[¿De dónde vienen las representaciones?]

Hay dos fuentes principales:

① A partir de las simetrías de un objeto (G actúa sobre X mediante automorfismos)

② Combinando representaciones conocidas mediante operaciones.

① Sea G un grupo finito

Def: La representación regular de G se construye así:

ⓘ $V = \langle$ Espacio vectorial con base los símbolos $\{e_g : g \in G\} \rangle$

ⓘⓘ $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ $\quad (V, \rho)$

Para $h \in G$

$\rho(h)$ = La transformación lineal que en la base actúa así:

$$\rho(h)(e_g) := e_{h \cdot g}$$ producto del grupo

Ejercicio: Verifique que ρ es hom de grupos.

Ejemplo: Sea $G = S_3$, cómo es la rep. regular? $(a_1 a_2 \dots a_n)$

$S_3 = \{ id, (12), (13), (23), (123), (132)\}$ en notación cíclica $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$V = \langle \{ e_{id}, e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_{123}, e_{132} \} \rangle$

$\rho(23) : V \longrightarrow V$ lineal

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & e_{id}, & e_{12}, & e_{13}, & e_{23}, & e_{123}, & e_{132} \\
\hline
e_{id} & & & & & & \\
e_{12} & & & & & & \\
e_{13} & & & & & & \\
e_{23} & & & & & & \\
e_{123} & & & & & & \\
e_{132} & & & & & &
\end{array}
\quad
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} = [\rho(23)]_B
$$

$\rho(23)(e_{id}) = e_{(23)\cdot id} = e_{23}$

$\rho(23)(e_{12}) = e_{(23)\cdot(12)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} g$

$f \circ g$ $\quad (1\,3\,2)$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} f$

$\rho(23)(e_{13}) = e_{(23)\cdot(13)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\,2\,3)$

$\rho(23)(e_{123}) = e_{(23)\circ(123)} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & \end{matrix}$

Los $\rho(h)$ son biyecciones en los elementos de la base...

$\rho(h)(e_g) = e_{h\circ g}$ $\qquad e_{h\cdot g} = e_{h\circ g'} \iff h\cdot g = h\cdot g'$

$\iff g = g'$

así que las $\rho(h)$ son matrices de permutación

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ (a) Sea G un grupo finito y (V,ρ) su representación regular. Calcule $tr(\rho(h))$ $\forall h \in G$.

(b) (V ó F) $[\rho(h)]_B$ son simétricas?

Obs: $V \cong \mathbb{C}G$ dónde $\mathbb{C}G$ es el álgebra de grupo

notación

$$\mathbb{C}G \times \mathbb{C}G \longrightarrow \mathbb{C}G$$

La operación bilineal que en los elementos de las base $e_g \bullet e_h := e_{g\cdot h}$

Ej: $(7e_{(12)} + i\, e_{id}) \bullet 45\, e_{(12)} = (7\cdot 45)\, e_{(12)\cdot(12)} + (i\cdot 45)\, e_{id\cdot(12)}$

Es un álgebra asociativa no necesariamente conmutativa

1.2 Si G es un grupo finito, considere

$$F = \mathrm{Fun}(G, \mathbb{C}) = \{ f : G \longrightarrow \mathbb{C} \quad f \text{ función} \}$$

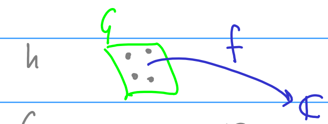
$$\rho^* : G \longrightarrow GL(F)$$ ← acción contra-gradiente

Si $h \in G$

$$\boxed{\begin{array}{l} \rho^*(h) : F \longrightarrow F \\ \rho^*(h)(f)(z) := f(h^{-1} \cdot z) \end{array}}$$

Ejercicio: Demostrar que (F, ρ^*) es una rep. ¿Por qué h^{-1} y no h?

Teorema: $(F, \rho^*) \cong \overbrace{(V, \rho)}^{\text{rep. regular.}}$



Dem: Para $h \in G$ defina $\phi_h : G \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\phi_h(z) = \begin{cases} 1, & \text{si } z = h \\ 0, & \text{d.l.c.} \end{cases}$$

Af: $\{\phi_h : h \in G\}$ son una base para F.

Dem: Sea $f \in F$

$$\boxed{f = \sum_{h \in G} f(h) \phi_h} \longrightarrow \langle \{\phi_h : h \in G\} \rangle = F$$

$$\sum_{h \in G} a_h \phi_h \equiv \underline{0}$$ — función 0

Sea $\bar{g} \in G$

$$\sum_{h \in G} \underbrace{a_h \phi_h(\bar{g})}_{= a_{\bar{g}}} = \underline{0}(\bar{g}) = 0$$

Los ϕ_h son l. indep.

Sea $T : F \longrightarrow V$ la transf lineal invertible que en la base $\{\phi_h : h \in G\}$ está dada por

$$T(\phi_h) := e_h$$

Af: T es un isomorfismo de representaciones

$$\begin{tikzcd} \tilde{F} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\rho^*(g)"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & V \arrow[d, "\rho(g)"] \\ \tilde{F} \arrow[r, "T"] & V \end{tikzcd}$$

Af:

$$\rho(g)\, T(\phi_h) = T\big(\rho^*(g)(\phi_h)\big) \checkmark$$

Calculamos los dos lados ...

$$\rho(g) T(\phi_h) = \rho(g)(e_h) = \boxed{e_{g\cdot h}}$$

en G $z = gh$

$$[\rho^*(g)(\phi_h)](z) = \phi_h(g^{-1}\cdot z) = \begin{cases} 1, & \text{si } \boxed{g^{-1}\cdot z = h} \\ 0, & \text{si } g^{-1}\cdot z \neq h \text{ — } z \neq gh \end{cases} = \phi_{g\cdot h}(z)$$

$$T\big(\rho^*(g)(\phi_h)\big) = T(\phi_{g\cdot h}) = \boxed{e_{g\cdot h}}$$

iguales

Más generalmente: Suponga que G actúa sobre un conjunto X (finito). Recuerde que una acción de G sobre X es un hom de grupos $\mathcal{J}: G \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$ "$(\{\text{biyecciones } b: X \to X\}, \circ)$"

Ejercicio: Demuestre que esta def es equivalente a la usual de un grupo actuando en un conjunto $G \times X \to X$

Def: La representación de permutaciones definida por la acción $\mathcal{J}$ de G sobre X se construye así

(1) $W = \langle \{ e_x : x \in X \} \rangle$

(2) $\rho: G \longrightarrow GL(W)$

$\rho(h) =$ "La transformación lineal que, en la base esta dada por

$$\rho(h)(e_x) = e_{\mathcal{J}(h)(x)}$$

Def: de (*): Sea $\mathcal{H} = \{ f : X \longrightarrow \mathbb{C} \}$, dotado

$$\rho^* : G \longrightarrow GL(\mathcal{H})$$

$$\rho^*(h)(f)(z) = f\left(\mathcal{J}(h^{-1})(z)\right)$$

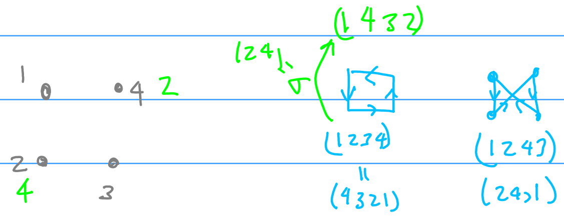
← Contragradiente

Ejercicio: (b) Demuestre que $(\mathcal{H}, \rho^*) \cong (W, \rho)$ como reps de G.

(a) Demuestre que (W, ρ) y $(\mathcal{H}, \rho^*)$ son reps

(c) Dada (W, ρ) es posible reconstruir la acción de G sobre X

Ejemplo:



$X = \{$ ciclos no dirigidos entre n elementos $\}$

$S_n \circlearrowright X$

(*) **Ejercicio:** Calcule $tr(\rho(\sigma))$ $\forall \sigma \in S_n$, $n = 4, 5, 6$ para (W, ρ) correspondiente a esta acción.