Ejercicios - Teoría de representaciones

¡Los estudiantes más cheveres!

2020-20

1. Convenciones

- **(FH)** Fulton, William y Harris, Joe: Representation Theory, A First course. Graduate Texts in Mathematics,1991.

2. Ejercicios

Semana 1

1. Sea $W = \mathbb{C}^2$ y considere la base ordenada canónica $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Sea $\rho : \mathrm{C}_4 \to \mathrm{GL}(W)$ el homomorfismo dado por

$$\rho(g) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+i & -1+i \\ -1+i & 1+i \end{bmatrix}$$

   a) Verifique que esta es una representación.

   b) Encuentre una base tal que $W = \rho^{(i)} \oplus \rho^{(j)}$.

2. Fije un entero positivo n y sea $\mathcal{G} = \mathrm{C}_n$. Demuestre que la siguiente matriz es unitaria:

$$M = \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{bmatrix} \text{Representaciones} \\ \text{para } \mathcal{G} \text{ de} \\ \text{grado 1.} \end{bmatrix}$$

   Es decir, muestre que $M^*M = I$.

3. Considere la acción de S_3 en $V = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$ dada por $\rho(\sigma)(\vec{e}_i) = \vec{e}_{\sigma(i)}$. Demuestre que $\Lambda = \{(a, b, c) : a + b + c = 0\}$ es una representación irreducible.

4. Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita y $T : V \to V$ un operador lineal. Demuestre que:

   a) T es diagonalizable si y solamente si su polinomio minimal es producto de factores lineales distintos.

   b) Si T tiene orden finito, entonces T es diagonalizable.

   c) Suponga que $S : V \to V$ es otro operador lineal, entonces se tiene que T y S conmutan si y solamente si S y T son simultáneamente diagonalizables.

   d) ¿Qué implica esto sobre las representaciones de grupos abelianos finitos?

Semana 2

1. Sea $\mathcal{G}$ un grupo finito y considere el espacio vectorial $V = \langle \{e_g : g \in \mathcal{G}\} \rangle$.

   a) Verifique que $\rho : \mathcal{G} \to \mathrm{GL}(V)$ dada por $\rho(h)(e_g) = e_{hg}$ para cualesquiera $h, g \in \mathcal{G}$ es un homomorfismo de grupos. (Recuerde: A esta representación (V, ρ) se la conoce como la representación regular de $\mathcal{G}$.)

b) Calcule $\mathrm{tr}(\rho(h))$ para todo $h \in \mathcal{G}$, donde ρ es como en la representación regular de $\mathcal{G}$.

c) ¿Verdadero o Falso? Las matrices $[\rho(h)]_B$ (donde $B = \{e_g : g \in \mathcal{G}\}$) son simétricas.

2. Sea $\mathcal{G}$ un grupo finito y considere $\mathcal{F} := \mathrm{Fun}(\mathcal{G}, \mathbb{C}) = \{f : \mathcal{G} \to \mathbb{C} |\, f \text{ es función}\}$. Defina la acción contragradiente de $\mathcal{G}$ sobre $\mathcal{F}$ como el mapa $\rho^* : \mathcal{G} \to \mathrm{GL}(\mathcal{F})$ tal que, si $h \in \mathcal{G}$, entonces $\rho^*(h) : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ es el mapa tal que $\rho^*(h)(f)(z) = f(h^{-1}z)$. Demuestre que $(\mathcal{F}, \rho^*)$ es una representación y explique por qué se multiplica a izquierda por h^{-1} y en lugar de h.

3. Sea $\mathcal{G}$ un grupo y sea X un conjunto finito. Suponga que $\mathfrak{J} : \mathcal{G} \to \mathrm{Aut}(X)$ (recuerde que $\mathrm{Aut}(X) = \{b : X \to X |\, b \text{ es una biyección}\}$) es un homomorfismo de grupos. Demuestre que esto es equivalente a la definición usual de un grupo actuando en un conjunto con un mapa de la forma $\mathcal{G} \times X \to X$.

4. Suponga que $\mathcal{G}$ actúa sobre X mediante la acción $\mathfrak{J} : \mathcal{G} \to \mathrm{Aut}(X)$ y considere las siguientes definiciones:

   - La representación de permutaciones definida por la acción $\mathfrak{J}$ de $\mathcal{G}$ sobre X se construye así: $W = \langle\{e_x : x \in X\}\rangle$ y $\rho : \mathcal{G} \to \mathrm{GL}(W)$ dado por $\rho(h)(e_x) = e_{\mathfrak{J}(h)(x)}$.
   - Sea $\mathcal{H} = \{f : X \to \mathbb{C}\}$ dotado de la acción contra-gradiente $\rho^* : \mathcal{G} \to \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ dada por $\rho^*(h)(f)(z) = f(\mathfrak{J}(h^{-1})(z))$ para todos $h \in \mathcal{G}$, $f \in \mathfrak{H}$ y $z \in X$.

   a) Demuestre que (W, ρ) y $(\mathcal{H}, \rho^*)$ son representaciones.

   b) Demuestre que estas representaciones son isomorfas.

   c) Dada (W, ρ) reconstruya la acción de $\mathcal{G}$ sobre X.

5. Sea $X_n = \{\text{ciclos no dirigidos entre n elementos}\}$ y considere la acción $S_n \to X$ dada por $\sigma(a_1 \, \ldots \, a_n) = (\sigma(a_1) \, \ldots \, \sigma(a_n))$. Calcule $\mathrm{tr}(\rho(\sigma))$ para cada $\sigma \in S_n$ para (W, ρ) correspondiente a esta acción, para $n = 4, 5, 6$.

6. Sea (V, ρ) una representación de $\mathcal{G}$ y sean B, B^* bases de V y V^*, respectivamente. Muestre que para $h \in \mathcal{G}$ si $[\rho(h)]_B = A$, entonces
$$[\rho^*(h)]_B^* = (A^t)^{-1}.$$

7. Suponga que $[\rho(h)]_B$ es unitaria para todo $h \in \mathcal{G}$. Demuestre que $\mathrm{tr}\,(\rho^*(h)) = \overline{\mathrm{tr}\,(\rho(h))}$ para todo $h \in \mathcal{G}$.

8. a) Muestre que $(V \oplus W)^* \cong V^* \oplus W^*$ en la categoría de representaciones.

   b) Sea $\rho : C_n \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^m)$ una representación cualquiera, calcule ρ^*.

9. a) Encuentre ecuaciones que caracterizan los vectores descomponibles de $V \oplus W$, donde $\dim(V) = n$ y $\dim(W) = m$.

   b) Cuál es el mínimo número de tensores descomponibles necesario, para expresar todo elemento de $V \oplus W$.

10. Si (λ_1, g_1) y (λ_2, g_2) son productos tensoriales entonces hay un isomorfismo canónico entre ellos.

    <u>Hint:</u>

    a) Pruebe que si $\varphi = id$ es el único mapa tal que el diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "g_i"'] & \Lambda \\ \Lambda \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

    b) Utilizar la propiedad universal para obtener los mapas φ_1 y φ_2 y concluir por *a)* que $\varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_2 \circ \varphi_1 = id$.

$$
\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "g_1"'] & \Lambda_2 \arrow[dl, bend left, "\varphi_1"] \\
\Lambda_1 \arrow[ur, "\varphi_2"] &
\end{tikzcd}
$$

Semana 3

1. Sea V^* el espacio dual de V y considere el mapa $V \times V^* \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}$ tal que $\psi(\varphi, v) = \langle \varphi, v \rangle = \varphi(v)$. Demuestre:

   a) Si $(V^*, \rho^*), (V, \rho)$ son representaciones, entonces $\forall g \in \mathcal{G}$, $\langle \rho^*(g)(\varphi), \rho(g)(v) \rangle = \langle \varphi, v \rangle$.

   b) Verdadero o Falso: esta identidad determina $\rho^*(g)$ de forma única.

2. Encuentre una descomposición en irreducibles de $W \otimes W$, con W el espacio $[1, 1, 1]^\perp$ descrito en el ejercicio 3 de la Semana 1.

3. Demuestre que:

   a) $\rho_{Hom(V,W)} : \mathcal{G} \to GL(Hom(V, W))$ es un homomorfismo de grupos.

   b) Si (Z, ρ_Z) es una representación, definamos $Z^G = \{z \in Z | \forall g \in G, \rho_Z(g)(z) = z\}$. Demuestre que $Hom(V, W)^G = \{T : V \to W, \text{morfismos de representaciones}\}$.

   c) $V^* \cong Hom(V, \mathbb{C})$, donde $\mathbb{C}$ es la representación trivial.

4. Muestre que $Hom(V, W) \cong V^* \otimes W$ como representaciones.

5. Demuestre que:

   a) Si (Λ_1, g_1) y (Λ_2, g_2), con g_1, g_2 mapas d-lineales y simétricos, satisfacen la propiedad universal, entonces son canónicamente isomorfos.

   b) La construcción explicita de $(Sym^d(V), \mu)$ satisface:

      1) $\dim(Sym^d(V)) = \binom{n+d-1}{d}$

      2) $(Sym^d(V))$ satisface la propiedad universal

      3) $Sym^d(V)^* \cong (Sym^d(V^*))$

6. Calcule $[Sym^3(T)]_B$.

7. $Sym^d(V)^* \cong (Sym^d(V^*))$ como representaciones.

8. Sea $V = \langle e_1, ..., e_k \rangle$ y sean $v_1, ..., v_k \in V$. Demuestre que

$$
v_1 \wedge ... \wedge v_k = \sum_{I \subseteq [n], |I|=k} det(M_I) e_1 \wedge ... \wedge e_k \tag{1}
$$

   Donde $I = \{i_1, ..., i_k\}, i_i < i_{i+1}$ y M es la submatriz cuadrada con filas indexadas por I.

9. Demuestre:

   a) La propiedad universal del producto exterior lo determina de manera única.

   b) Sobre la construcción demuestre:

      1) $dim(\Lambda^k V) = \binom{n}{k}$

      2) $(\Lambda^k V, \wedge)$ satisface la propiedad universal.

10. Demuestre que, como representaciones:

   a) $\Lambda^k(V^*) \cong \Lambda^k V^*$

   b) $\Lambda^k(U \oplus W) = \bigoplus_{a+b=k} [\Lambda^a U \otimes \Lambda^b W]$

11. Demuestre que, como representaciones: $V \otimes V \cong Sym^2(V) \oplus \Lambda^2 V$

Semana 4

1. Demuestre que hay una biyección entre matrices hermitianas $n \times n$ definidas positivas y productos internos hermitianos.

2. Si V tiene un producto interno hermitiano, $T : V \to W$ es unitaria si $\langle Tv, Tw \rangle = \langle v, w \rangle$. Demuestre que:

   a) Esta definición es equivalente a $||Tv|| = ||v||, \forall v \in V$.

   b) Si $u_1, ..., u_n = B$ son base ortonormal con el producto hermitiano, entonces $[T]_B = A$ cumple $A^* = A^{-1}$

3. Escriba $W^\perp \otimes W^\perp$ como suma de irreducibles.

4. Sea V una representacion y $W, W^{'}$ subrepresentaciónes de V irreducibles. Si como espacios vectoriales, $V = W \oplus W^{'}$, muestre que esto también es cierto como representaciones.

Semana 5

1. (a) Sea V una representación irreducible de un grupo finito G. Sean $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle'_G$ dos productos hermitianos $G-$invariantes sobre V. Muestre que existe $\lambda \in \mathbb{R}^{>0}$ tal que $\langle \cdot, \cdot \rangle'_G = \lambda \langle \cdot, \cdot \rangle_G$.

   (b) Describa los productos hermitianos $G-$invariantes sobre una representación V cualquiera (*Sugerencia:* empiece por considerarlos como productos internos).

2. Muestre que, como espacios vectoriales (o representaciones triviales), hay isomorfismos

$$\mathrm{Hom}_G(A, B \oplus B') \simeq \mathrm{Hom}_G(A, B) \oplus \mathrm{Hom}_G(A, B') \tag{2}$$

$$\mathrm{Hom}_G(A \oplus A', B) \simeq \mathrm{Hom}_G(A, B) \oplus \mathrm{Hom}_G(A', B) \tag{3}$$

Semana 6

1. (Resuelto en clase) Sea V una representación irreducible de G. Calcule $\mathrm{End}_G(V)$.

2. (Resuelto en clase) Sean V_1, V_2 representaciones irreducibles de G, sea $V = V_1 \oplus V_2$. Calcule $\mathrm{End}_G(V)$.

3. (Resuelto en clase) Sea V' una representación irreducible de G, sea $V = V' \oplus V'$. Calcule $\mathrm{End}_G(V)$.

4. Sea $A := \mathbb{C}^{n \times n}$ el conjunto de matrices $n \times n$ con entradas en $\mathbb{C}$. Muestre que $Z(A)$, el centro de A, consiste de los múltiplos escalares de la matriz identidad.

Semana 7

1. Sea V un espacio vectorial. Demuestre que si $\varphi : V \to V$ es una proyección (i.e. $\varphi^2 = \varphi$) y $U := im(\varphi)$, $W := ker(\varphi)$ entonces se tienen las siguientes propiedades.

   a. $U \oplus W = V$.

   b. $\varphi(u) = u$ para cualquier $u \in U$ y $\varphi(w) = 0$ para cualquier $w \in W$.

   c. En bases que respetan la descomposición tenemos que $[\varphi]_B = \begin{bmatrix} I_d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   d. $tr(\varphi) = \dim(U) = \dim(im(\varphi))$.

2. Demuestre que $\varphi = \frac{1}{|G|} \sum\limits_{g \in G} \rho_V(g)$ es un morfismo de representaciones,i.e. $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(V, V)$.

3. Clases de conjugación de S_n.

a. ¿Qué significa conjugar? Si $h, f \in S_n$, muestre que $h^{-1} \circ f \circ h$ corresponde a çambiar los nombres”de los elementos de $[n]$ para aplicar f.

b. Demuestre que las clases de conjugación de S_n están en biyección con las particiones de $n(\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq 0, \lambda_i \in \mathbb{N}, n = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n)$.

c. Encuentre una fórmula cerrada para el tamaño de una clase de conjugación de $n = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$.

d. (Para investigar) ¿Qué tan rápido crece $p(n) =$ número de particiones de n?

Semana 8

1. Calcular la tabla de caracteres de S_5 y de A_5 y dar alguna construcción de todas las representaciones irreducibles.

2. Demuestre que para $j \geq 5$ no existen homomorfismos sobreyectivos $S_j \to S_d$ con $2 < d < j$.

3. Demuestre que si V es una representación irreducible y $\dim(V) \geq 2$ entonces existe $g \in G$ tal que $\chi_V(g) = 0$.

4. Ejercicios 2.34, 2.35, 2.37 y 2.39 de **(FH)**.

5. Recuerde que para $P : G \to \mathbb{C}$ la *transformada de Fourier de P* es $\hat{P}$: {irreps de G} $\to$ matrices dada por
$$\hat{P}(\rho_{V_i}) = \sum_{g \in G} P(g)[\rho_{v_i}].$$

   Sea $P : S_3 \to \mathbb{C}$ dada por $P(e) = p, p \in [0,1]$, $P(12) = P(13) = P(23) = \frac{1-p}{3}$ y $P(123) = P(132) = 0$. Calcule $\hat{P}$.

Semana 9

1. Demuestre que $(\mathbb{C}[\mathcal{G}], *) \simeq (\mathbb{C}\mathcal{G}, \cdot)$ (isomorfismo de álgebras).

2. Una distribución de probabilidad P en $\mathcal{G}$ es una función tal que para todo $t \in \mathcal{G}$, se tiene $P(t) \in \mathbb{R}$, $P(t) > 0$ y $\sum_{g \in \mathcal{G}} P(g) = 1$. Sean P, Q distribuciones de probabilidad en $\mathcal{G}$ y sea (g_1, g_2) una variable aleatoria tomando valores en $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ que cumple:

   - g_1, g_2 son independientes.
   - $g_1 \sim P$, $g_2 \sim Q$. Es decir que para todo $t \in \mathcal{G}$ se tiene que $\mathbb{P}\{g_1 = t\} = P(t)$ y $\mathbb{P}\{g_2 = t\} = Q(t)$.

   Defina $h = g_1 g_2$. Demuestre que para todo $t \in \mathcal{G}$,
$$\mathbb{P}\{h = t\} = (P * Q)(t).$$

3. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno en $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}\mathcal{G}, \mathbb{C}\mathcal{G})$ definido por
$$\langle T_1, T_2 \rangle := \frac{1}{|\mathcal{G}|} \operatorname{tr}(A_1 A_2^*),$$
   con $A_i := [T_i]_{\{e_g : g \in \mathcal{G}\}}$. Demuestre que el valor de este producto interno es independiente de la base ortonormal que se escoja para definir las matrices. Es decir, si las matrices de T_1 y T_2 con respecto a otra base ortonormal son respectivamente B_1 y B_2, entonces aplicando la definición del producto interno reemplazando A_1 y A_2 por B_1 y B_2 el resultado es el mismo.

4. Para $\varphi : \mathbb{C}[\mathcal{G}] = \mathbb{C}\mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{C}\mathcal{G}, \mathbb{C}\mathcal{G})$ función definida por $\varphi(f) = m_f$ donde $f = \sum_{g \in \mathcal{G}} f(g) e_g$ y $m_f : \mathbb{C}\mathcal{G} \to \mathbb{C}\mathcal{G}$ con $m_f(e_n) = (\sum_{g \in \mathcal{G}} f(g) e_g) \cdot e_n$, tenemos el siguiente lema

Lema 1. *φ tiene las siguiente propiedades*

a*) φ es un homomorfismo de álgebras*

b*) Si $\langle e_g, e_h\rangle = \delta_{gh}$ y $\langle A, B\rangle = \frac{1}{|\mathcal{G}|}\operatorname{tr}(AB^*)$, entonces*

$$\langle f_1, f_2\rangle = \langle \varphi(f_1), \varphi(f_2)\rangle.$$

c*) para todo $t \in \mathcal{G}$ $f(t) = \frac{1}{|\mathcal{G}|}\operatorname{tr}(\varphi(f)[m_{e_{t^{-1}}}]_B)$*

Demuestre que este lema implica el siguiente teorema

Teorema 2 (Propiedades de transformada de Fourier)**.** *Sean $P, Q : \mathcal{G} \to \mathbb{C}$.*

- $\widehat{P * Q}(\rho_i) = \hat{P}(\rho_i)\hat{Q}(\rho_i)$,
- $\langle P, Q\rangle = \frac{1}{|\mathcal{G}|}\sum_{j=1}^{k}\dim(V_j)\operatorname{tr}(\hat{P}(\rho_j)\hat{Q}(\rho_j)^*)$ *(Identidad de Plancherel),*
- *Para todo $t \in \mathcal{G}$, $P(t) = \frac{1}{|\mathcal{G}|}\sum_{j=1}^{k}\dim(V_j)\operatorname{tr}(\hat{P}(\rho_j)\rho_j(t)^*)$ (Fórmula de inversión de Fourier).*

5. Si P, Q son distribuciones de probabilidad en un conjunto finito $\mathcal{G}$ se define la norma

$$\|P - Q\|_{TV} = \max_{A \subseteq \mathcal{G}} |P(A) - Q(A)|.$$

Demuestre que

$$\|P - Q\|_{TV} = \frac{1}{2}\sum_{g \in \mathcal{G}} |P(g) - Q(g)| = \max_{f : \|f\|_\infty \leq 1} |E_P(f) - E_Q(f)|,$$

donde $\|f\|_\infty \leq 1$ quiere decir que $|f(\alpha)| \leq 1$ para todo $\alpha \in \mathcal{G}$ y $E_P(f) = \sum_{g \in \mathcal{G}} f(g)P(g)$.

Semana 10

1. (Requiere un poco de álgebra conmutativa) Demostrar
   - Lema 1a: $R := \{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha \text{ es entero algebraico}\}$ es un subanillo de $\mathbb{C}$
   - Lema 1b: $R \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$. Es decir, si α es entero algebraico y $\alpha \in \mathbb{Q}$, entonces $\alpha \in \mathbb{Z}$.
2. Sea G grupo finito cualquiera. Demuestre que para toda representación V de G existe una base B tal que para todo $g \in G$ las entradas de la matriz $[\rho(g)]_B$ son enteros algebraicos.
3. (Usando álgebra 2) Sea $b \in \mathbb{Q}(\zeta_n)$. Demuestre que

   $$(\beta \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \Psi_k(\beta) = \beta \ \ \forall k \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})) \Longleftrightarrow \mathbb{Q}(\zeta_n) \supset \mathbb{Q} \text{ es de Galois y } \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n), \mathbb{Q}) = \mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

   donde ζ_n es una raíz n-ésima primitiva, $\Psi_k(\zeta_n) = \zeta_n^k$ y $\mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ son las unidades de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
4. Demuestre que para todo χ caracter de S_n y para todo $g \in S_n$ se tiene que $\chi(g) \in \mathbb{Z}$.
5. a) Demuestre que toda representación irreducible de $\mathcal{G}$ es de dimensión 1 si y solo si $\mathcal{G}$ es abeliano.

   b) Encuentre todas las representaciones irreducibles de todos los grupos abelianos.

Semana 11

1. Sea $G = \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^d$. Considere la inclusión $i : G \to \mathbb{C}^d$ dada por $(a_1, \ldots, a_d) \mapsto ((-1)^{a_1}, \ldots, (-1)^{a_d})$. Sea $X = i(G)$. En $\mathbb{C}^d$ hay funciones polinomiales que podemos restringir a X. Si $S \subset [d]$ definimos $\chi_S := \prod i \in S\chi_i$ (i.e. $\chi_S(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d) = \prod\limits_{i\in S} \varepsilon_i$. Demuestre que los χ_S son los cáracteres de G.

2. En el mismo grupo $G = \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^d$ considere la distribución de probabilidad en la que podemos movernos 0 pasos ó 1 paso ó 2 pasos con la misma probabilidad. ¿Qué tan más rápido se mezcla el proceso?

3. Sean U, V espacios vectoriales. Sea $B_U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ la base del espacio vectorial U. Demuestre lo siguiente:
   - $U \otimes V = \{\sum_{i=1}^n u_i \otimes v_i : v_i \in V\}$
   - Si $\sum_{i=1}^n u_i \otimes v_i = \sum_{i=1}^n u_i \otimes v_i' \iff$ para cualquier i se tiene que $v_i = v_i'$

Semana 12

1. Sea $G = S_3$ y sea $H = \{e, (2,3)\}$ y $W_1 = Trivial$, $W_2 = Signo$. Encontrar una base para las representaciones inducidas $Ind_H^G(W_1), Ind_H^G(W_2)$ y escribir sus matrices.

2. - Sea W una $H-$representación y $\tilde{W} = Ind_H^G(W)$ la representación inducida. Considere el mapa:

   $$j : W \longrightarrow \tilde{W}$$
   $$w \longrightarrow \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H} e_h \otimes \delta_W(h)^{-1}(w)$$

     Demuestre que j es $1-1$ y es un morfismo de $H-$ representaciones mediante la restricción de la acción de G a izquierda.
   - Demuestre que la representación inducida satisface la propiedad universal.

Semana 14

1. Sea G un grupo finito. Suponga que G actúa en X de manera transitiva y sea $x_0 \in X$. Demuestre que
   $$\mathbb{C}X \cong Ind_H^G(triv_H) \quad \text{(como representaciones de } G\text{)}$$
   donde $H = Stab(x_0)$.

2. Con $n = 5$, calcule la representación $S^{(3,2)}$.

3. (a) Dibuje el diagrama de Hasse de particiones de 6 con $\preccurlyeq$ (orden de dominación de particiones).

   (b) Demuestre que el orden lexicográfico es una extensión lineal del orden de particiones.

4. - Demuestre que si q y t son tableaux de S_n tales que $sh(t) = sh(q)$ y $K_q(t) \neq 0$, entonces $\exists \pi^* \in C_q$: $\pi^*\{q\} = \{t\}$.
   - ¿Existen tableaux q y t tales que $sh(q) = sh(t)$ y $K_q\{t\} = 0$?

Semana 15

1. 1. Demuestre que $\{u_q : q$ es un tableaux estándar de forma $sh(q) = \lambda\} \subset S^\lambda$ es un conjunto linealmente independiente. (Sugerencia: los tableaux que aparecen en u_q son más grandes que q si q es estándar.)
   2. Demuestre el lema de los elementos de Garnir. (Ver libro de Bruce Sagan - The Symmetric group)