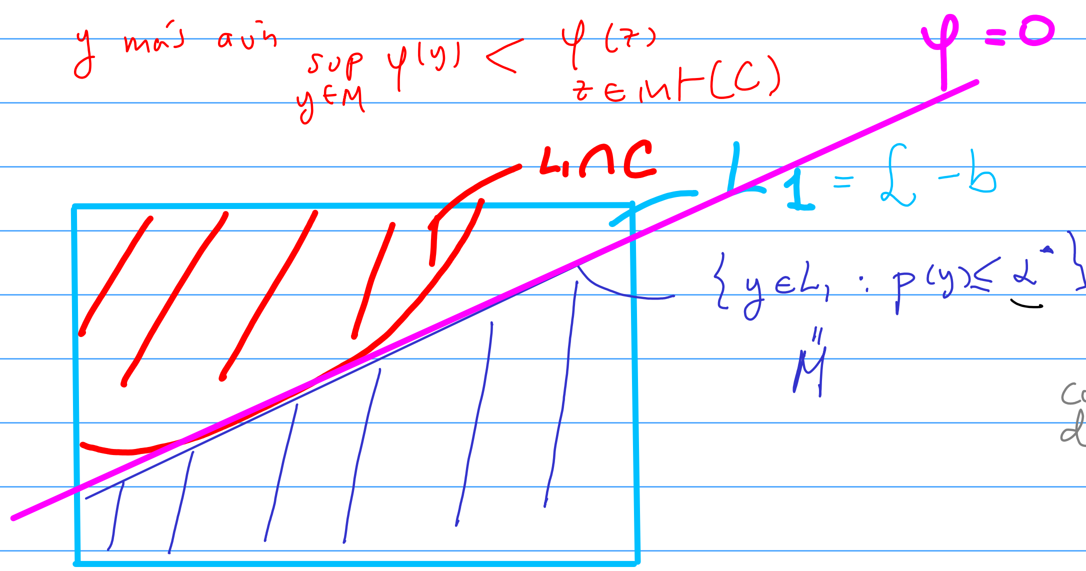
$\boxtimes$.

Por Claim. y el Teo separación de Hahn-Banach

$\exists\ \varphi \in W^*$ que los separa, es decir

(*) $\boxed{\sup_{y \in M} \varphi(y) \le \inf_{y \in C} \varphi(y)}$ $\quad$ esto es precisamente lo que el dual describe

y más aún $\sup_{y \in M} \varphi(y) < \varphi(z)$, $z \in \text{int}(C)$



condición de Slater

Por hipótesis de que $\text{int}(C) \cap (L - b) \neq \emptyset$

podemos asumir que $\varphi \not\equiv 0$ en los puntos de L_1

Cómo C es cono (*)

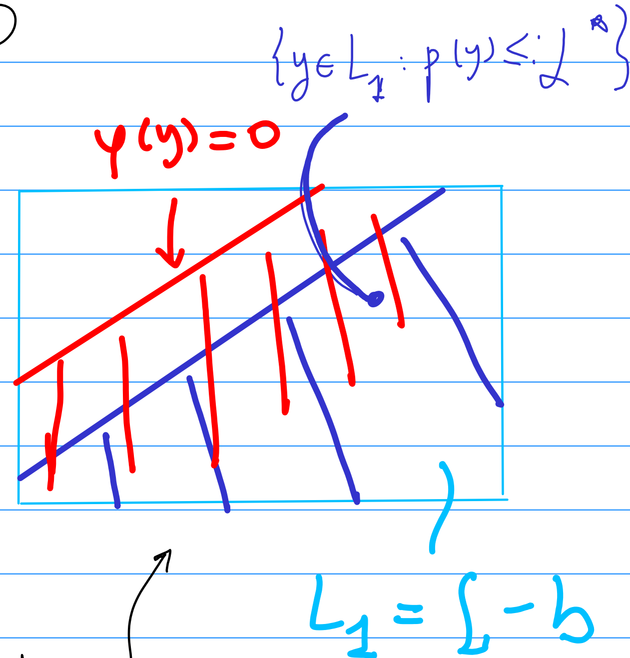
$$-\infty < \inf_{y \in C} \varphi(y) \le 0 \quad \varphi(0) = 0$$

Si $\exists\ z \in C$ $\varphi(z) < 0 \Rightarrow \varphi(tz) = t\varphi(z) \xrightarrow{t \to \infty} -\infty$

contradiciendo la desigualdad luego: $\varphi(z)\geq 0 \ \forall z\in C$ así que

(i) $\varphi \in C^*$

(ii) $\inf_{y\in C} \varphi(y) = 0$



De $(*)$ concluimos

$$\sup_{y\in M} \varphi(y) \leq 0$$

Como $L_1 = \mathcal{L} - b$ podemos traducir a uno en $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} \xrightarrow{\mathcal{T}} L_1 \qquad \mathcal{T}^{-1}(M)$$
$$y \longmapsto y-b$$

$$\{\ell\in\mathcal{L} : \ell-b\in M\} = \{\ell\in\mathcal{L} : p(\ell-b)\leq\alpha^*\}$$
$$= \{\ell\in\mathcal{L} : p(\ell)\leq\alpha^*\}$$

$$M \subseteq \{y\in L_1 : \varphi(y)\leq 0\}$$
$$\mathcal{T}^{-1}(M) \subseteq \mathcal{T}^{-1}(\{y\in L_1 : \varphi(y)\leq 0\})$$
$$\| $$
$$\{\ell\in\mathcal{L} : \varphi(\ell)\leq\varphi(b)\}$$

$y = \ell - b$

$\varphi(y)\leq 0$

$\Updownarrow$

$$\boxed{\{\ell\in\mathcal{L} : p(\ell)\leq\alpha^*\} \subseteq \{\ell\in\mathcal{L} : \hat{\varphi}(\ell)\leq\hat{\varphi}(b)\}}$$

Claim. $\ker(p)\subseteq\ker(\varphi)$

Sea $w\neq\vec{0}\in\ker(p)$, $\vec{w}\notin\ker(\varphi)$

$$p(\ell+tw)\leq\alpha^* \Rightarrow \varphi(\ell+tw)\leq\varphi(b)$$
$$\forall t \quad \varphi(\ell)+t\varphi(w)\leq\varphi(b)$$

$\boxtimes$

luego $w \in \ker(\varphi)$.

Por dimensión $\ker(p) = \ker(\varphi)$

luego $\ker(p)^{\perp} = \ker(\varphi)^{\perp}$

$\Rightarrow \varphi = \lambda p$ en L

para algún $\lambda > 0$.

$\hat{\varphi} \in C^*$

$\hat{\varphi} := \frac{\varphi}{\lambda}$, $[\hat{\varphi} = p]$ en L

que nos dice en W?

$\hat{\varphi} - p \in L^{\perp}$

$\overset{\lambda}{\varphi} \in p + L^{\perp}$