Clase anterior: $V$ – e.v. $/\mathbb{R}$, $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ norma

$V^* = \{ f: V \to \mathbb{R} \text{ lineales continuas} \}$

$\left[ \|f\|_* = \sup_{v: \|v\| \leq 1} \langle f, v \rangle \right]$ norma dual es una norma

$\left[ \|x\| = \max_{f: \|f\|_* \leq 1} \langle f, x \rangle \right]$

$$\boxed{\textbf{Teorema: } \forall x \in V \quad \left( \|x\| = \sup_{\substack{f \in V^* \\ \|f\|_* \leq 1}} \langle f, x \rangle \right) \quad \geq}$$

Consecuencias sobre $B := \{ x : \|x\| \leq 1 \}$ (ver clase pasada)

$B^* = \{ f \in V^* : \langle f, x \rangle \leq 1 \} = \{ f \in V^* : \|f\|_* \leq 1 \}$

**Dem del Teorema** Si $f \in V^*$ satisface

$\|f\|_* \leq 1 \Rightarrow \forall v : \|v\| \leq 1 \quad \langle f, v \rangle \leq 1$

Dado $x \in V$ no nulo

mult por $\|x\|$

$\langle f, \frac{x}{\|x\|} \rangle \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \langle f, x \rangle \leq \|x\|$

Probaremos que existe $\tilde{f} \in V^* : \|\tilde{f}\|_* \leq 1$

donde la igualdad se alcanza $\langle \tilde{f}, x \rangle = \|x\|$.

Usaremos ...

**Teorema** [Extensión de Hahn-Banach]

Sea $V$ un ev $/\mathbb{R}$ normado. Sea $M \subseteq V$

$f: M \to \mathbb{R}$ lineal acotada en $M$

(i.e. $\|f\|_* = \sup_{\substack{m \in M \\ \|m\| \leq 1}} \langle f, m \rangle < \infty$). Entonces

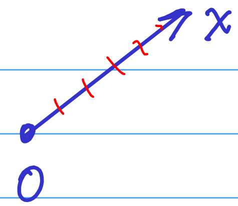
existe $F: V \to \mathbb{R}$ lineal que

satisface:

(1) $\|F\|_* = \|f\|_*$

(2) $F(m) = f(m) \quad \forall m \in M$ [F es una extensión de f]

Construiremos $\tilde{f}$ usando Hahn-Banach...




En $M = \langle x \rangle$

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\lambda \vec{x} \longmapsto \lambda \|x\|$$

nota que $f$ es lineal

$$\|f\|_* = \sup_{\{\lambda \vec{x} \,:\, \|\lambda \vec{x}\| \leq 1\}} f(\lambda \vec{x}) = \sup_{\lambda \vec{x} \,:\, \|\lambda \vec{x}\| \leq 1} (\lambda \|\vec{x}\|) = 1$$

$\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \|x\| \leq 1$

$\Longleftrightarrow |\lambda| \leq \frac{1}{\|\vec{x}\|}$

Por Hahn-Banach existe $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumple:

(1) $\|F\|_* = \|f\|_* = 1$ ✓ $(F \in V^*)$

(2) $\forall m \in M \quad F(m) = f(m)$,

$$F(\vec{x}) = f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|$$

$$\tilde{f} := F \quad ✓$$

Luenbergen

## Dem del Teo de Hahn-Banach.

Extensión + Lema de Zorn.

Sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal y acotada $\|f\|_* < \infty$

Tome $y \notin M$ y queremos extender $f$ a $\langle M, y \rangle$ de manera que la norma se mantenga igual

$g : \langle M, y \rangle \to \mathbb{R}$

$x \in \langle M, y \rangle \qquad x = m + \alpha y$

$$g(x) = g(m) + g(\alpha y) = f(m) + \alpha \boxed{g(y)}$$

Cómo es coger $g(y)$?

Si $m_1, m_2 \in M$ $\qquad \|m_1+y+m_2-y\|$

$$f(m_1)+f(m_2) = f(m_1+m_2) \leq \|f\|_* \|m_1+m_2\|$$
$$\leq \|f\|_* \left(\|m_1-y\| + \|m_2+y\|\right)$$

$$\underbrace{f(m_1) - \|f\|_* \|m_1-y\|}_{m_1} \leq \underbrace{\|f\|_* \|m_2+y\| - f(m_2)}_{m_2}$$

$\exists c \in \mathbb{R}$

$$\sup_{m_1 \in M}\left[ f(m_1) - \|f\|_* \|m_1-y\| \right] \leq \left[ c \leq \inf_{m_2 \in M} \left( \|f\|_* \|m_2+y\| - f(m_2) \right) \right]$$

Define $\begin{cases} x = m + \alpha y \\ g(x) = f(m) + \alpha c \end{cases}$

$\alpha > 0$

$$\underbrace{x = m + \alpha y}_{g(x)} = \alpha\left(\frac{m}{\alpha} + y\right)$$

def $g$

$$g\left(\alpha\left(\frac{m}{\alpha}+y\right)\right) = \alpha\, g\left(\frac{m}{\alpha}+y\right) = \alpha\left[f\left(\frac{m}{\alpha}\right) + c\right]$$

$$\leq \alpha\left[\|f\|_* \left\|\frac{m}{\alpha}+y\right\| - \cancel{f\left(\frac{m}{\alpha}\right)} + \cancel{f\left(\frac{m}{\alpha}\right)}\right]$$

$m_2 := \frac{m}{\alpha}$

$$\leq \|f\|_* \|x\|$$

**Ejercicio:** Complete la demostración de EXTENSIÓN para $\alpha < 0$.

**Ejercicio:** **Def:** Una **quasi-seminorma** es una función $p: V \to \mathbb{R}$ que satisface:

(1) $p$ es convexa

(2) $p$ es positivamente homogénea ( $p(\alpha \vec{x}) = \alpha\, p(\vec{x})$ $\forall \alpha \geq 0$ )

Demuestre la siguiente generalización del Teo de Hahn-Banach.

$V$ ev/ $\mathbb{R}$

$p$ es q-seminorma en $V$ continua

## Teorema [Hahn-Banach]

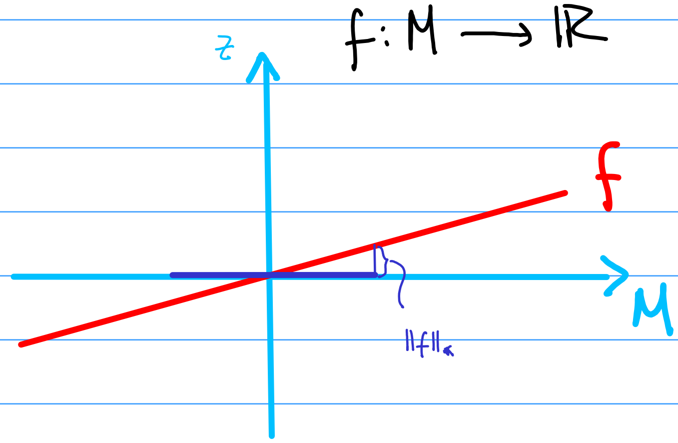
Sea $M \subseteq V$ y $f: M \to \mathbb{R}$ una funcn. lineal continua con $f(m) \leq p(m)$ $\forall m \in M$

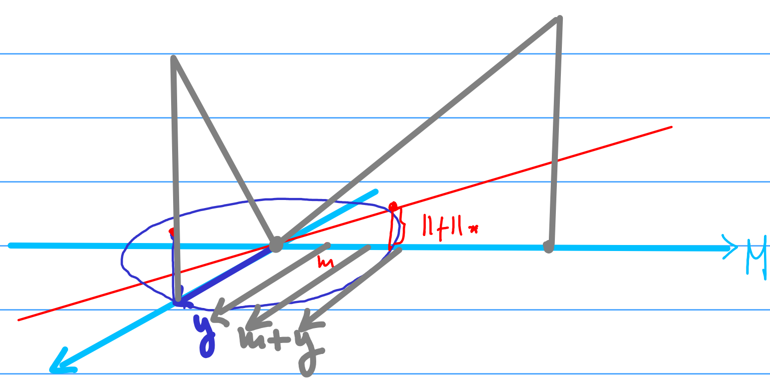
$\exists F: V \to \mathbb{R}$ lineal continua que extiende a $F$ y satisface $F(x) \leq p(x)$ $\forall x \in V$.

**Ejemplo:** $V = \mathbb{R}^2$

$M = \mathbb{R} = sp(e_1)$

$f: M \to \mathbb{R}$




$c \leq [\|f\|_* \|m+y\| - f(m)$

$f(m) \leq \|f\|_* \|m+y\| - c$

$f(m) + c \leq \|f\|_* \|m+y\|$

$g(m+\alpha y) \leq \underbrace{\|g\|}_{*} \|m+\alpha y\|$

$$g(m+\alpha y) = f(m) + \alpha c \leq \|f\|_* \|m+\alpha y\|$$

$\alpha > 0$

$$c \leq \frac{\|f\|_* \|m+\alpha y\| - f(m)}{\alpha}$$

$$\leq \left[\|f\|_* \left\|\frac{m}{\alpha} + y\right\| - f\left(\frac{m}{\alpha}\right)\right]$$