Operaciones entre representaciones (parte II)

Def: Sea (V, ρ_V), (W, ρ_W) reps de un grupo G

$\boxed{(V\otimes W, \rho_{V\otimes W})}$ ← Representación de G.

con

$$\rho_{V\otimes W} : G \longrightarrow GL(V\otimes W)$$
$$h \longmapsto \rho_V(h) \underbrace{\otimes}_{?} \rho_W(h)$$

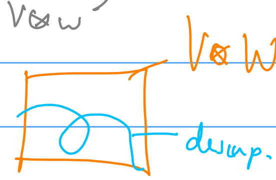
Def: Sea $T: V \longrightarrow V$ transformaciones lineales
$H: W \longrightarrow W$

$$(\vec{v}, \vec{w}) \longmapsto T(\vec{v}) \otimes H(\vec{w}) := \otimes(T(\vec{v}), H(\vec{w}))$$

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "\text{bilineal}"] \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & V\otimes W \\
V\otimes W \arrow[ur, dashed, "\exists!\, \varphi \text{ lineal} =: T\otimes H"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{\varphi(v_1 \otimes w_1) = T(v_1) \otimes H(w_1)}$$

¿Cómo construir matrices para $(V\otimes W, \rho_{V\otimes W})$?



Ejemplo: $V = \langle e_1, e_2 \rangle$
$W = \langle f_1, f_2 \rangle$

$$V\otimes W = \langle e_1\otimes f_1,\ e_1\otimes f_2,\ e_2\otimes f_1,\ e_2 \otimes f_2 \rangle$$

$$(2e_1 + ie_2)\otimes(f_1+f_2) = \left[2[e_1\otimes f_1] + 2[e_1\otimes f_2] + i[e_2\otimes f_1] + i[e_2\otimes f_2]\right] = \vec{z}$$

$$T\otimes H(\vec{z}) = T(2e_1+ie_2) \otimes H(f_1+f_2)$$

Ejemplo: $V = \langle e_1, e_2\rangle$ $\quad T: V \longrightarrow V \quad [T]_{B_V} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

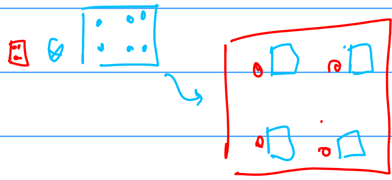
$W = \langle f_1, f_2 \rangle \quad H: W \longrightarrow W \quad [H]_{B_W} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

$$V\otimes W = \langle e_1\otimes f_1,\ e_1\otimes f_2,\ e_2\otimes f_1,\ e_2\otimes f_2 \rangle$$

$$B_{V\otimes W} = \{e_1\otimes f_1,\ e_1\otimes f_2,\ e_2\otimes f_1,\ e_2\otimes f_2\}$$

Producto de Hadamard

$$[T\otimes H]_{B_{V\otimes W}} \overset{?}{=} \begin{array}{c|cccc|} & e_1\otimes f_1 & e_1\otimes f_2 & e_2\otimes f_1 & e_2\otimes f_2 \\ \hline e_1\otimes f_1 & aA & aB & bA & bB \\ e_1\otimes f_2 & aC & aD & bC & bD \\ e_2\otimes f_1 & cA & cB & dA & dB \\ e_2\otimes f_2 & cC & cD & dC & dD \end{array}$$



$$T\otimes H\,(e_1\otimes f_1) = T(e_1)\otimes H(f_1) = (a\,e_1 + c\,e_2)\otimes(A f_1 + C f_2)$$
$$= aA\; e_1\otimes f_1 + aC\; e_1\otimes f_2 + cA\; e_2\otimes f_1 + cC\; e_2\otimes f_2$$

Ejercicio: $V^* = \{\varphi : V \to \mathbb{C} \text{ lineales}\}$

$$V^* \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(\varphi, v) \longmapsto \langle \varphi, v\rangle := \varphi(v)$$

(a) Si (V^*, ρ^*), (V, ρ) entonces

$$\forall g \in G \quad \langle \rho^*(g)(\varphi), \rho(g)(v)\rangle = \langle \varphi, v\rangle$$

(b) V ó F: Esta identidad determina $\rho^*(g)$ de manera única.

* Ejercicio: Encuentre una descomposición en irreducibles de $W\otimes W$ donde $[W = (1,1,1)^\perp]$, $S_3 \curvearrowright \langle e_1, e_2, e_3\rangle$, $\{(x,y,z)\in \mathbb{C}^3 ;\ x+y+z=0\}$

Def: Sean (V, ρ_V) y (W, ρ_W) representaciones de G

$$(\mathrm{Hom}(V,W),\ \rho_{\mathrm{Hom}(V,W)})$$

$$\mathrm{Hom}(V,W) = \{T : V \longrightarrow W \text{ lineales}\}$$

Si $g \in G$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\rho_V(g)"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & W \arrow[d, "\rho_W(g)"] \\ V \arrow[r, dashed, "\rho_{Hom(V,W)}(g)(T)"] & W \end{tikzcd}$$

$$\boxed{\rho_{Hom(V,W)}(g)(T) = \rho_W(g) \circ T \circ \rho_V(g)^{-1}}$$

Ejercicio: (a) Demuestre que $\rho_{Hom(V,W)} : G \longrightarrow GL(Hom(V,W))$ es un hom de grupos

(b) **Def:** Si (Z, ρ_Z) es una rep de G

$\rho_{Hom}(g)(\varphi) = \varphi(\rho(g^{-1})) = \rho^*(g)(\varphi)$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\rho(g)"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "id"] \\ V \arrow[r, dashed] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

$$Z^G = \{ z \in Z : \forall g \in G \ (\rho_Z(g)(z) = z) \}$$

"copias de la trivial en Z"

"subespacio fijo de Z"

$$Z^G \subseteq Z$$

Demuestre que $Hom(V, W)^G = \{T : V \longrightarrow W$ que son morfismos de reps$\}$

(c) Demuestre que: $V^* \cong Hom(V, \mathbb{C})$ donde $\mathbb{C}$ es la rep. trivial

Sean (V, ρ_V) y (W, ρ_W) reps. de G.

***Ejercicio:** Demuestre que, como representaciones de G

$$Hom(V, W) \cong V^* \otimes W$$

Isomorfismo canónico de reps.

Producto simétrico y producto exterior:

Sea $V = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ y sea $d \in \mathbb{N}$.

Definimos $(Sym^d(V), \psi)$. Este producto simétrico tiene la capacidad de "linearizar operaciones d-lineales simétricas", es decir d-lineal y simétrica: $\forall \sigma \; t(v_1,\dots,v_d) = t(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(d)})$

S espacio vectorial arbitrario

$$
\begin{tikzcd}
\underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{d\text{-copias}} \arrow[rr, "t"] \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & & S \\
\checkmark\ Sym^d(V) \arrow[urr, dashed, "\exists!\, \varphi \text{ lineal}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Obs: $(Sym^d(V), \psi)$ está determinada de manera única por esa propiedad universal.

Ejemplo: $V = \langle e_1, e_2 \rangle$

$$
\begin{tikzcd}
V \times V \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\psi"'] & \mathbb{C} \\
Sym^2(V) \arrow[ur, "\exists!\, \varphi"'] &
\end{tikzcd}
$$

bilineal + simétrica

$(v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle := v_1 w_1 + v_2 w_2$

Construcción $(Sym^d(V), \psi)$ como espacio vectorial

$V = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$

$$Sym^d(V) = \Big\langle \underbrace{e_1^{a_1} e_2^{a_2} \cdots e_n^{a_n}}_{\text{"imagino" que son variables conmutativas}} : \; a_1 + \dots + a_n = d \Big\rangle$$

d-lineal y simétrico!

$$\psi : V \times V \times \cdots \times V \xrightarrow{\psi} Sym^d(V)$$

$$(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d) \longmapsto \Big(\sum_{i_1=1}^{n} c_{i_1} e_{i_1}\Big) \underbrace{\cdot \dots \cdot}_{\substack{\text{multiplico} \\ \text{imaginando que} \\ \text{variables conmutativas}}} \Big(\sum_{i_d=1}^{n} c_{i_d} e_{i_d}\Big)$$

Ejemplo: $V = \langle e_1, e_2 \rangle$ $\quad Sym^{2}(V)$

$$Sym^2(V) = \langle e_1^2, e_1 e_2, e_2^2 \rangle$$

$$V \times V \xrightarrow{\psi} Sym^2(V)$$

$$(a e_1 + b e_2,\ A e_1 + B e_2) \longmapsto (a e_1 + b e_2) \cdot (A e_1 + B e_2)$$

$$= aA(e_1^2) + (aB + bA) e_1 \cdot e_2 + bB e_2^2$$

Cómo son todas las transformaciones bi-lineales y simétricas $V \times V \xrightarrow{b} \mathbb{C}$?

$$\begin{tikzcd}
V \times V \arrow[rr, "b"] \arrow[d, "\psi"'] & \arrow[d, phantom, "\#"] & \mathbb{C} \\
\mathrm{Sym}^2(V) \arrow[urr, dashed, "\exists!\,\varphi"'] & &
\end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Sym}^2(V) = \langle e_1^2, \ e_1 e_2, \ e_2^2 \rangle$$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(e_1^2) = \alpha \\ \varphi(e_1 e_2) = \beta \\ \varphi(e_2^2) = \gamma \end{array}\right] \checkmark$$

$$b(ae_1 + be_2, \ Ae_1 + Be_2) = \varphi(\psi(ae_1 + be_2, \ Ae_1 + Be_2))$$

$$= \varphi(aA\, e_1^2 + (aB + bA) e_1 e_2 + bB\, e_2^2)$$

$$= aA\,\alpha + (aB + bA)\,\beta + bB\,\gamma \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$$

no lineal en $V \times V$

d-lineal simétrico

Ejercicio: ① Demuestre que si (Λ_1, g_1) y (Λ_2, g_2) satisfacen la prop univ. $\Rightarrow$ son canónicamente isomorfas

** ② Demuestre que la construcción explícita $(\mathrm{Sym}^d(V), \psi)$ satisface

ⓐ $\dim(\mathrm{Sym}^d(V)) = \binom{n+d-1}{d}$

ⓑ $(\mathrm{Sym}^d(V), \psi)$ satisface la prop. universal.

③ Demueste que $\mathrm{Sym}^d(V)^* \cong \mathrm{Sym}^d(V^*)$

Def: