Hoy: Optimización polinomial y opt semidefinida (parte 3)

$R = \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$, R_j — Pol. homog. de grado j

Fije $F \in R_{2k}$.

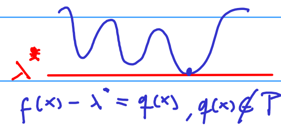
$$\boxed{\alpha = \min_{x\in S^{n-1}} F(x)}$$

Cono de polinomios no negativos

Convexo pero difícil porque no sabemos cómo decidir membresía en P_{2k}

Idea: $\alpha = \max \lambda \ : \ F(x) - \lambda \|x\|^{2k} \in P_{2k}$

Idea 2: Relajar el problema usando Σ_{2k}



$$\Sigma_{2k} = \{ q \in R_{2k} : \exists m \in \mathbb{N}\ \exists h_1,\dots,h_m \in R_k \text{ con } [q = h_1^2 + \dots + h_m^2] \}$$

$$\beta_{sos} = \max \lambda \ : \ F(x) - \lambda \|x\|^{2k} \in \Sigma_{2k}$$

Lema: (1) $\Sigma_{2k} \subseteq P_{2k}$ (y en general $\Sigma_{2k} \neq P_{2k}$)

(2) [Σ_{2k} es un conjunto SDr] ✓

(3) β_{sos} es un SDP con $\beta_{sos} \leq \alpha$

Obs: $\beta_{sos} = \alpha$ si $\Sigma_{2k} = P_{2k}$ [Hilbert].

Dem: (1) ✓ (2) Si
$$\vec{m} = \left.\begin{pmatrix} x_1^k \\ x_1^{k-1}x_2 \\ \vdots \\ x_n^k \end{pmatrix}\right\} \binom{(n-1)+k}{k}$$

$$p(x) \in \Sigma_{2k} \iff \exists\ A \in S\left(\binom{(n-1)+k}{k}\right)$$
$$A \succeq 0$$
$$[p(x) = \vec{m}^t A \vec{m}]$$

lineal afines en las entradas de A

$$S_+\left(\binom{n-1+k}{k}\right) \xrightarrow[\text{lineal afín}]{A \mapsto \vec{m}^t A \vec{m}} \Sigma_{2k}$$

(3)
$$\left[\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 1 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \underbrace{A}_{\binom{(n-1)+k}{k}} \end{pmatrix} \succeq 0 \end{array}\right] \quad B \succeq 0$$

$$\left[\left(F(x) - (\lambda_1 - \lambda_2)\|x\|^{2k} = \vec{m}^t A \vec{m}\right)\right]$$

lineal afín en mi entrada

$\max\ (\lambda_1 - \lambda_2)$

SDP.

Recuerde que un SDP es así:

$$\Big[\min \underbrace{g(B)}_{\text{lineal afín en } B} \quad \text{s.a. } B \in \big[S_+(m) \cap \underbrace{L}_{\substack{\text{subespacio lineal afín} \\ \text{en } S^2(m)}}\big]\Big]$$

(3) $B \in S_+\left(\binom{n-1+k}{k}+2\right)$

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & R \\ b_{12} & \lambda_2 & \\ & R^t & A \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{aligned} & b_{12}=0 \\ & R=0 \\ & F(x) - (\lambda_1-\lambda_2)\|x\|^{2k} = \vec{m}^t A \vec{m} \end{aligned}\right\} L$$

$B \succeq 0$ $\qquad \max\ (\lambda_1-\lambda_2)$

El contenido principal de la clase de hoy es que hay otras formas de certificar no-negatividad que nos permiten acercarnos más a P_{2k}.
Construiremos una familia $(T_{2j})_{j\in\mathbb{N}}$ de conjuntos SDr con $T_{2j} \subseteq P_{2k}$ y con

$$P_{2k}^{\circ} \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} T_{2j} \subseteq P_{2k}$$

Cada uno de ellos define un problema SDP con valor óptimo $\beta_{2j} \leq \alpha$ y $\lim_{j\to\infty} \beta_{2j} = \alpha$.

Ejercicio (a) Demuestre que $P_{2k}^{\circ} = \{F \in R_{2k} : F(x) > 0 \ \forall x \in S^{n-1}\}$
(b) Describe $\partial P_{2k} := P_{2k} \setminus (P_{2k}^{\circ})$.

Teorema [Polya] Sea $G \in R_{2k}$. Si $G \in P_{2k}^{\circ}$ entonces $\exists\, j \in \mathbb{N}$:

$$G\|x\|^{2j} \in \Sigma_{2(k+j)}.$$

Obs: Si $G\|x\|^{2j} = \sum_{r=1}^{m} h_r^2 \Rightarrow G = \frac{\sum h_r^2}{\|x\|^{2j}}$ para $\vec{x} \neq \vec{0}$

Si $\vec{u} \in S^{n-1}$ $\left[G(\vec{u}) = \frac{\sum h_r(u)^2}{\|u\|^{2j}} \right] \geq 0$ $\sum_{r=1}^{m} \left(\frac{h_r(u)}{\|x\|^j} \right)^2$

Así que expresiones como la de arriba son **CERTIFICADOS** de que $G \in P_{2k}$ y son "casi suficientes" por Teo. de Polyà.

TEOREMA: [ARTIN] $F \in P_{2k} \iff$

$\exists \frac{h_1}{g_1}, \dots, \frac{h_m}{g_m}$ $h_i, g_i \in \mathbb{R}[x_1..x_n]$ $g_i \neq 0$

$$F = \left(\frac{h_1}{g_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{h_m}{g_m}\right)^2.$$

Ejercicio: (a) Muestre que Polya $\Rightarrow$ Artin para $F \in P_{2k}^{\circ}$. (b) ARTIN $\Rightarrow$ Polya ??

Definición:

$$T_{2j} := \left\{ G \in R_{2k} : G\|x\|^{2j} \in \Sigma_{2(k+j)} \right\}$$

(0) $T_{2j} \subseteq P_{2k}$ ✓

$\boxed{\text{Lema:}}$ (1) $[T_{2j}$ es SDr$]$ * ✓

(2) $P_{2k}^{\circ} \subseteq \bigcup_{j \geq 0} T_{2j} \subseteq P_{2k}$

POLYA

(3) $\beta_{2j} := \max \lambda : F(x) - \lambda\|x\|^{2k} \in T_{2j}$

cumple:

(i) se calcula con SDP ✓

[(ii) $\lim_{j \to \infty} \beta_{2j} = \alpha$.]

Dem. (0) Si $G \in T_{2j} \Rightarrow G\|x\|^{2j} = h_1^2 + \dots + h_m^2$

$\Rightarrow G = \frac{h_1^2 + \dots + h_m^2}{\|x\|^{2j}}$ para $x \neq 0 \Rightarrow G \in P_{2k}$

$$(1)\quad \left\{ (q, B) \in \mathbb{R}_{2k} \times S\left(\binom{k+j+n-1}{k+j}\right) \;\; \boxed{q\,\|x\|^{2j} = \vec{m}^t B \vec{m}} \text{ donde } m = \begin{pmatrix} x_1^{k+j} \\ \vdots \\ x_n^{k+j} \end{pmatrix} \Big\} \binom{k+j+n-1}{k+j},\ B \succeq 0 \right\} = D_{2j}$$

restricciones lineales afines.

es un espectraedro

$$\pi_1 : \mathbb{R}_{2k} \times S(\,) \longrightarrow \mathbb{R}_{2k}$$

$$T_{2j} = \pi_1(D_{2j}) \quad \text{luego es un SDr.}$$

Solución más fácil:

$$\mathbb{R}_{2k} \xrightarrow[\text{lineal}]{\varphi} \mathbb{R}_{2(k+j)} \supseteq \overbrace{\Sigma_{2(k+j)}}^{\text{SDr}}$$

$$q \longmapsto q\,\|x\|^{2j}$$

$$T_{2j} = \varphi^{-1}\left(\Sigma_{2(k+j)}\right)$$

y por ejemplo T_{2j} es un SDr.

(3.ii) $T_{2j} \subseteq P_{2j}$ luego $\beta_{2j} \leq \alpha$

$$T_0 \subseteq T_2 \subseteq T_4 \subseteq \ldots \subseteq \quad \beta_0 \leq \beta_2 \leq \beta_4 \leq \ldots \leq \alpha$$

$$q \in T_{2j} \Rightarrow q\,\|x\|^{2j} \in \Sigma_{2(k+j)}$$

$$\ell \geq j \quad q\,\|x\|^{2\ell} = \underline{q\,\|x\|^{2j}}\,\|x\|^{2(\ell-j)}$$

$$= (h_1^2 + \cdots + h_n^2) \cdot \|x\|^{2(\ell-j)} =$$

$$= \left(h_1\|x\|^{\ell-j}\right)^2 + \cdots + \left(h_n\|x\|^{\ell-j}\right)^2$$

$$\bar{\beta} = \lim_{j\to\infty} \beta_{2j} \quad , \quad \bar{\beta} \leq \underline{\alpha} \leftarrow \min_{u \in S^{n-1}} F(u)$$

Sea $\varepsilon > 0$ dado, $F(x) - (\alpha - \varepsilon)\|x\|^{2k}$

$$\left(F(x) - \alpha \|x\|^{2k}\right) + \varepsilon \|x\|^{2k} \in P^{\circ}_{2k} \Rightarrow$$

Polya

$$\exists\, j : \quad F(x) - \underline{(\alpha-\varepsilon)}\, \|x\|^{2k} \in T_{2j}$$

$$\beta_{2j} = \max \lambda : \quad F(x) - \lambda \|x\|^{2k} \in T_{2j}$$

$$\beta_{2j} \geq \alpha - \varepsilon \underset{j\to\infty}{\Rightarrow} \bar{\beta} \geq \alpha - \varepsilon$$

$$\Rightarrow \bar{\beta} = \alpha \quad \checkmark$$

(**) Ejercicio: Implemente en Julia un programa que dado un polinomio $P(x,y,z) \in R_{2k}$ calcule β_{2j} para $j = 0, 1, 2, \ldots$.