Teoría de dualidad:

V — Espacio vectorial $/\mathbb{R}$

$\|\cdot\|: V \longrightarrow \mathbb{R}$ una norma (convexa, pos homogénea $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$, pos definida)

$\mathrm{Hom}(V,\mathbb{R}) = \{\varphi : V \to \mathbb{R} \text{ lineales}\}$

La $\|\cdot\|$ nos determina un subconjunto $V^* \subseteq \mathrm{Hom}(V,\mathbb{R})$

$V^* = \{\varphi : V \to \mathbb{R} \text{ lineales y CONTINUAS}\}$

Ejercicio: Si $\varphi \in \mathrm{Hom}(V,\mathbb{R})$ definimos

$$\boxed{\|\varphi\|_* = \sup_{x:\|x\|\le 1} \varphi(x)} \in [0,\infty]$$

(a) $\|\varphi\|_* < \infty \iff \varphi \in V^*$

(b) $\dim(V) < \infty \iff V^* = \mathrm{Hom}(V,\mathbb{R})$

(c) Sea $V = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$ = { sucesiones con finitos términos no nulos } $= \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} : a_i \neq 0 \text{ para finitos } i\}$

$\|(a_i)_{i\in\mathbb{N}}\|_\infty := \max |a_i|$

$L : V \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad L((a_i)_{i\in\mathbb{N}}) = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i$

muestre que $L \in \mathrm{Hom}(V,\mathbb{R}) \setminus V^*$.

(d) En (c) $\|(a_i)_{i\in\mathbb{N}}\|_1 := \sum_{i\in\mathbb{N}} |a_i|$, muestre que $L \in V^*$

Concluya que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ No son equiv en V de (c)

Notación $\varphi(x) := \langle \varphi, x\rangle$

Teorema: $\forall x \in V$

$$\left[\, \|x\| = \sup_{\varphi : \|\varphi\|_* \le 1} \varphi(x) \,\right]$$

Consecuencias:

(1) Si $B = \{v \in V : \|v\| \le 1\}$,

$$B = \bigcap_{\varphi : \|\varphi\|_* \le 1} \underbrace{\{v \in V : \langle \varphi, v\rangle \le 1\}}_{\text{semiespacio}}$$

Intersección de semiespacios.

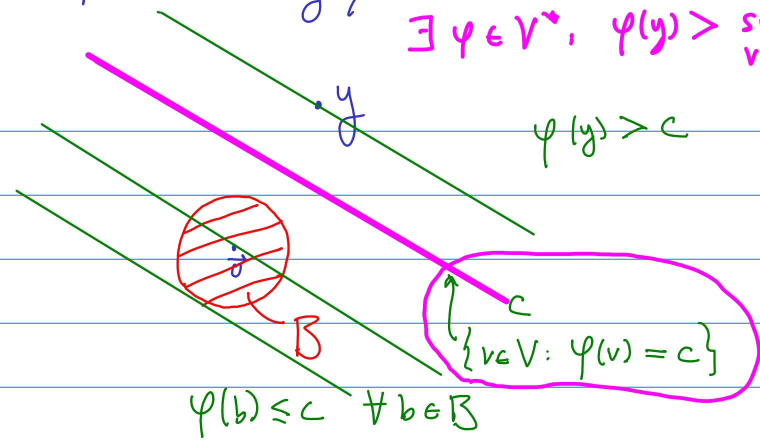
Ideas:

¿Todo convexo B es int de semiespacio?

(Separación) Si $y \notin B$ $\exists$ hiperplano separador

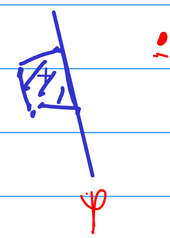
$\exists \varphi \in V^*$, $\varphi(y) > \sup_{v \in B} \langle \varphi, v \rangle$

(2)



Idea:

¿Si B es convexo y cerrado y $y \notin B$ podemos separarlos con un hiperplano?



!

Dem: $y \notin B \iff \|y\| = e > 1$

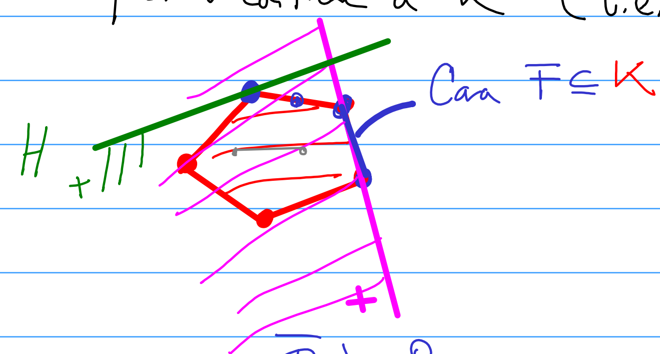
$\|y\| = \sup_{\varphi : \|\varphi\|_* \leq 1} \langle \varphi, y \rangle \Rightarrow \exists\ \varphi : \|\varphi\|_* \leq 1$

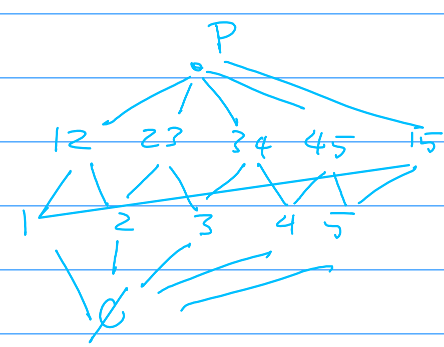
$\langle \varphi, y \rangle = c$ con $e > c > 1$

$\forall v \in B \left(\langle \varphi, v \rangle \leq \|\varphi\|_* \leq 1 \right)$

Ejercicio: Dé un ejemplo de un conjunto cerrado C y $z \notin C$ que no pueda separarse mediante un hiperplano

(3) Def: Sea K un conjunto convexo. Una cara de K es un conjunto de la forma $K \cap H$ donde H es un hiperplano cuyo semiespacio positivo contiene a K (i.e. $K \subseteq \overline{H_+}$)





Si $x \in \partial B = \overline{B} \setminus B^\circ$ entonces x pertenece a alguna cara propia de B (en dim finita!)

en dimensión finita $\{\varphi : \|\varphi\|_* \leq 1\}$ es compacto

Dem: Si $\|x\| = 1 = \sup_{\varphi : \|\varphi\|_* \leq 1} \langle \varphi, x \rangle = \max_{\varphi : \|\varphi\|_* \leq 1} \langle \varphi, x \rangle$

$\exists\ \tilde{\varphi} : \|\tilde{\varphi}\|_* \leq 1$ y $\langle \tilde{\varphi}, x \rangle = 1$.

$\|\tilde{\varphi}\|_* \leq 1 \Rightarrow \quad \forall v \in B \quad \langle \tilde{\varphi}, v\rangle \leq \|\tilde{\varphi}\|_* \leq 1$

$\left[\{v : \langle \tilde{\varphi}, v\rangle \leq 1\} \supseteq B\right]$

y $\langle \tilde{\varphi}, x\rangle = 1$, definamos

$F = \{v \in B : \langle \tilde{\varphi}, v\rangle = 1\}$

F es una cara de B, $F \ni x$.

Ejercicio: Verifique que $F \subsetneq B$.

(4) Existe un objeto "dual" a B.

$B^* = \{f \in V^* : \underbrace{\|f\|_* \leq 1}\}$

$\|f\|_* = \sup_{v \in B} \langle f, v\rangle \leq 1$

$\iff \langle f, v\rangle \leq 1 \quad \forall v \in B$

Idea:

¿Si B es convexo y cuando $B \ni \vec{0}$

B^*??

$$\left[B^* = \{f \in V^* : \langle f, v\rangle \leq 1, \forall v \in B\}\right]$$

Obs: $(B^*)^* = B$ (en dim $< \infty$)

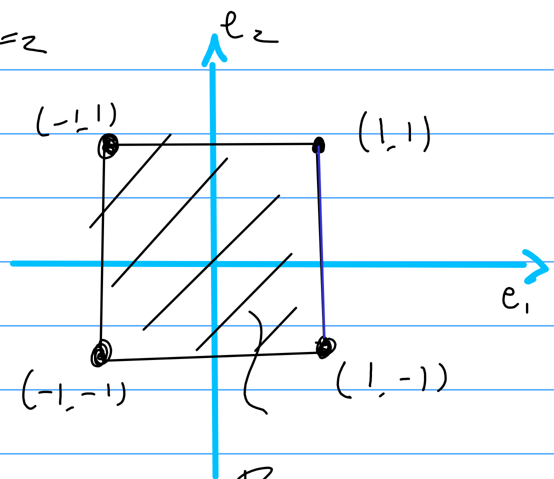
$(B^*)^* = \{x \in V : \langle f, x\rangle \leq 1, \forall f \in B^*\} = B$

$\|x\| = \sup_{f : \|f\|_* \leq 1} \langle f, x\rangle \leq 1$

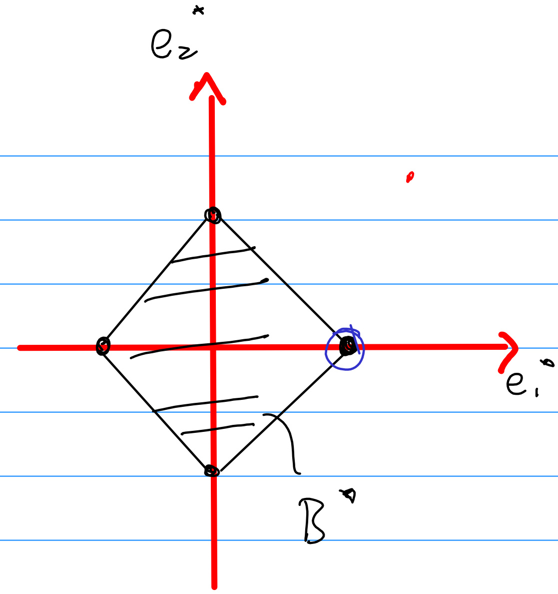
Ejemplo: $\|x\|_1$ y $\|x\|_\infty$ en $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{B} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\|_\infty \le 1 \}$

$d=2$

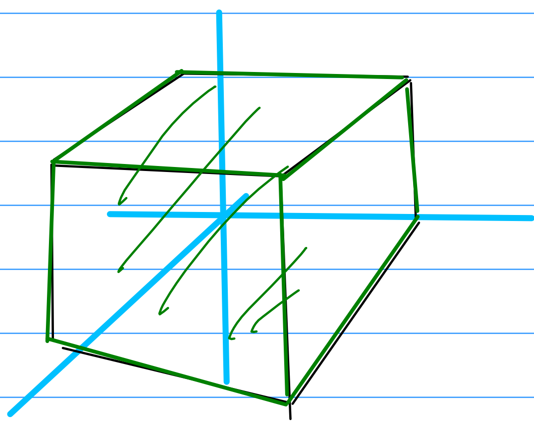


$\mathcal{B}$



$$\left\{ (f_1,f_2) : \begin{array}{l} f_1 x_1 + f_2 x_2 \le 1 \\ \forall\, x_1, x_2 \in \mathcal{B} \end{array} \right\}$$

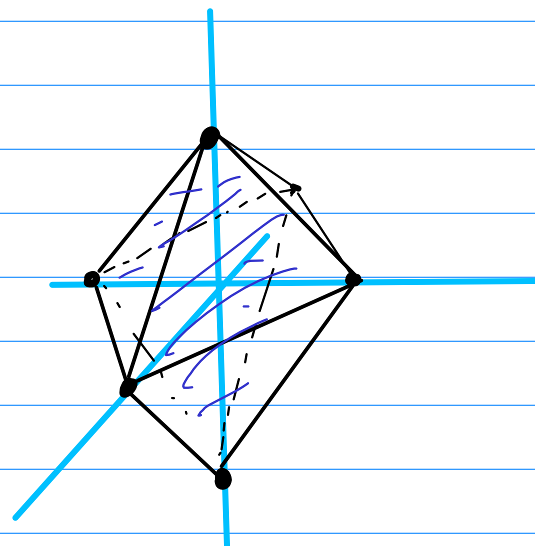
$$\begin{array}{l} f_1 + f_2 \le 1 \\ f_1 - f_2 \le 1 \\ -f_1 + f_2 \le 1 \\ -f_1 - f_2 \le 1 \end{array} \iff |f_1| + |f_2| \le 1$$



$\max(|x_1|, |x_2|, |x_3|) \le 1$

$\|\vec{x}\|_\infty \le 1$

$\mathcal{B}$



$|f_1| + |f_2| + |f_3| \le 1$

$\|f\|_1 \le 1$

$\mathcal{B}^*$

Ejercicio: Encuentre una correspondencia entre las caras de $\mathcal{B}_{\|\cdot\|_\infty}$ y las de $\mathcal{B}_{\|\cdot\|_1}$