Hoy: (1) Demostración de D. Fuerte

(2) Ejemplos sobre necesidad de las hipótesis

(3) Dualidad extrínseca

W ev/$\mathbb{R}$
$C \subseteq W$ cono admisible
$\mathcal{L} \subseteq W$ subespacio vectorial
$p \in W^*$
$b \in W$

$$\alpha^* = \inf_{y \in W} \left\{ p(y) : \begin{array}{l} y \in C \\ y \in \mathcal{L} - b \end{array} \right\}$$

$p(b) = 0$

$$\beta^* = \sup_{\varphi \in W^*} \left\{ \varphi(b) : \begin{array}{l} \varphi \in C^* \\ \varphi \in \mathcal{L}^{\perp} + p \end{array} \right\} \quad (D)$$

Teorema: [Dualidad débil]: $\alpha^* \geq \beta^*$

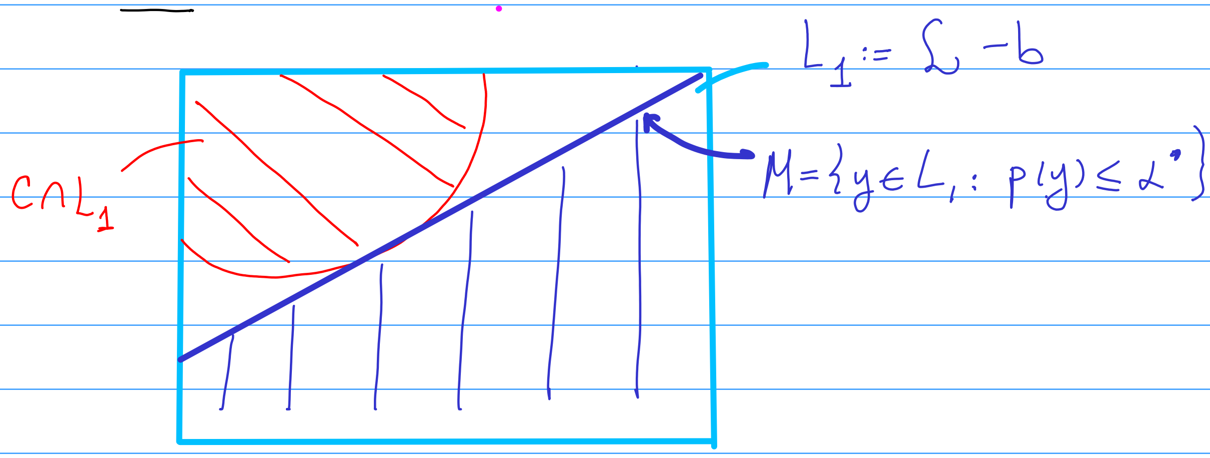
Teorema: [Dualidad fuerte] Si $\alpha^* > -\infty$ y

$\operatorname{int}(C) \cap (\mathcal{L} - b) \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ (1) $\exists\ \varphi^* \in D$ con $\varphi^*(b) = \beta^*$

(2) $\alpha^* = \beta^*$

Dem: Como $\alpha^* > -\infty$



$M \cap \operatorname{int}(C) = \emptyset$ y por Teo separación de Hahn-Banach $\exists\ \Psi \in W^*$: [Asuma $\Psi \neq 0$] porque $\operatorname{int}(C) \cap L_1 \neq \emptyset$

$$\underbrace{\sup_{y \in M} \Psi(y)}_{①} \leq \underbrace{\inf_{y \in C} \Psi(y)}_{②}$$

(2) Ejemplos:

(2.1) (P) es acotado por debajo y $\mathrm{int}(C) \cap L_1 \neq \emptyset$ pero el ínfimo en (P) no se alcanza así que alguna de las hipótesis falla en el dual.

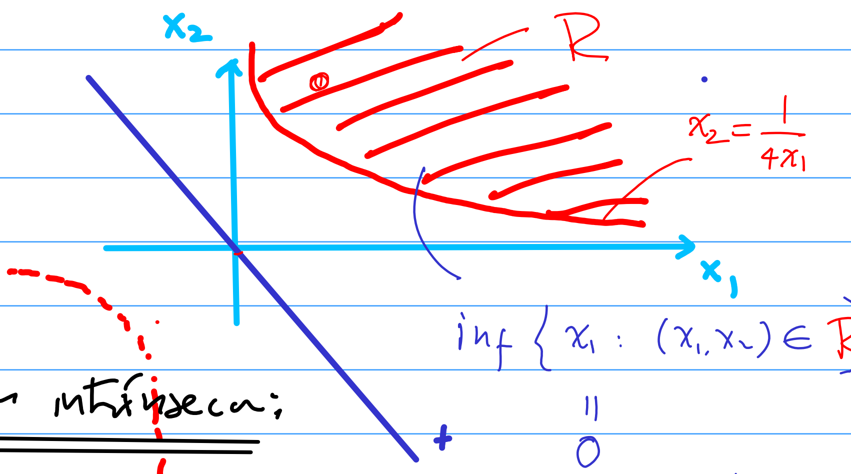
$$\alpha^* = \inf_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2} \left\{ x_1 : \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 1 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} \in \underbrace{E}_{\text{second order cone}} \subseteq \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$E = \{(x_1,x_2,x_3) : \|(x_1,x_2)\|_2 \leq x_3\}$$

Af: $\alpha^* = 0$ y no se alcanza

$$\|(x_1-x_2, 1)\| \leq x_1 + x_2 \iff \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \geq (x_1-x_2)^2 + 1^2 \end{cases}$$

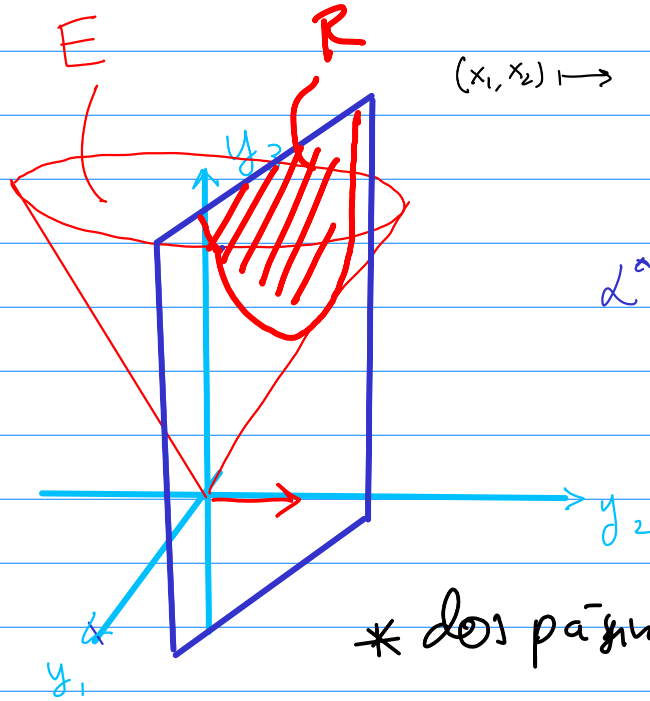
$$\iff \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 0 \\ 4x_1x_2 \geq 1 \end{cases}$$



$$\inf\{x_1 : (x_1,x_2) \in R\} = 0$$

no se alcanza!!

Construimos versión intrínseca:



$$(x_1,x_2) \longmapsto (\underset{y_1}{x_1+x_2}, \underset{y_2}{1}, \underset{y_2}{x_1-x_2})$$

$$\alpha^* = \inf\left\{ \frac{y_1+y_2}{2} : y \in E, \; y \in \underbrace{L}_{y_2=0} - (-e_2) \right\}$$

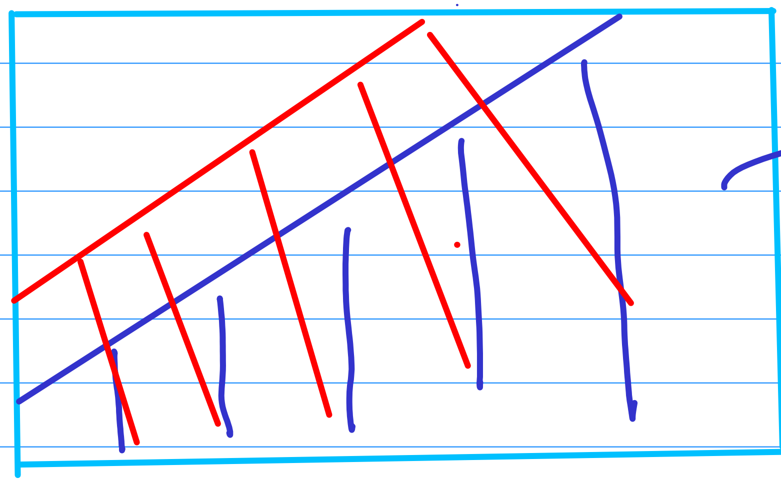
* dos páginas más adelante ...

② Como C es cono $\Psi \in C^*$ y $\inf_{y \in C} \Psi(y) = 0$

① $\sup_{y \in M} \Psi(y) \leq 0$

(II)

$$\{ \ell \in L : \Psi(\ell) \leq \Psi(b) \} \supseteq \{ \ell \in L : p(\ell) \leq \alpha^* \}$$



(II)

Así que $\Psi = \lambda p$ en L para algún $\lambda > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Defina $\varphi := \frac{\Psi}{\lambda}$. Qué propiedades tiene φ?

(1) $\varphi \in C^*$

(2) $\varphi - p = 0$ en $L \iff \varphi \in L^{\perp} + p$

(3)
$$\begin{array}{ccc} \{ \ell \in L : \varphi(\ell) \leq \varphi(b) \} & = & \{ \ell \in L : \Psi(\ell) \leq \Psi(b) \} \\ \| & & \cup\!\!\mid \\ \{ \ell \in L : p(\ell) \leq \varphi(b) \} & \supseteq & \{ \ell \in L : p(\ell) \leq \alpha^* \} \end{array}$$

$$\implies \alpha^* \leq \varphi(b) \leq \beta^* \leq \alpha^*$$

Concluimos que $\boxed{\varphi(b) = \beta^* \text{ y } \beta^* = \alpha^* .}$

* de dos páginas atrás

$$\alpha^* = \inf \left\{ \frac{y_1+y_2}{2} : \begin{array}{l} y \in E \\ y \in \underbrace{L}_{\{y_2=0\}} - \underbrace{(-e_2)}_{b} \end{array} \right\}$$

$\varphi = a_1 y_1^* + a_2 y_2^* + a_3 y_3^*$

$$\beta^* = \sup_{w^*} \left\{ -d_2 : \begin{array}{l} \varphi \in E^* \\ \varphi \in L^\perp + \frac{y_1+y_2}{2} \end{array} \right\}$$

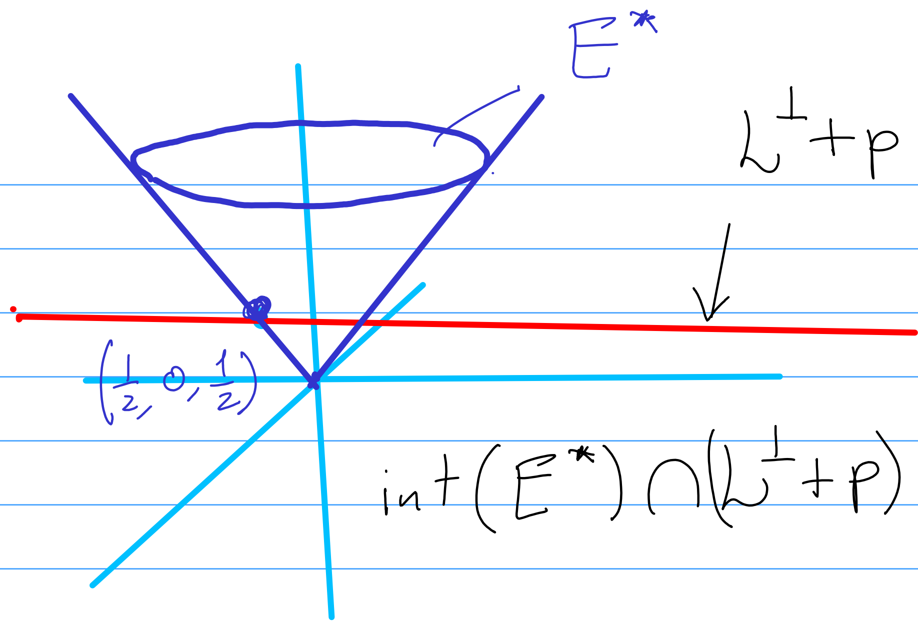
$$\varphi = a_2 y_2^* + \frac{y_1^* + y_2^*}{2}$$

$$\beta^* = \sup_{(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3} \left\{ -a_2 : \begin{array}{l} \|(a_1,a_2)\| \leq a_3 \\ (a_1,a_2,a_3) = (\frac{1}{2}, a_2, \frac{1}{2}) \end{array} \right\}$$

$$\beta^* = \sup_{a_2\in\mathbb{R}} \left\{ -a_2 : \|(\tfrac{1}{2}, a_2)\| \leq \tfrac{1}{2} \right\}$$

$$= \sup_{a_2\in\mathbb{R}} \{-a_2 : a_2 = 0\} = 0 = \alpha^*$$

por dualidad fuerte.

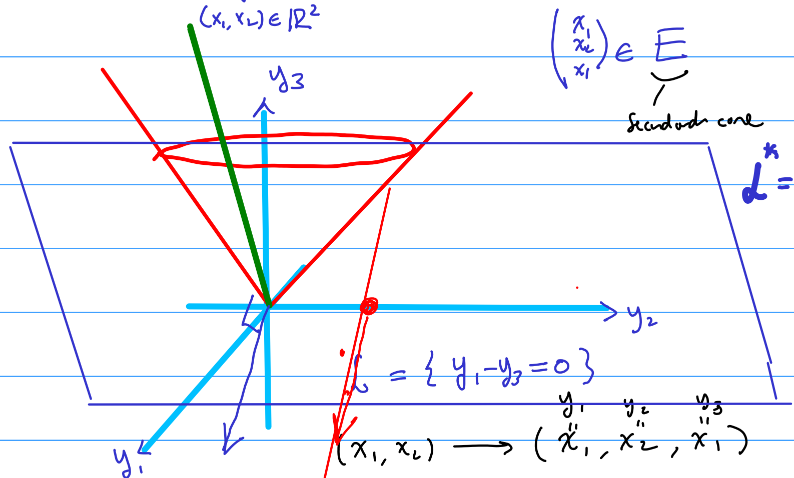


$$\operatorname{int}(E^*) \cap (L^\perp + p) = \emptyset$$

<u>Obs:</u> Sin la hipótesis de $\operatorname{int}(E^*) \cap (L^\perp + p) \neq \emptyset$ el Teorema de dualidad fuerte no es válido porque el primal no se alcanza necesariamente como en el ejemplo.

<u>Ejemplo 2:</u> (P) acotado y soluble ($\ell^* > -\infty$ y $\exists$ y con $p(y) = \ell^*$) pero $\operatorname{int}(C) \cap (L - b) = \emptyset$ y dual infactible (luego hay un duality gap ∞).

$$\ell^* = \inf_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} \{ x_2 : \|(x_1, x_2)\| \leq x_1 \}$$



$$\ell^* = \inf \left\{ y_2 : \begin{matrix} y \in E \\ y \in L \end{matrix} \right\}$$

$$\varphi = a_1 y_1^* + a_2 y_2^* + a_3 y_3^*$$

$$\beta^* = \sup_{\varphi \in W^*} \left\{ \underset{0}{\varphi(0)} : \begin{matrix} \varphi \in E^* \\ \varphi \in L^\perp + y_2^* \end{matrix} \right\}$$

$$\varphi = a\,(y_1^* - y_3^*) + y_2^* = (a, 1, -a)$$

$$\|(a,1)\| \le -a \iff -a \ge 0 \iff a \le 0$$

$$\begin{array}{c} \|(a,1)\| \\ \vee \\ |a| \end{array} \qquad \therefore \quad |a| < -a \quad \boxtimes$$

Concluimos que el dual es infactible

$$\beta^* = \sup_{\varphi \in W^*} \left\{ 0 : \begin{array}{l} \varphi \in C^\circ \\ \varphi \in L^\perp + p \end{array} \right\} = -\infty$$

sup sobre un conjunto vacío

$$0 = \alpha^* \ge \beta^* = -\infty$$