Sea V un espacio vectorial (sobre $\mathbb{C}$, $\dim(V)<\infty$)

Def: $GL(V) = \{T: V \longrightarrow V$ lineales e invertibles$\}$

$GL(V)$ es un grupo

Obs: Sea $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ una base para V.

Si $T: V \longrightarrow V$ es lineal podemos representar a T mediante una matriz resp. a base $\mathcal{B}$

$M = [T]_{\mathcal{B}}$

$$\begin{array}{c|cccc} & \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \\ \hline \vec{v}_1 & & & & \\ \vec{v}_2 & T(\vec{v}_1) & T(\vec{v}_2) & \cdots & T(\vec{v}_n) \\ \vdots & & & & \\ \vec{v}_n & & & & \end{array} = \begin{bmatrix} a_{ji} & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{T(\vec{v}_i)}_{\in V} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \vec{v}_j$$

$$\varphi_{\mathcal{B}}: GL(V) \longrightarrow \underbrace{GL_n = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : \det(A) \neq 0\}}_{\text{más correcto, con topología (dos) grupo, grupo algebraico, grupo Lie.}}$$

Sea G un grupo finito y V en espacio vectorial

Def: Una representación de G en V es un homomorfismo de grupos $\rho: G \longrightarrow GL(V)$

Obs: Si G es finito $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$

$\underset{A_1}{\rho(g_1)}, \underset{A_2}{\rho(g_2)}, \ldots, \underset{A_m}{\rho(g_m)}$. Si fijamos $\mathcal{B}$ base de V

$\left[\rho: G \longrightarrow GL(V) \quad \mathrm{im}(\rho) \cong G/\ker(\rho)\right]$

Una rep es:
① Un ev V
② Un conjunto de matrices que actúan sobre V que satisfacen al menos las 'ecuaciones de G'

(i.e. si en $g_1 g_3 = g_5$, $\rho(g_1)\rho(g_3) = \rho(g_5)$, $A_1 A_3 = A_5$)

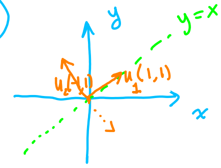
Notación: si $g \in G$
$\rho(g) \in GL(V)$
$\rho(g): V \xrightarrow[\text{lineal}]{} V$
$\rho(g)(\vec{w})$

[Ejemplo] $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{e, g\} = \langle g : g^2 = e\rangle$

$V = \mathbb{C}^2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ $\quad \rho: \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow GL(V)$

$\rho(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{cases} \rho(g)(\vec{v}_1) = \vec{v}_2 \\ \rho(g)(\vec{v}_2) = \vec{v}_1 \end{cases}$ $\quad [\rho(g)]_{\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$

V



$\rho(e) = I_d$

$\rho(g)$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

¿Cómo construir una buena base cuando hay simetrías?

$B_2 = (\vec{u_1}, \vec{u_2})$

$[\rho(e)]_{B_2} = I_d$ $\quad [\rho(g)]_{B_2} = \begin{array}{c|cc} & u_1 & u_2 \\ \hline u_1 & 1 & 0 \\ u_2 & 0 & -1 \end{array}$

"diagonales por bloques"

$\rho = triv \oplus sgn$ $\quad \boxed{(V, \rho_1)}$ $\quad V$

Sean V, W espacios vectoriales y sea G un grupo.

Sean ρ_1 y ρ_2 rep de G en V y W resp.

Def: Un morfismo entre V y W es una transformación lineal $\Psi: V \longrightarrow W$ que satisface

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\rho_1(g)"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & W \arrow[d, "\rho_2(g)"] \\ V \arrow[r, "\Psi"'] & W \end{tikzcd}$$

$$\rho_2(g) \circ \Psi = \Psi \circ \rho_1(g)$$

Ψ es equivariante