De la clase anterior...

- Tenemos N activos con retornos (aleatorios) $r_1, \dots, r_N$
- Tenemos un portafolio $(x_1, \dots, x_N)$

$$x_i \geq 0 \qquad \sum_{i=1}^{N} x_i = K$$

con retorno $\quad x_1 r_1 + \dots + x_N r_N$

Markowitz

(1) Retorno medio del portafolio

$$\mathbb{E}[\langle \vec{x}, \vec{r} \rangle] = x_1 \overline{r_1} + \dots + x_n \overline{r_n}$$

(2) Riesgo

$$\left[f(x_1, \dots x_n) = \mathbb{E}\left[\left(x_1 (r_1 - \overline{r_1}) + \dots + x_N (r_n - \overline{r_n}) \right)^2 \right] \right]$$

$$= \vec{x}^t V \vec{x} \quad \text{con} \quad V_{ij} := \mathbb{E}\left[(r_i - \overline{r_i})(r_j - \overline{r_j}) \right]$$

V_{ij} es simétrica

$$V \succcurlyeq 0, \quad \vec{x}^t V \vec{x} = \mathbb{E}\left[(\langle x, r \rangle)^2 \right] \geq 0$$

Ejercicio: Demuestre que $f(\vec{x}) := \vec{x}^t V \vec{x}$ es convexa ssi $V \succcurlyeq 0$.

$$f\left(\tfrac{1}{2} \vec{\imath} + \tfrac{1}{2} \vec{p} \right) \leq \tfrac{1}{2} f(\vec{\imath}) + \tfrac{1}{2} f(\vec{p})$$

Portafolio óptimo: "mínimo riesgo, garantizando un retorno medio $\geq y$"

$$\min \ \vec{x}^t V \vec{x} \ : \quad \sum x_i = K, \quad x_i \geq 0, \quad \sum x_i \overline{r_i} \geq y$$

es un SOCP.

Como $V \succeq 0$ V admite una factorización de Cholesky

$$V = C^t C, \quad C \in \mathbb{R}^{k \times n}$$

$$x^t V x = x^t C^t C x = (Cx)^t (Cx) = \|Cx\|_2^2$$

$$\min \underbrace{\|Cx\|_2}_{\text{CONVEXA}} \quad \text{s.a.} \quad \sum x_i = K$$
$$x_i \geq 0$$
$$\sum x_i \bar{r}_i \geq \mu$$

Pasamos la función objetivo a las restricciones ...

$$\min_{\substack{(x_1, \dots, x_N, \alpha) \\ \cap \\ \mathbb{R}^{N+1}}} \alpha \quad \text{s.a.} \quad \left.\begin{aligned} &\sum x_i = K \\ &x_i \geq 0 \\ &\sum x_i \bar{r}_i \geq \mu \\ &\|Cx\|_2 \leq \alpha \end{aligned}\right\} \text{SOCP} \checkmark$$

Ejercicio 1: Sean $F_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n}$ $g_i \in \mathbb{R}^n$ $i = 1..M$

Demuestre que los siguientes problemas son de segundo orden. P. convexo de 2º orden.

(1) $$\min_{x \in P} \sum_{i=1}^{M} \|F_i x + g_i\|_2$$

(2) $$\min_{x \in P} \left[\max_{i=1,..,M} \|F_i x + g_i\|_2 \right]$$

Ejercicio 2: [Harmonic means on a polytope]

(a) Demuestre que

$$\left\{ (x, y, w) : \begin{array}{l} w^2 \leq xy \\ x, y \geq 0 \end{array} \right\} = \left\{ (x, y, w) : \left\| \begin{pmatrix} 2w \\ x - y \end{pmatrix} \right\| \leq x + y \right\}$$

(b) $$\min_{\vec{x}} \left(\sum \frac{1}{a_i^t x + b_i} \right) ; \left[c_j^t x + d_j \geq 0 \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, M \\ j = 1, \dots, L \end{array} \right]$$

$a_i \in \mathbb{R}^n$ $b_i \in \mathbb{R}$
$c_j \in \mathbb{R}^n$ $d_j \in \mathbb{R}$

es SOCP.

Ejercicio 3 [QCQP convexo]

$$\min \quad x^t P_0 x + 2q_0^t x + r_0$$

$$\text{s.a.} \quad x^t P_i x + 2q_i^t x + r_i \leq 0 \qquad i=1,\dots,n$$

Dados $P_j \succ 0$ equivalente a SOCP.