De dónde vienen las representaciones? (parte 2)

(1) Simetrías de objetos ($G \curvearrowright X$ conjunto $\longrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} \mathcal{F} = \{ f : X \to \mathbb{C} \} \\ (\mathcal{F}, \rho^{*}) \end{array}\right]$)

(2) Operaciones entre reps conocidas:

Idea: Si (V, ρ_V) y (W, ρ_W) son reps de G

construiremos:

$(V \oplus W, \rho_{V \oplus W})$ implícita

(V^{*}, ρ^{*})

$(V \otimes W, \rho_{V \otimes W})$

$(\mathrm{Hom}(V, W), \rho_{\mathrm{Hom}(V,W)})$

$\Lambda^k V$

$\mathrm{Sym}^k(V)$

operaciones entre REPRESENTACIONES

de espacios vectoriales

(V, ρ_V) es rep:

(2.1) $V^{*} = \{ \varphi : V \to \mathbb{C} \text{ lineales} \}$

$\rho^{*} : G \longrightarrow GL(V^{*})$

$\forall h \in G \quad \left(\rho^{*}(h)(f)(z) = f\left(\rho_V(h^{-1})(z)\right)\right)$

Cómo son las matrices de V^{*}?

Sea $B = \{ v_1, \dots, v_n \}$ una base de V

$[\rho_V(h)]_B = A$ ✓

Si tengo base fija en V, esta induce una base natural en V^{*} así:

$B^{*} = \{ v_1^{*}, \dots, v_n^{*} \} \subseteq V^{*}$

$$v_i^{*}(v_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{d/c.} \end{cases}$$

Útil porque: $\varphi \in V^{*}$, $\quad \varphi = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\varphi(v_i)}_{\text{coefs.}} v_i^{*}$

$\boxed{\text{Lema:}}$ Si $[\rho(h)]_B = A$ entonces $\boxed{[\rho^*(h)]_{B^*} = (A^t)^{-1}}$

Ejercicio: Demuestre el lema.

Ejercicio: [Suponga que $[\rho(h)]_B$ son unitarias $\forall h \in G$]
Demuestre que $tr(\rho^*(h)) = \overline{tr(\rho(h))}$, $\forall h \in G$.

conjugado

Ejercicio: (a) Sea $\rho : C_n \to GL(\mathbb{C}^m)$ una rep cualquiera.
Calcule ρ^*.

(b) Muestre que $(V \oplus W)^* \cong V^* \oplus W^*$

canónico

en la cat de rep.

(2.2)

Productos tensoriales: de espacios vectoriales

$V = \langle \{v_1, .., v_n\} \rangle \qquad \dim(V) = n$

$W = \langle \{w_1, .., w_m\} \rangle \qquad \dim(W) = m$

$(V \otimes W, \otimes)$

símbolos nom

$$V \otimes W = \left\langle \left\{ v_i \otimes w_j \; ; \; \begin{matrix} 1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m \end{matrix} \right\} \right\rangle$$

$$\dim(V \otimes W) = n \cdot m$$

$$\otimes : V \times W \longrightarrow V \otimes W$$

$$(v, w) \longmapsto \underbrace{\otimes(v, w)}_{V \otimes W} = \otimes\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^n a_i v_i}_{\vec{v}}, \underbrace{\sum_{j=1}^m b_j w_j}_{\vec{w}} \Big)$$

$a_i + a_i'$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j (v_i \otimes w_j)$$

$a_i + a_i'$

Obs: $\otimes$ es bi-lineal

Ejemplo: $V = \mathbb{C}^2 = \langle e_1, e_2 \rangle$
$W = \mathbb{C}^2 = \langle f_1, f_2 \rangle$

$$V \otimes W = \langle e_1 \otimes f_1, e_1 \otimes f_2, e_2 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2 \rangle \cong \mathbb{C}^4$$

$$A(e_1 \otimes f_1) + B(e_1 \otimes f_2) + C(e_2 \otimes f_1) + D(e_2 \otimes f_2) = (A, B, C, D)$$

$$\operatorname{im}(\otimes) \overset{?}{=}$$

$$\otimes\big(\underbrace{a_1e_1+a_2e_2}_{V},\ \underbrace{b_1f_1+b_2f_2}_{W}\big)=$$

$$a_1b_1(e_1\otimes f_1)+a_1b_2(e_1\otimes f_2)+a_2b_1(e_2\otimes f_1)+a_2b_2(e_2\otimes f_2)$$

$$\to \big[(\underset{A}{a_1b_1},\ \underset{B}{a_1b_2},\ \underset{C}{a_2b_1},\ \underset{D}{a_2b_2})\big] \subseteq \mathbb{C}^4$$

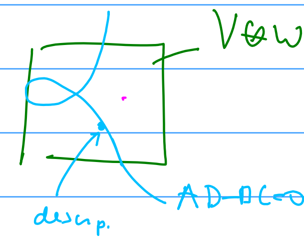
¿Qué vectores de $\mathbb{C}^4$ se puede escribir así?

$$\underset{h}{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}}\underset{g}{\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 \\ a_2b_1 & a_2b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^2 \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "T"'] & \mathbb{C}^1 \arrow[r, "h"] & \mathbb{C}^2 \end{tikzcd}$$

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = 0 \quad \text{en } \operatorname{im}(\otimes)$$

$$[AD-BC=0]$$



$$\operatorname{im}(\otimes) = \left\{ A\, e_1\otimes f_1 + B\, e_1\otimes f_2 + C\, e_2\otimes f_1 + D\, e_2\otimes f_2 \ :\ \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$V\otimes W = \operatorname{Hom}(V^*, W)$$

[No todo elemento de $V\otimes W$ está en $\operatorname{im}(\otimes)$ aunque todo $V\otimes W$ sí es expresable como suma de (2) de estos.]

Ejercicio: (a) Encuentre ecuaciones que caractericen los vectores descomponibles de $\underset{n}{V}\otimes \underset{m}{W}$.

(b) Cual es el mínimo número de tensores descomponibles necesario, para expresar todo elemento de $V\otimes W$.

Def: Una pareja $(\underset{\text{espacio vect}}{\Lambda}, g)$, $g: V\times W \xrightarrow{\text{bilineal}} \Lambda$, es un producto tensorial entre V y W si satisface la siguiente propiedad universal: $\forall\, S$ espacio vect $\forall\, T$ bilineal

$$(v,w) \longmapsto T(v,w)$$

$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "T"] \arrow[d, "g"'] & S \\ \Lambda \arrow[ur, dashed, "\exists!\,\varphi"'] & \end{tikzcd} \quad \text{LINEAL}$$

$$\varphi(v\otimes w) = T(v,w)$$

útil porque hace muy sencillo describir mapas lineales. Basta especificar qué sucede en los descomponibles

Obs: $\underset{\text{no-lineal}}{\mathrm{Bi}(V\times W, S)} \overset{\text{biyección}}{\cong} \underset{\text{lineal}}{\operatorname{Hom}(\Lambda, S)}$

Lema: Si (Λ_1, g_1) y (Λ_2, g_2) son productos tensoriales entonces hay un isomorfismo canónico entre ellos.

Ejercicio: (1) ⓐ

$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "g_i"'] & \Lambda \\ \Lambda \arrow[ur, dashed, "id"'] & \end{tikzcd}$$

único

(2) ⓑ

$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "g_1"'] & \Lambda_2 \arrow[dl, bend left] \\ \Lambda_1 \arrow[ur, bend left] & \end{tikzcd}$$

Lema: $(V\otimes W, \otimes)$ satisface la prop universal

$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "T"', "\text{bilineal}"] \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & S \\ V\otimes W \arrow[ur, dashed, "\exists!\,\ell"'] & \end{tikzcd}$$

$v_i\otimes w_j \longmapsto T(v_i, w_j)$

$v\in V$, $w\in W$ $\quad \ell\left(\otimes(v,w)\right) \overset{\checkmark}{=} T(v,w)$

¿Cómo definir $\int V\otimes W$?

Def: Si $\begin{cases} T: V \to V \\ H: W \to W \end{cases}$ son transf. lineales vamos a definir

$$T\otimes H : V\otimes W \xrightarrow{\text{lineal}} V\otimes W$$

$$(v,w) \overset{\text{bi-lineal}}{\underset{\psi}{\longmapsto}} T(v)\otimes H(w) \text{ — } \otimes\left(T(v), H(w)\right)$$

$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r] \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & V\otimes W \\ V\otimes W \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

$\exists!\ \varphi =: T\otimes H$

Como ψ es bi-lineal φ está bien definida.

$$\begin{cases} \varphi(v\otimes w) = T(v)\otimes H(w) \\ \varphi \text{ lineal} \end{cases}$$

Usando esto definimos, para $h \in G$

$$\rho_{V \otimes W}(h) := \rho_V(h) \otimes \rho_W(h)$$

¿Cómo son las matrices del producto tensorial?