Recapitulando...

Sea G un grupo y V un e.v. $/\mathbb{C}$

Def: V es una representación de G si está dado un hom de grupos $\rho: G \longrightarrow GL(V)$

Notación: (V, ρ) es una representación (V es una rep.)

V es un ev. y tenemos ops lineales $\rho(g)$, $g \in G$

Def: Sean V, W reps de G (con homs ρ_1, ρ_2)

Un morfismo entre V y W es una transformación lineal ψ que satisface

$$\forall g \in G \quad \left(\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\rho_1(g)"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & W \arrow[d, "\rho_2(g)"] \\ V \arrow[r, "\psi"'] & W \end{tikzcd} \right)$$

Lema: Un iso de reps es un morfismo invertible

Pregunta: A nivel de matrices, qué relación hay entre reps. isomorfas?

Fije base B_1 en V y B_2 en W

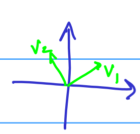
$$\psi \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ \psi$$

$$[\psi]_{B_1, B_2} \underbrace{[\rho_1(g)]_{B_1}}_{GL_n} = \underbrace{[\rho_2(g)]_{B_2}}_{GL_n} [\psi]_{B_1, B_2}$$

$$\boxed{[\rho_1(g)]_{B_1} = [\psi]_{B_1, B_2}^{-1} [\rho_2(g)]_{B_2} [\psi]_{B_1, B_2}}$$

Las matrices son conjugadas, es decir existe una base de V con respecto a la cual las matrices de mi rep (V) se convierten en las de W

Ej:



$B_1 = \{u_1, u_2\}$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$B_2 = \{v_1, v_2\}$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$[V \cong \text{triv} \oplus \text{sgn}]$$

Problema: Clasificar reps de G módulo isom.

Ejemplo: Sea $V = \mathbb{C}$ y G arb la rep trivial de G

$$\rho : G \longrightarrow GL(V) = \mathbb{C}^*$$
$$g \longmapsto 1$$

Def: El grado de la rep. W de G es $\dim_{\mathbb{C}}(W)$

Ejemplo: Sea C_n el grupo cíclico de orden n

$C_n = \{g, g^2, g^3, \ldots, g^{n-1}, g^n = e\}$. Cómo son todas las reps de grado 1 de C_n?

$V=\mathbb{C}^1$, $GL(V)=\mathbb{C}^*$

$\rho: C_n \longrightarrow \mathbb{C}^*$

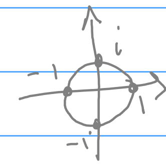
$\rho(g^k)=\rho(g)^k$ (porque ρ es hom) — $\rho(g)$ determina todo

$g^n=e \Rightarrow \rho(g)^n=\rho(e)=1$ — $\rho(g)$ es raíz enésima de 1

$$\left[\rho(g)=e^{i\frac{2\pi\cdot k}{n}} \qquad k=0,\dots,n-1\right]$$ — hay n reps de grado 1 de C_n

¿Son isomorfas entre sí?

Ejemplo: $n=4$ $\qquad \rho(g^k):=\rho(g)^k$



Reps especiales "Irreducibles"

	e	g	g^2	g^3
$\rho^{(0)}$	$(1,$	$1,$	$1,$	$1)$
$\rho^{(1)}$	$(1,$	$i,$	$-1,$	$-i)$
$\rho^{(2)}$	$(1,$	$-1,$	$1,$	$-1)$
$\rho^{(3)}$	$(1,$	$-i,$	$-1,$	$i)$

$\rho^{(1)}(g)=[i]$ $\quad B=\{1\}$

$\rho^{(1)}(g): \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$1 \longmapsto i$

Teorema:

C_n tiene n representaciones de grado 1 no isomorfas entre sí (en biyección con las raíces de la unidad) $\rho(g)=e^{i\frac{2\pi k}{n}}$

¿Existirá un grupo (S_n, $n\geq 2$) $\neq e$ en el que toda rep sea trivial?

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend right, dashed] & S_n \arrow[r, "\rho"] & GL(V) \end{tikzcd} \qquad \rho: S_n \longrightarrow GL(W), \quad W=\langle e_1,\dots,e_n\rangle$$

$\sigma \longmapsto (e_i \longmapsto e_{\sigma(i)})$

$H \leq S_m$

$H \xrightarrow{i} S_m \xrightarrow[1-1]{\rho \;(1-1)} GL(W)$,

$$\begin{array}{c|ccc} & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline e_1 & & & \\ e_2 & & & \\ e_3 & & & \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

¿$W \cong \mathrm{triv} \oplus \cdots \oplus \mathrm{triv}$?

$A^{-1} I A = I$

· Qué tanto de un grupo se puede recuperar a partir de sus representaciones?

$A = \rho(g)$

- $G = C_n = \{g, g^2, \ldots, g^{n-1}, g^n = e\}$

Pregunta: ¿Como son las representaciones de C_n de grado ≥ 2?

$V = \mathbb{C}^m \qquad \rho : C_n \longrightarrow GL(V)$

(i) $\rho(g^k) = \rho(g)^k$ — determinada por $\rho(g)$

(ii) $g^n = e \Rightarrow \rho(g^n) = \rho(g)^n = I_d$ — $\rho(g)$ es de orden finito.

$A^n = I$

- ~~Si A es diag~~ sus v.p. son raíces de la unidad

$Av = \lambda v, \ v \neq 0 \quad \lambda^n \vec{v} = A^n \vec{v} = I\vec{v} = \vec{v}$

$\lambda^n = 1 \Rightarrow \lambda$ es raíz enésima de 1

- minimal | característico (Cayley-Hamilton)

(✱)

minimal $\mid \underbrace{x^n - 1}_{\uparrow} \Rightarrow$ (raíces del minimal son $\neq$s $\Longleftrightarrow$ A es diagonalizable)

$q(x) := x^n - 1$

$q(A) = 0 \Rightarrow q \in (\text{minimal})$

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & 2 \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

Así que existe una base B en la que $\rho(g)$ es diagonal en B

$$\rho(g^k) = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \lambda_2^k & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_m^k \end{bmatrix}$$

las matrices de la rep son simultáneamente diagonales.

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ son raíces de la unidad. $\lambda_i = e^{\frac{i2\pi k_i}{n}}$

Así que $\boxed{V \cong \bigoplus_{i=1}^{m} \rho^{(k_i)}}$ ← toda rep se puede descomponer como suma de irreducibles.

Ejercicio 1: $W = \mathbb{C}^2$ con base $\{e_1, e_2\}$ $(V_i, \rho^{(i)})$

$\rho : C_4 \longrightarrow GL(W)$

$$\rho_W(g) = \begin{bmatrix} 1+i & -1+i \\ -1+i & 1+i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix}$$

① Chequear que es una rep.

② Encontrar una base $\rho W = \rho^{(i)} \oplus \rho^{(j)}$

$[W = V_i \oplus V_j]$

Ejercicio 2: $G = C_n$

Demuestre que $$M := \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{array}{cc} \begin{matrix} \varepsilon & g & g^2 & \cdots & g^{n-1} \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} \text{Reps de} \\ \text{grado 1} \end{bmatrix} & \begin{matrix} \rho^{(0)} \\ \vdots \\ \rho^{(n-1)} \end{matrix} \end{array}$$

$\boxed{M^{*} M = Id}$, es decir M es unitaria.