$n \in \mathbb{N}$

$R = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$

$F \in R_{2k}$

$$\alpha = \min_{x \in S^{n-1}} F(x)$$

$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$

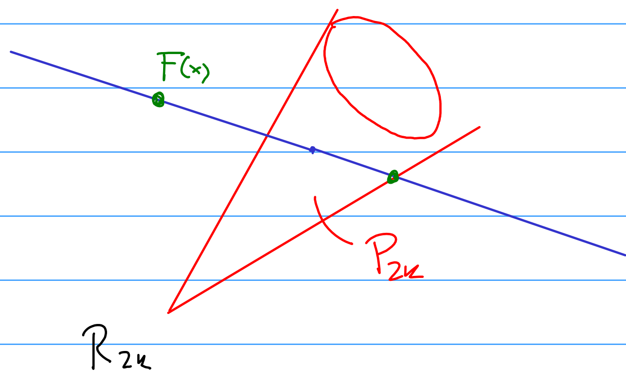
$$\begin{array}{rcl} R & \xrightarrow[\text{afín}]{\varphi} & R_{2k} \\ \lambda & \longmapsto & F(x) - \lambda \|x\|^{2k} \end{array}$$

$\{g \in R_{2k} : g(\alpha) \geq 0 \ \forall \alpha \in S^{n-1}\}$

$$\alpha = \left[\max \ \lambda : \varphi(\lambda) \in P_{2k}\right]$$

problema convexo.

$\left[F(x) - \lambda \|x\|^{2k} \geq 0\right]$ en S^{n-1} ~~en~~ $\mathbb{R}^n$.



Cómo describir P_{2k}? (de manera que podamos optimizar ℓ afín sobre $L \cap P_{2k}$)

subespacio afín

Caso especial sencillo $\underline{k=1}$ $\quad F(x) \in R_{2\cdot 1} = R_2$

$= x^t F x, \quad F \in S^2(n)$

$$\left[\alpha = \min_{x \in S^{n-1}} x^t F x\right]$$

simétrica

sol. $\alpha = \underbrace{\max \ \lambda \quad \text{s.a.} \quad F - \lambda I_n \succeq 0}_{\text{optimización semidefinida}}$

$\{\lambda : \underset{A_0}{F} + \lambda \underset{A_1}{(-I)} \succeq 0\}$ espectraedro

$\max \ \lambda$

Qué hacer si $k > 1$? Idea 1: "Relajar" el problema

$\max \ \lambda : F(x) - \lambda \|x\|^{2k} \in P_{2k}$ queremos reemplazar

P_{2k} por otro cono sobre el cual podamos optimizar.

(1.1) Considere $\Sigma_{2k} = \{ g \in R_{2k} : \exists\, m \in \mathbb{N},\ h_1,..,h_m \in R_k$ con $g = h_1^2 + \cdots + h_m^2 \}$

Lema: (1) $\Sigma_{2k} \subseteq P_{2k}$

(**)(2) Σ_{2k} es un conjunto SDr.

El lema es útil porque:

si $\beta := \max \lambda : F(x) - \lambda \|x\|^{2k} \in \Sigma_{2k}$

entonces $\beta \leq \alpha$ y calcular β es un problema semidefinido ✓ (porque Σ_W es SDr).

Dem del Lema: $g \in \Sigma_{2k} \Rightarrow g = h_1^2 + \cdots + h_m^2 \Rightarrow$

$\forall\, y \in \mathbb{R}^n \quad g(y) = h_1(y)^2 + \cdots + h_m(y)^2 \geq 0$ Shor

[P. Parrilo 2000, J.B. Lasserre 2001]

Lema: Sea $W \subseteq R$, un subespacio vectorial

$$\Sigma_W = \{ g \in R : \exists\, m \in \mathbb{N}\ h_1,..,h_m \in W \text{ con } g = h_1^2 + \cdots + h_m^2 \}$$

simétrica $\in \mathbb{R}^{\dim(W)\times\dim(W)}$ Chequear SOS es

$$g \in \Sigma_W \iff \exists\, A \in S^2(W),\ A \succeq 0$$

tal que $[g(x) = \vec{m}^t(x)\, A\, \vec{m}(x)]$ donde

$$\vec{m}(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_N(x) \end{pmatrix}$$ y $(b_1(x),..,b_N(x))$ es una base para W.

$W \subseteq R_k \quad W = \mathrm{span}\{b_1(x),..,b_N(x)\}$ base.

Ejercicio: (a) Demuestre que, Fije $g(x) \in R_{2k}$,

$$\{ A \in S^+(N) : A \succeq 0,\ \vec{m}^t(x)\, A\, \vec{m}(x) = g(x) \}$$

es un espectraedro. [Espectraedro de gram de $g(x)$]

(b) ¿Qué relación hay entre los espectraedros de gram de $g(x)$ para distintas bases?

Dem: Si $[g(x) = \vec{m}^t(x)\, A\, \vec{m}(x)]$ con $A \succeq 0$

entonces, como A admite una desc de Cholesky

tenemos $A = C^t C$ luego

$$g(x) = \vec{m}^t(x) C^t C m(x) = (C m(x))^t (C m(x)) = \|C\vec{m}(x)\|_2^2$$

$$\left\| \begin{bmatrix} - c_1 - \\ \vdots \\ - c_r - \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_N(x) \end{bmatrix}}^{\vec{m}(x)} \right\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} c_{11}\, b_1(x) + \cdots + c_{1N}\, b_N(x) \\ \vdots \\ c_{r1}\, b_1(x) + \cdots + c_{rN}\, b_N(x) \end{pmatrix} \right\|_2^2$$

$$= \left[(\underbrace{\quad}_{W})^2 + (\quad)^2 + \cdots + (\quad)^2 \in \Sigma_W \right]$$

Recíprocamente, $g \in \Sigma_W$ $\quad g = h_1^2 + \cdots + h_m^2$

$$h_i = \sum_j c_{ij}\, b_j \rightarrow g = \| C \vec{m}(x) \|_2^2$$

$$= \vec{m}^t \underbrace{(C^t C)}_{A} \vec{m}(x)$$

$$A \succeq 0 .$$

Consecuencia: $\Sigma_W \subseteq R_{2k}$ es un conjunto SDR

$$S^2(N) \xrightarrow[\varphi]{\text{lineal}} R_{2k}$$

$$A \longmapsto \vec{m}_{(x)}^t A\, \vec{m}(x)$$

$\Sigma_W = \varphi(S_+)$ luego Σ_W es SDR.

En general sabemos que $\beta \leq \alpha$. La igualdad ocurre a veces, gracias al

$$P^n_{2d} = \{F \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]_{2d} : F(y) \geq 0 \ \forall y\}$$

$$\cup\!\!\shortmid$$

$$\Sigma^n_{2d}$$

Teorema: (Hilbert 1886)

$$\Sigma_{n,2d} = P_{n,2d} \iff$$

(1) $n \leq 2$ (Univariado) ó

(2) $d \leq 1$ (Formas cuadráticas) ó

(3) $d = 2$, $n = 3$ (Cuárticas ternarias)

Ejercicio: (a) $p(z) \in \mathbb{R}[z]$ no necesariamente homogéneo

$p(z) \geq 0 \ \forall z \in \mathbb{R} \iff \exists\, h_1, \dots, h_j \in \mathbb{R}[z]$ con $p = h_1^2 + \cdots + h_j^2$. (Hint: piensen en $\mathbb{C}$)

(b) $\underset{x \in \mathbb{R}}{\text{minimize}} \quad x^8 + 6x^5 - 4x^3 + x^2 - 11$