Hoy: Optimización robusta.

(1) Caso Lineal. Queremos resolver el problema

$$\left[\min\ c^t x \quad \text{s.a.} \quad Ax - b \geq 0\right]$$ Comp. a comp. (poliedro)

La dificultad está en que no estamos exáctamente seguros de los parámetros (c, A, b).

Asumimos que $(c, A, b) \in \mathcal{U}$ Conjunto de incertidumbre DADO.

La versión robusta del problema de arriba propone "minimizar el máximo costo entre los x que satisfacen TODAS las restricciones (A, b)".

Esto quiere decir:

(1) Puntos factibles F del problema robusto

$$\{x : Ax \geq b \quad \forall (A,b) : \exists\, c \text{ con } (c,A,b) \in \mathcal{U}\}$$

Asumimos que las restricciones son DE OBLIGATORIO cumplimiento.

(2) La función objetivo es

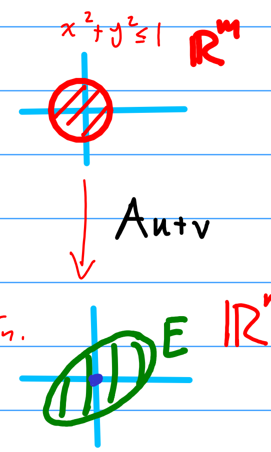
$$f(x) = \max \{c^t x : c : \exists\ A,b \text{ con } (c,A,b) \in \mathcal{U}\}$$

$$\min_{x \in F_{\mathcal{U}}} f_{\mathcal{U}}(x) \text{ — Problema robusto}$$

Caso 1: $\mathcal{U} = \{(c, A, b)$ que pertenecen a Elipsoides independientes dados$\}$

Teorema: (1) Para este $\mathcal{U}$ el problema lineal robustificado es un SOCP.

(2) Para este $\mathcal{U}$ un SOCP robustificado es un SDP.



Elipsoides: Def. Un elipsoide $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto de la forma

$$E = \{y \in \mathbb{R}^n : \exists\ u \in \mathbb{R}^m,\ \|u\|_2 \leq 1,\ y = v_0 + Au\}$$

para $v_0 \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Imagen de una bola unitaria bajo transf. lineal afín.

Def: E es full-dimensional si: $v_0 + A(D)$ con A invertible

Ejercicio: (1) Demuestre que si A es invertible $\exists\ U$ ortogonal : AU es Positiva definida.

(Todo elipsoide full-dim es de la forma $v + P(B)$ donde $P \succ 0$)

(2) Demuestre que todo elipsoide full-dimensional está dado por una desigualdad cuadrática $x^t Q x \leq 1$, $Q \succ 0$.

(3) PCA? Principal Component Analysis.

Problema original

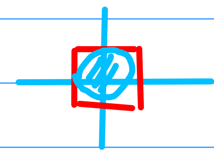
$$\min \; c^t x \quad \text{s.a.} \quad a_i^t x \geq b_i \quad i=1,\dots,m$$

Problema robusto:

Dado, $\underbrace{c^* \in \mathbb{R}^n, \; a_i^* \in \mathbb{R}^n, \; b_i^* \in \mathbb{R}}$ $\quad P_0, P_1, \dots, P_m$ $\quad E_0, E_1, \dots, E_m$

$\exists \; u_0, u_1, \dots, u_m$, $\|u_j\|_2 \leq 1$ $\qquad \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})^m \supseteq$

$$\mathcal{U} = \left\{ (c, (a_1,b_1), (a_2,b_2) \dots) \;\middle|\; \begin{array}{l} c = c^* + P_0 u_0 \\ \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i^* \\ b_i^* \end{pmatrix} + P_i u_i \end{array} \right\} = E_0 \times \dots \times E_m$$



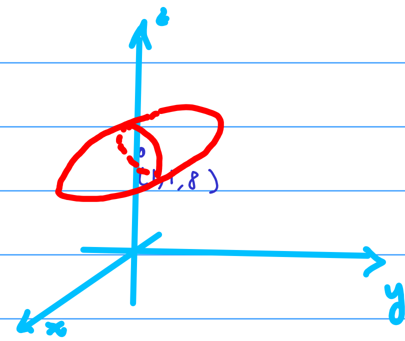
Ej: $x + y \geq 8$

$a_1^* = (1,1)$

$b_1^* = 8$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0.02 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0.02 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



ROBUSTO:

$$\overset{\alpha}{\overset{\|}{\min}} \; \alpha \quad \text{s.a.} \quad \left[\begin{array}{l} c^t x \leq \alpha \\ a_i^t x - b_i \geq 0 \end{array} \right] \quad (a_i, b_i)$$

$$\forall \; (c, (a_1,b_1), \dots, (a_m,b_m)) \in \mathcal{U}$$

$$a_i^t x - b_i \geq 0 \quad \forall \; (c, A, b) \in \mathcal{U} \iff$$

$$\boxed{\min_{(c,A,b) \in \mathcal{U}} \left[(a_i^t x - b_i) \right] \geq 0}$$

Calculemos este mínimo

$$u \cdot w = \|u\| \|w\| \cos(\theta_{uw}) \qquad \min_{u : \|u\|_2 \leq 1} u \cdot w = -\|w\|_2$$

$$\|u_i\|' \leq 1$$

$$\left[(a_i^t \;\; b_i) \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \right] = \left[(a_i^{*t} \;\; b_i^*) + (P_i u_i)^t \right] \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix}$$

norma dual de $\|\cdot\|'$

$$- \left\| P_i^t \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_*$$

$$\min_{u_i : \|u_i\|_2 \leq 1} \left[(a_i^{*t} \;\; b_i^*) \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} + u_i^t P_i^t \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$(a_i^* \;\; b_i^*) \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} + \min_{u_i : \|u_i\|_2 \leq 1} \left\langle u_i, P_i^t \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = (a_i^* \;\; b_i^*) \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} - \left\| P_i^t \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_2 \geq 0$$

$$a_i^{*t} x - b_i^* - \left\| P_i^t \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_2 \geq 0$$

$$\left\| P_i^t \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_2 \leq a_i^{*t} x - b_i^* \Big] \leftarrow \text{SOCP}$$

Ejercicio: Sea V un e.v. normado $\|\cdot\|$

define $\|\cdot\|_* : V \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\|v\|_* = \sup_{x : \|x\| \leq 1} \langle v, x \rangle$$

ⓐ Demuestre que $\|\cdot\|_*$ es una norma en V

ⓑ Demuestre que $(\|\cdot\|_*)_* = \|\cdot\|$.

ⓒ Verifique que en $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_\infty := \max_{i=1..n} |x_i| , \quad \|\cdot\|_* = \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

ⓓ En $\mathbb{R}^n$

$$\|x\|_p = \left(\sum |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$(\|x\|_p)_* = \|x\|_q \quad \text{con} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

$$c_i^t x \leq \alpha \quad , \quad 0 \leq \alpha - c_i^t x \quad \forall c$$

$$\alpha - (c^* + P_0 u_0)^t x = \alpha - c^{*t} x - u_0^t P_0^t x$$

$$\min_{u_0 : \|u_0\|_2 \leq 1} \left[\alpha - c^{*t} x - u_0^t P_0^t x \right] = \alpha - c^{*t} x - \|P_0^t x\|_2 \geq 0$$

ROBUSTO es un SOCP así:

$$\min \alpha \quad : \quad \left. \begin{aligned} &\|P_0^t x\|_2 \leq -c^{*t} x + \alpha \\ &\left\| P_i^t \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_2 \leq a_i^{*t} x - b_i^* \end{aligned} \right] \quad i = 1, .., m$$