Hoy: Programación semidefinida en Julia.

Problema 1: Dada una forma cuadrática $F(x) = x^t M x$

$$\left[\min_{x\in S^{n-1}} F(x)\right] \leftarrow \text{no lineal, no convexo}$$

Forma cuadrática

Idea: $\max \; z \; : \; F(x) - z\|x\|_2^2 \geq 0$

$$x^t M x - z\, x^t I x \geq 0$$

$$x^t [M - zI] x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$x_1A_1 + \cdots + x_nA_n + A_0 \succeq 0$

$z(-I) + M \succeq 0$

$$\left[\max \; z \; : \; [M - zI \succeq 0]\right] \leftarrow \text{SDP!} \leftarrow \text{minimizar func. lineal / Espectraedro.}$$

$z^* =$ mínimo valor propio de M

$$\min_{x:\|x\|_2=1} x^t A x \overset{?}{=}$$

$$\begin{bmatrix} O^t M O \end{bmatrix} - zI \succeq 0$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z & & 0 \\ & z & \\ 0 & & z \end{pmatrix} \succeq 0$$

$$\min_{(x,y)\in \text{esfera}} \left(\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{3}{2}y^2\right) = \tfrac{1}{2}$$

$$\min_{x\in S^{n-1}} \underbrace{F(x)}_{\in R_{2k}} \rightsquigarrow \alpha = \max \; z \; : \; F(x) - z\|x\|^{2k} \in P_{2k}$$

$$\cup\!\!\mid$$

Relajación: (SOS) $\qquad \alpha \geq \beta$

$$\beta = \max \; z \; : \; \left[F(x) - z\underbrace{\|x\|^{2k}}_{(\sum x_i^2)^k}\right] \in \Sigma_{2k}$$

Si $y \in S^{n-1}$

$$[F(y) - z \geq 0]$$

de Hilbert sabemos:

$$P^n_{2d} = \Sigma^n_{2d} \iff \begin{cases} n \leq 2 & \leftarrow \text{Univariados} \\ d \leq 1 & \leftarrow \text{Formas cuadráticas} \\ (n=3,\ d=2) & \leftarrow \text{Cuárticas ternarias} \end{cases}$$

Ejemplo:

$$p(x) = x^4 - x^2 + 0.5x^3 + x - 1$$

$$\min_{x\in\mathbb{R}} p(x) \longleftrightarrow \max \; z \; : \; p(x) - z \overset{\text{en } \mathbb{R}}{\geq} 0$$

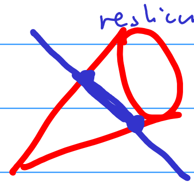
$$\left[\, p(x) - z = \left[(1\; x\; x^2) \begin{pmatrix} A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}\right]\right], \quad A \succeq 0$$

Variables $[A \text{ simétrica}, z] \in \mathbb{R}$

max z

restricciones: $\left[p(x) - z = (1 \;\; x \;\; x^2)\, A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}\right]$ ← lineales afines en las variables } SDP

$\underbrace{A \succeq 0}$



S_+

$S^2(3) \times \mathbb{R}$

$$x^4 - x^2 + 0.5x^3 + x\,(-1 - z) = (1 \;\; x \;\; x^2) \begin{pmatrix} a & b & c \\ \cdot & d & e \\ \cdot & \cdot & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{-1 - z = a}$ ← lineales afines en mis variables

Ejercicio: Demuestre que si L es un subespacio afín en $S^2(n)$ entonces $L \cap S_+$ es un espectraedro.
Demuestre que todo espectraedro puede ponerse de esa manera.

$$\vec{m}^t A \vec{m} = p(x) - z$$
$$\|C\vec{m}\|_2^2 = p(x) - z$$
$$p(x) = z + \|C\vec{m}\|_2^2$$