Definiciones básicas: $(GL(V))$

Sea V un espacio vectorial (sobre $\mathbb{C}$, de dimensión finita)

$$GL(V) = \{ T : V \longrightarrow V \text{ transformaciones lineales invertibles} \}, \circ$$

composición.

Obs Si fijamos una base $\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n$ de V, podemos asociar a cada transformación lineal $T: V \longrightarrow V$ una matriz que la representa en la base $B = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$

$M = [T]_B$

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{matrix} \\
\begin{matrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} | & | & & | \\ T(\vec{v}_1)_B & T(\vec{v}_2)_B & \cdots & T(\vec{v}_n)_B \\ | & | & & | \end{bmatrix}
\end{array}$$

$$T(\vec{v}_i) = \sum_{a=1}^{n} M_{ai} \vec{v}_i$$

La escogencia de una base nos determina un isomorfismo de grupos.

$$GL(V) \xrightarrow{\varphi} \underbrace{GL_n = \{ M \in \mathbb{C}^{n \times n} : \det(M) \neq 0 \}}$$

más familiar, tiene una (o mas) topologías conocidas. Es un grupo algebraico y también un grupo de Lie

Def: [Representación de grupo]

Sea V un espacio vectorial y sea G un grupo finito.
Una representación de G en V es un homomorfismo de grupos

$$\rho : G \longrightarrow GL(V).$$

Una representación es:
(1) un espacio vectorial V, con base B y
(2) una colección de matrices $[\rho(s)]_B$, $s \in G$ que respetan las ecuaciones del grupo.

$\boxed{\text{Obs:}}$ Si escogemos una base B para V entonces podemos asociar a cada elemento $g \in G$ la matriz $[\rho(g)]_B$. Las matrices ~~bien~~ respetan la estructura de G pues se satisface

$$\left([\rho(st)]_B = [\rho(s)]_B [\rho(t)]_B\right) \quad \forall s, t \in G$$

note que $\rho(e) = I$ y que $\rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1}$.

Def: [Morfismos de representaciones de un grupo G].

Suponga que (V, ρ_V) y (W, ρ_W) son representaciones del mismo grupo G. Una transformación lineal $\psi : V \longrightarrow W$ es un morfismo de representaciones si:

$\cancel{\forall v \in V}$ $\forall g \in G$:

$$\left[\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\rho_V(g)"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & W \arrow[d, "\rho_W(g)"] \\ V \arrow[r, "\psi"] & W \end{tikzcd}\right]$$

Obs: Qué significa que (V, ρ_V) y (W, ρ_W) sean representaciones isomorfas?

$$\forall g \in G \left[\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\rho_V(g)"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & W \arrow[d, "\rho_W(g)"] \\ V \arrow[r, "T"'] & W \end{tikzcd} \quad , \ T \text{ invertible} \right]$$

$$\forall g \in G \left[\rho_W(g) \circ T = T \circ \rho_V(g) \right], \quad \text{si } T \text{ es invertible}$$

$$\boxed{\rho_W(g) = T \circ \rho_V(g) \circ T^{-1}}$$

Las matrices de W se obtienen a partir de las de V mediante un cambio de base. La única diferencia entre las reps es la escogencia de una base.

Ejemplos: El grado de una representación de G en V es $\dim(V)$.

1. Cómo es una representación de grado 1 de G?

Tome $V = \mathbb{C}$, $GL(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ así que

$\rho : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$ es un homomorfismo de grupos.

Como $|G| < \infty$ todo elemento de G tiene orden finito

$$g^{e_g} = 1 \Rightarrow \rho(g^{e_g}) = \rho(1) = 1 = \rho(g)^{e_g}$$

$\Rightarrow |\rho(g)| = 1$ y $\rho(g)$ tiene que caer en el círculo unitario.

Ej: $\rho(g) = 1$, $\forall g \in G$ [Representación trivial]

2. Suponga que $|G| = m$. Sea $V = \langle e_g : g \in G \rangle$, V es un ev de dim m. Dado $s \in G$ defina $\rho(s) : V \longrightarrow V$ como el mapa lineal que en la base dada satisface $\rho(s)(e_t) = e_{s \cdot t}$ producto del grupo

Af: ρ es una rep de G de grado $|G|$, llamada la representación regular.

Dem: Por construcción $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ es una función bien def.

Para ver que es un homomorfismo basta chequear que $\rho(st) = \rho(s)\rho(t)$. Para este fin comparamos los valores de ambos lados en vectores de la forma e_g

$$\rho(st)(e_g) \underset{\text{def}}{=} e_{st(g)} \underset{G \text{ grupo}}{=} e_{s(tg)} = \rho(s)(e_{tg}) = \rho(s) \circ \rho(t)(e_g). \checkmark$$

Más generalmente si G actúa sobre un conjunto finito X podemos construir un espacio vectorial V con una G-representación que describa la acción en X, así:

$$V = \langle e_x : x \in X \rangle$$

Para $g \in G$ defina $\rho(g) : V \longrightarrow V$ como la transformación lineal que cumple

$$\rho(g)(e_x) = e_{\boxed{g \circ x}}$$

Acción de G en X

(V, ρ) se llama la <u>representación de permutación de X</u>.

Ejemplo: Sea C_n el grupo cíclico de orden n, es decir $C_n = \{g, g^2, \dots, g^{n-1}, g^n = e\}$. Cómo son todas las representaciones de $G = C_n$ de grado 1?

Solución: Sea $V = \mathbb{C}$ y sea $\rho : C_n \longrightarrow GL(V) = \mathbb{C}^*$ un homomorfismo de grupo. Entonces

(i) $\rho(g^k) = \rho(g)^k$

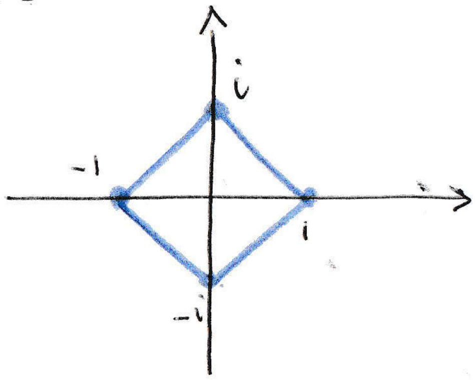
(ii) $\rho(g^n) = \rho(1) = 1$ luego $\rho(g)^n = 1$, $\rho(g) \in \mathbb{C}^*$, $|\rho(g)| = 1$

Así que, si $\rho(g) = e^{i\theta}$ entonces $\rho(g)^n = e^{i\theta n} = e^0 \Rightarrow i\theta n = i2k\pi$

$\Rightarrow \theta = \frac{2\pi k}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Así que C_n tiene n reps distintas de grado 1.

Caso especial: $n = 4$, podemos ponerlas todas en una tabla

	ε	g	g^2	g^3
trivial $\rightarrow$ $\rho^{(0)}$	1	1	1	1
$\rho^{(1)}$	1	i	-1	$-i$
$\rho^{(2)}$	1	-1	1	-1
$\rho^{(3)}$	1	$-i$	-1	i



Ejemplo: Una representación de grado 2 de C_4:

$V = \mathbb{C}^2$, $\rho : C_4 \longrightarrow GL(V)$. Fijo base $\mathcal{B} = \langle e_1, e_2 \rangle$

$$\rho(g) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \quad \rho(g^k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}^k, \quad \text{note } \rho(g^4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \rho(e)$$

$$\rho(g) := \rho^{(0)} \oplus \rho^{(1)} \qquad (*)$$ ~ pag. 8

la matiz esta por bloques

Ejemplo: S_n actúa sobre $[n] := \{1, 2, .., n\}$

$f \in S_n$ $i \longmapsto f(i)$. La representación por permutaciones correspondiente se llama "defining representation". Vamos a construir las matrices cuando $n = 3$.

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad V = \{e_1, e_2, e_3\}$$

$\rho(s)(e_1) = e_2$

$\rho(s)(e_2) = e_3$

$\rho(s)(e_3) = e_1$

$$\rho(s) = \begin{array}{c|ccc} & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & 1 \\ e_2 & 1 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Obs:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}\begin{bmatrix} 1 & i \\ -1 & +i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+i & -1+i \\ -1+i & 1+i \end{bmatrix}$$

$$T \circ \rho_V(g) \circ T^{-1} = \rho_W(g)$$

Definimos:

$$\boxed{\begin{array}{l} W = \mathbb{C}^2 \text{ con base } \{e_1, e_2\} \text{ y definamos} \\ \rho_W(g) = \begin{bmatrix} 1+i & -1+i \\ -1+i & 1+i \end{bmatrix} \end{array}}$$

$V = \mathbb{C}^2$ con base $\{u_1, u_2\}$ y

$$\rho_V(g) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\rho_V(g)"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & W \arrow[d, "\rho_W(g)"] \\ V \arrow[r, "T"'] & W \end{tikzcd}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

es un isomorfismo entre (V, ρ_V) y (W, ρ_W).

Dado W no es nada obvio cómo diagonalizar las matrices simultáneamente (o al menos cómo simplificarlas).
La teoría de reps **nos dice** como.

Ejercicio 1:

(a) Demuestre que la definición usual de acción de G en X es equivalente a un hom de grupos $h: G \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Aut}(X)}$

biyecciones de X en X con composición.

(b) Demuestre que la ~~acción~~ representación de permutación de un G-conjunto X es una representación de G.

Ejercicio 2:

(a) Sea $G = C_n$ y construya la tabla de caracteres (representaciones de grado 1 de G)

$$M := \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{array}{c} \\ \rho^{0} \rightarrow \\ \vdots \\ \\ \rho^{(n-1)} \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \varepsilon & g & g^{2} & \cdots & g^{n-1} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{array} \right] \end{array}$$

de $n \times n$

Demuestre que M es una matriz unitaria. (i.e. $\cancel{M^{*}M}$ $MM^{*} = I$)

es decir que las filas son ortonormales.

(b) Demuestre que $\rho^{(i)} \neq \rho^{(j)}$ para $i \neq j$.