Sea $V$ una representación de $G$ $\quad (V, \rho)$

**Def:** $U \subseteq V$ es un subespacio invariante si $\quad i : U \longrightarrow V$ morfismo de reps

$\forall g \in G \; \forall \vec{u} \in U \; \left( \rho(g)(\vec{u}) \in U \right)$

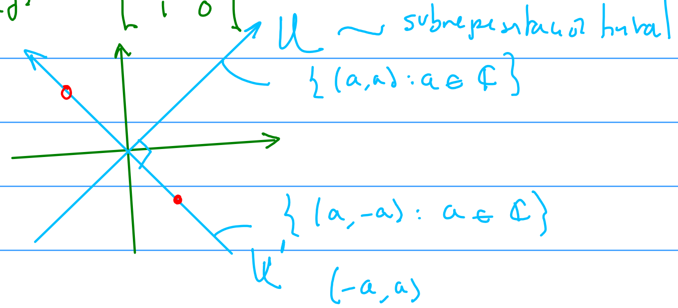
$U \subseteq V$ es un subespacio vectorial $\rho(g)(U) \subseteq U$

$U$ es una representación con $h : G \to GL(U)$,

$h(g) = \rho(g)|_U$

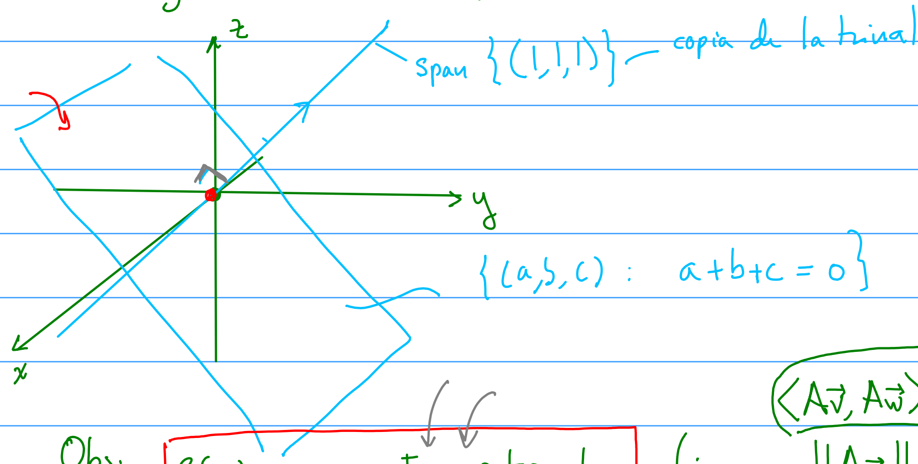
**Ejemplo:** $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{e, g\}$ actúa en $\mathbb{C}^2 = \langle \{e_1, e_2\} \rangle$

$$\rho(g) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$




**Ejemplo:** $G = S_3 \qquad V = \langle \{e_1, e_2, e_3\} \rangle$

$\rho(\sigma)(e_i) = e_{\sigma(i)}, \quad \rho(\sigma)$ lineal




$\langle A\vec{v}, A\vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$

**Obs:** $\boxed{\rho(\sigma) \text{ son matrices ortogonales}}$ (i.e. $\|A\vec{v}\| = \|\vec{v}\| \; \forall \vec{v}$)

Si $U \subseteq V$ es invariante entonces $U^\perp = \{ \vec{w} : \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle = 0 \; \forall u \in U \}$

$U^\perp$ es subesp invariante. [porque $\rho(\sigma)$ son ortogonales]

**Dem:** Si $\vec{z} \in U^\perp$, $\rho(g)(\vec{z}) \in U^\perp$

Sea $\vec{y} \in U$, $\langle \rho(g)(\vec{z}), \vec{y} \rangle = \langle \rho(g)(\vec{z}), \rho(g)\rho(g^{-1})(\vec{y}) \rangle$

$\overset{(=)}{} \; \langle \vec{z}, \underbrace{\rho(g^{-1})(\vec{y})}_{\in U} \rangle = 0. \Rightarrow \rho(g)(z) \in U^\perp.$

PORQUE matrices ortogonales

Notar que el subespacio azul $\Lambda = \{(a,b,c) : a+b+c=0\}$ es invariante, tiene dimensión 2 y no tiene subespacios invariantes propios no triviales.

**Ejercicio:** Demostrar esto: $S_3 \curvearrowright V = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ $\rho(\sigma)(e_i) = e_{\sigma(i)}$

$\Lambda = \{(a,b,c) : a+b+c=0\}$ Demostrar que $\Lambda$ es una rep. irreducible.

**Def:** Una representación $V$ de $G$ es irreducible si no tiene subespacios invariantes propios no triviales.

(externa) $\overset{\rho_1}{W_1}$, $\overset{\rho_2}{W_2}$ $\quad \overset{\Lambda}{W_1 \oplus W_2}$ $(W_1 \times W_2, +, \cdot)$

$\rho(g) := \rho_1(g) \oplus \rho_2(g)$

**Suma directa:** (interna)

Álgebra lineal

Sea $\Lambda$ un e.v. y sean $U, V$ subespacios de $\Lambda$

$\Lambda = U \oplus V$ si y sólo si se cumplen:

(i) $U + V = \Lambda$ (todo elemento de $\Lambda$ se puede expresar como suma de $\vec{u} + \vec{v}$)

(ii) $U \cap V = \{0\}$ (hay unicidad en la descomposición $\vec{u} + \vec{v}$)

($u_1 + v_1 = u_2 + v_2 \Rightarrow \overset{\Delta}{u_1 - u_2} = v_2 - v_1$

$\Delta \in U$, $\Delta \in V \Rightarrow \Delta = 0$ )

A nivel de representaciones escribimos $\Lambda = U \oplus V \iff$

(i) $U$ y $V$ son subespacios invariantes de $\Lambda$

(ii) $U + V = \Lambda$ y $U \cap V = \{0\}$ (como espacios vectoriales)

**Obs:** Si $\rho_1 := \rho|_U$, $\rho_2 := \rho|_V$ entonces

si $\alpha \in \Lambda$, $\alpha = \vec{u} + \vec{v}$

$$\rho(g)(\alpha) = \rho(g)(\vec{u} + \vec{v}) = \rho(g)(\vec{u}) + \rho(g)(\vec{v})$$
$$= \rho_1(g)(\vec{u}) + \rho_2(g)(\vec{v})$$

A nivel matricial $\{u_1, \dots, u_k\}$ base de $U$

$\{v_1, \dots, v_s\}$ base de $V$

$B = \{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_s\}$

$u_1 \dots u_k \; v_1 \dots v_s$

⋮ pag. sig.

$$\rho(g) = \begin{array}{c|cc} & u_1 \dots u_k & v_1 \dots v_s \\ \hline u_1 \\ \vdots \\ u_k & \rho_1(g) & 0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_s & 0 & \rho_2(g) \end{array}$$

$C_n = \{g, g^2, \dots, g^{n-1}, g^n = e\}$

**Teorema:** Sea $G = C_n$ y sea $V$ una representación de $G$. Entonces $V$ es isomorfa a una suma directa de reps irred de $G$ de grado 1.

**Dem:** Sea $T = \rho(g)$ $\quad T : V \longrightarrow V$

$T$ es de orden finito así que $T$ es diagonalizable es decir existen $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ base de $V$ tales que $T\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$.

Af: Defina $W_i = \langle \vec{v}_i \rangle$. tenemos las siguientes props.

(i) [$W_i$ es un subespacio invariante de $V$] ✓

(ii) Como e.v. $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_m$

Así que $V \overset{\text{rep}}{=} W_1 \oplus \dots \oplus W_m$.

**Ejercicio:** (i) $T : V \longrightarrow V$ es diagonalizable $(/\mathbb{C})$ ssi polinomio minimal es producto de factores lineales distintos

(ii) $T$ de orden finito $\Rightarrow$ $T$ diagonalizable

(iii) Demostrar que dos operadores diagonalizables son simult. diags. ssi conmutan

(iv) Qué implica esto sobre las representaciones de grupos abelianos finitos?

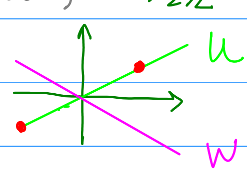
**Pregunta:** Es única la descomposición de arriba? (módulo orden)

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright V$

$$\begin{cases} \rho(e) = I \\ \rho(g) = -I \end{cases}$$

$\rho(g)^2 = (-I)^2 = I$

**Ejemplo:**




$\Lambda = U \oplus W$

$\Lambda = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle$

R: No necesariamente.

Si $A$ tiene un subespacio propio $E$ de dimensión $k \geq 2$, entonces en $E$

$\rho(g) = \lambda I$ donde $\lambda$ es el v.p. de $E$

Todo subespacio $F \subseteq E$ es invariante luego $E$ se puede escribir como suma directa de infinitas maneras distintas.

Si todo subespacio propio de $E$ es 1-dim'l entonces la descomp en irred. es única.