Hoy: Optimización Semidefinida

Def: $P \subseteq \mathbb{R}^n$ es un espectraedro si existen matrices simétricas $A_0, A_1, \ldots, A_n \in S^2(m)$ [matrices simétricas $m \times m$] tales que

$$P = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n + A_0 \succeq 0\}$$

equivalentemente

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow[\text{afín}]{f} S^2(m)$$

$$P = f^{-1}(S_+)$$

$S_+ = \{A \in S^2(m) : A \succeq 0\}$ (semidef. pos. (PSD))

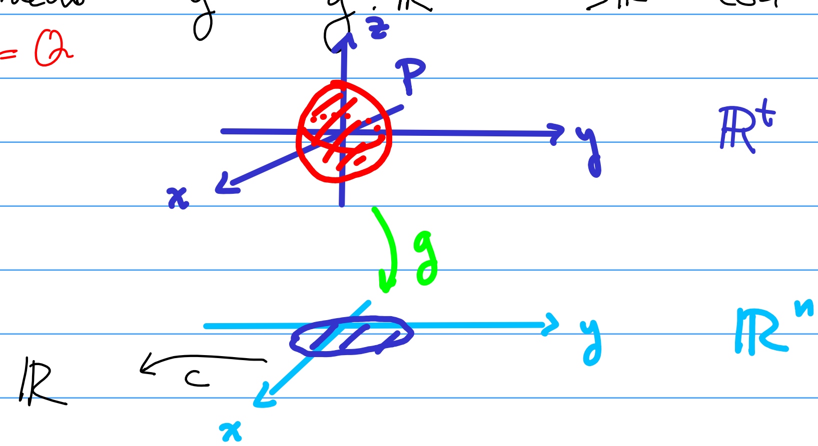
Def: Un problema de optimización semidefinida es uno de la forma

$$\left[\min_{c: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ afín}} c(x) : x \in P\right]$$

espectraedro

algoritmos muy eficientes.

Def: $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ es SDr (Semidefinitely representable) ó spectrahedral shadow si $\exists$ $t \in \mathbb{N}$, $P \subseteq \mathbb{R}^t$ P espectraedro y $g: \mathbb{R}^t \xrightarrow{\text{afín}} \mathbb{R}^n$ con $g(P) = Q$



Sabemos que $\{\text{espectraedros}\} \subsetneq \{\text{SDR-sets}\}$

no obstante optimizar sobre un SDR set también es optimización semidefinida, porque si $c: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es afín

$$\min\{c(y) : y \in Q\} = \min\{\overbrace{c(g(z))}^{\text{afín}} : z \in P\}$$

$(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_k) \in \mathbb{R}^{n+k}$ $\quad P$

$\downarrow \pi_n$

$\mathbb{R}^n$ $\quad Q = \pi_n(P)$ "spectrahedral shadows"

Ejercicio: Demuestre que todo conjunto SDr $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ se puede escribir así para algún $k \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$

$$Q = \Big\{ (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n : \exists\, y_1 \dots y_k ;\ \underbrace{A_1,\dots,A_n, B_1,\dots,B_k, A_0}_{\in S^+(q)}\ \big[x_1A_1+\dots+x_nA_n+y_1B_1+\dots+y_kB_k+A_0 \succeq 0\big] \Big\}$$

Ejercicio: Sea $\psi : \mathbb{R}^a \xrightarrow[\text{afín}]{} \mathbb{R}^b$ y

(a) $Q \subseteq \mathbb{R}^b$ un conjunto SDr. Demuestre que $\psi^{-1}(Q)$ es SDr.

(b) $Q \subseteq \mathbb{R}^a$ es SDr $\Rightarrow$ $\psi(Q)$ es SDr.

Optimización polinomial:

$R = \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$

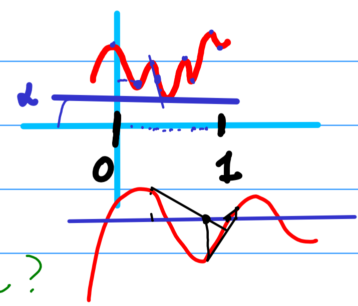
$R_j = \{F \in R$ homogéneos de grado $j\}$ $\quad \big(\text{i.e. } F(\lambda x) = \lambda^j F(x)\ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n\big)$

$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$

Dado $F \in R_{2k}$ queremos encontrar

$$\alpha = \min_{x \in S^{n-1}} F(x)$$

opt global, no convexo



Ejercicio: ¿Qué hacer si F es de grado impar?

Idea: convexo

$$\max\ \lambda \qquad (\lambda, g(x)) \in \mathbb{R} \times R_{2k}$$

$g(x) \in P_{2k}$ ← no-negatividad

$F(x) - \lambda \|x\|^{2d} = g(x)$ ← afines

Ejemplo: en $\mathbb{R}^2$

$$F(x) = x^2 - xy + y^2$$

$[Ax^2 + Bxy + Cy^2]$

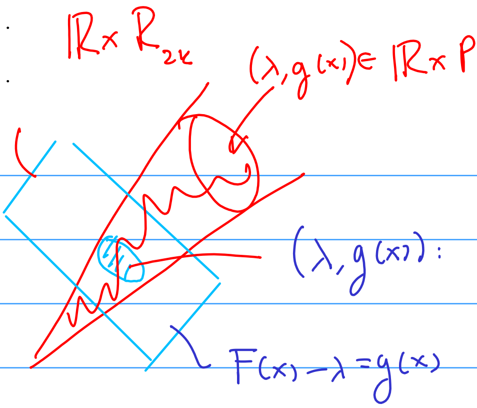
$$\min_{x \in S^{n-1}} F(x) \iff \max\ \lambda \qquad (\lambda, g(x)) \in \mathbb{R} \times R_2$$

$$F(x) - \lambda \|x\|^2 = g(x)$$

$$\forall x,y\ \big[x^2 - xy + y^2 - \lambda(x^2+y^2) = Ax^2 + Bxy + Cy^2\big]$$

$$\begin{cases} 1-\lambda = A \\ -1 = B \\ 1-\lambda = C \end{cases}$$

afines (A, B, C, λ)



¿Cómo coacción no-negatividad?

$g(x) \in R_{2k}$ habrá desigualdades que coacción $g(x) \in P_{2k}$?

$g(x) = \sum_{\alpha : |\alpha| = 2k} c_\alpha x^\alpha \leftarrow (c_\alpha)_{\alpha : |\alpha|=2k}$

Sí, existen pero NADIE las conoce salvo en casos muy especiales.

$$\begin{cases} A \geq 0 \\ C \geq 0 \\ AC - \frac{B^2}{4} \geq 0 \end{cases}$$

$\forall x, y$

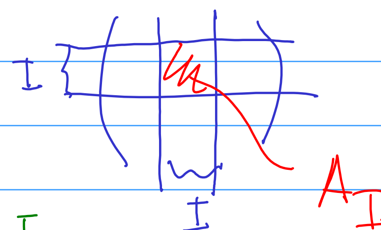
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 \geq 0 \iff \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} \succeq 0$$

*__Ejercicio:__ Demuestre que $A \in S^+(m)$ es PSD ssi para todo $I \subseteq [m]$

$$\det(A_I) \geq 0.$$

tomar filas y columnas indexadas por I

[2^m desigualdades polinomiales.]



Concluimos que, si $F(x)$ es cuadrático podemos minimizarlo sobre la esfera S^{n-1} mediante optimización semidefinida así:

$$\min_{x \in S} F(x) = \max \lambda \quad \begin{bmatrix} (\lambda, g(x)) \\ F(x) - \lambda \|x\|^2 = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{bmatrix} \quad g(x) \in R_2$$

$F(x) = x^t F x$ (simétrica) $\qquad g(x) = x^t G x$

$$F(x) - \lambda\|x\|^2 = g(x) \iff x^t F x - \lambda[x^t I x] = x^t G x$$

$$F - \lambda I = G \qquad g(x) \geq 0 \iff G \succeq 0$$

espectrado

$$\left[\max_{(\lambda, G)} \lambda : \begin{bmatrix} F - \lambda I = G \\ G \succeq 0 \end{bmatrix}\right]$$ — opt semidefinida.

$$\begin{bmatrix} \lambda \xmapsto[\text{afín}]{\varphi} F - \lambda I \in S^{+}(n) \\ \max \lambda , \quad \lambda \in \varphi^{-1}(S_+) \end{bmatrix}$$

¿Cómo cuantificar no regularidad en $\mathbb{R}_{2k}$?
y el rol que juegan los conjuntos SDn acá.